

数学・物理通信

3卷8号 2013年12月

編集 新関章三・矢野 忠

2013年12月26日

目次

| | |
|----------------------------------|-----------|
| 等比数列のコサインの有限乗積 2 | 3 |
| 1.1 前回の結果から | 3 |
| 1.2 分母がメルセンヌ型の数の場合 | 3 |
| 1.3 分母が一般の奇数の場合 | 4 |
| 1.4 一般的考察 | 7 |
| 衝撃問題の高次元への拡張 (3) | 8 |
| 2.1 はじめに | 8 |
| 2.2 5次元の衝撃問題 | 9 |
| 2.3 3次元弾性体の衝撃問題 | 13 |
| 2.3.1 方程式の導入とその解法 | 13 |
| 2.3.2 Poisson 比が $\nu = 1/2$ の場合 | 17 |
| 2.4 数値計算によるグラフ表示 | 17 |
| 2.5 おわりに | 18 |
| 四元数と空間回転 6 | 20 |
| 3.1 はじめに | 20 |
| 3.2 回転の自由度 | 20 |
| 3.3 Euler 角による空間回転 | 23 |
| 3.4 回転行列の条件 | 25 |
| 3.5 おわりに | 26 |
| 3.6 付録 | 26 |
| 3.6.1 付録1 (3.2.17)-(3.2.19) の導出 | 26 |
| 3.6.2 付録2 a_{ij} の間の条件 | 27 |
| 3.6.3 付録3 Euler 角の記号 | 28 |
| 3.6.4 付録4 行列 A の計算 | 28 |
| 3.6.5 付録5 $ A = 1$ の直接の証明 | 29 |
| 3.6.6 付録6 Gimbal lock の現象 | 29 |
| 3.6.7 付録7 Gimbals | 30 |
| 編集後記 | 32 |

Contents

1. Noboru NAKANISHI: Finite Products of the Cosines of Geometric Sequences, II
2. Kenji SETO: Extensions to Higher Dimensions of Impulsive Loading Problem (3)
3. Tadashi YANO: The Quaternions and Rotations 6
4. Tadashi YANO: Editorial Comments

等比数列のコサインの有限乗積 2

Finite Products of the Cosines of Geometric Sequences, II

中西 襄¹
Noboru NAKANISHI²

1.1 前回の結果から

前回の論文で、等比数列のコサインの有限乗積の公式を与え、それと等差数列のコサインの有限乗積の公式との関連を考察した。考えた公式は

$$\prod_{k=0}^{n-1} \cos\left(\frac{2^k \lambda \pi}{2^n + 1}\right) = \frac{1}{2^n} \quad (1.1.1)$$

である。ここに λ は $2^n + 1$ で整除されない任意の奇数である（一般性を失うことなしに $1 \leq \lambda \leq 2^{n-1}$ に制限してよい³）。これと、等差数列のコサインの有限乗積の公式

$$\prod_{K=1}^N \cos\left(\frac{K\pi}{2N+1}\right) = \frac{1}{2^N} \quad (1.1.2)$$

の $N = 2^{n-1}$ の場合を比較すると、(1.1.1) は (1.1.2) の部分積に対する公式になっている。実際、 $2N+1 = 2^{2^m} + 1$ が素数（フェルマー素数）の場合は、(1.1.2) は (1.1.1) の $N/n = 2^{2^m - m - 1}$ 個の相異なる λ に対する公式の合併になっている。しかし、それ以外の場合にはそのような分解は成立しない。 $2N+1 = 2^n + 1$ がフェルマー素数でない場合、それは合成数である。そのような場合でも、 $2N+1$ と互いに素でない λ まで用いれば、多くの場合 (1.1.2) を等比数列のコサインの有限乗積の公式の合併に帰着させられる（ただし、より小さい n に対する (1.1.1) をも使う）。ただ、これはいつでも成立するとは言えず、分解にはより小さい N に対する (1.1.2) をも使う必要がある場合もあった。

等差数列のコサインの有限乗積の公式を完全に等比数列のコサインの有限乗積の公式の合併に帰着させるためには、この公式をコサインの中の分母が $2^n + 1$ とは限らない一般の奇数 $2N+1$ の場合に拡張しなければならない。そこで、今回はそのような場合について考察することにする。

1.2 分母がメルセンヌ型の数の場合

サインの倍角公式

$$\sin(2\theta) = 2 \sin \theta \cdot \cos \theta \quad (1.2.1)$$

¹ 京都大学名誉教授

² nbr-nak@trio.plala.or.jp

³ コサインは λ の符号に依存しないことに注意

で $\theta = 2^k \alpha$ とおいて, $k = 0, 1, \dots, n-1$ の積を取れば

$$2^n \prod_{k=0}^{n-1} \sin(2^k \alpha) \prod_{k=0}^{n-1} \cos(2^k \alpha) = \prod_{k=0}^{n-1} \sin(2^{k+1} \alpha). \quad (1.2.2)$$

α は解析的な変数であるから, 0 になる場合を気にせず共通因子は約してよい⁴. したがって⁵

$$2^n \sin \alpha \prod_{k=0}^{n-1} \cos(2^k \alpha) = \sin(2^n \alpha). \quad (1.2.3)$$

この右辺は, $\alpha = \lambda\pi/(2^n \pm 1)$ とおけば, λ が奇数であることにより,

$$\sin\left(\frac{2^n \lambda \pi}{2^n \pm 1}\right) = \sin\left(\lambda\pi - \frac{2^n \lambda \pi}{2^n \pm 1}\right) = \pm \sin\left(\frac{\lambda \pi}{2^n \pm 1}\right) \quad (1.2.4)$$

と変形できる. λ が $2^n \pm 1$ で整除されないときは $\sin(\lambda\pi/(2^n \pm 1))$ はゼロにならないので, (1.2.3) から

$$\prod_{k=0}^{n-1} \cos\left(\frac{2^k \lambda \pi}{2^n \pm 1}\right) = \pm \frac{1}{2^n} \quad (1.2.5)$$

を得る (複号同順). なお, λ が $2^n \pm 1$ で整除される場合は, (1.2.5) の右辺はもちろん -1 である.

前回分母が $2^n + 1$ の場合を扱ったが, (1.2.5) から分母がメルセンヌ型の数⁶ ($2^n - 1$) の場合にも全く同様な公式が成立することがわかる. 以下, $\{1, 2, \dots, N = 2^{n-1} - 1\}$ がどのような $2N + 1$ を法としたどのような等比数列に分解するかを具体的に示す⁷.

$N = 1, n = 2, 2N + 1 = 2^n - 1 = 3$ の場合: $\{1\}$.

$N = 3, n = 3, 2N + 1 = 7$ の場合: $\{1, 2, -3\}$.

$N = 7, n = 4, 2N + 1 = 15$ の場合: $\{1, 2, 4, -7\} + \{3, 6\} + \{5\}$.

$N = 15, n = 5, 2N + 1 = 31$ の場合:

$$\{1, 2, 4, 8, -15\} + \{3, 6, 12, -7, -14\} + \{5, 10, -11, 9, -13\}.$$

$N = 31, n = 6, 2N + 1 = 63$ の場合:

$$\{1, 2, 4, 8, 16, -31\} + \{3, 6, 12, 24, -15, -30\} + \{5, 10, 20, -23, 17, -29\} \\ + \{11, 22, -19, 25, -13, -26\} + \{7, 14, 21, 28\} + \{9, 18, 27\}.$$

$N = 63, n = 7, 2N + 1 = 127$ の場合:

$$\{1, 2, 4, 8, 16, 32, -31\} + \{3, \dots\} + \{5, \dots\} + \{7, \dots\} + \{9, \dots\} + \{11, \dots\} \\ + \{13, \dots\} + \{19, \dots\} + \{21, \dots\}.$$

一般に $n \geq 3$ で $N = 3, 15, 63, \dots$ のように分母の数が素数, すなわちメルセンヌ数ならば, $N = 2^{n-1} - 1$ は n で整除されなければならないことになる. これが成立することは, メルセンヌ数に対しては n が素数であることとフェルマーの小定理から従う.

1.3 分母が一般の奇数の場合

N を任意の自然数として, (1.1.2) の分解を考える.

⁴この注意は川村氏による.

⁵この公式は Wikipedia に記載されている.

⁶ $2^n - 1$ の形の素数をメルセンヌ数という.

⁷値は絶対値のみ意味があるが, $2N + 1$ を法とした等比数列であることが分かりやすいように, 負号を残してある.

(1.2.3)において、 $\alpha = \lambda\pi/(2N+1)$ とおくとき、その両辺のサイン因子がちょうどキャンセルする条件は、

$$2^n \lambda \equiv \pm \lambda \pmod{2N+1} \quad (1.3.1)$$

である。すなわち(1.3.1)が成立するような $n (\leq N)$ が存在すれば、等比数列のコサインの有限乗積は

$$\prod_{k=0}^{n-1} \cos\left(\frac{2^k \lambda \pi}{2N+1}\right) = \pm \frac{1}{2^n} \quad (1.3.2)$$

となって、これを(1.1.2)の分解に利用することができる。

$2N+1$ が素数の場合は、フェルマーの小定理により

$$2^{2N} \equiv 1 \pmod{2N+1} \quad (1.3.3)$$

だから、

$$(2^N - 1)(2^N + 1) \equiv 0 \pmod{2N+1} \quad (1.3.4)$$

である。したがって

$$2^N \equiv \pm 1 \pmod{2N+1} \quad (1.3.5)$$

を得る。ゆえに、 $n = N$ が(1.3.1)の1つの解である。もちろん、これがさらに分解可能かどうかについてはわからない。具体例を挙げておこう。

$N = 5, 2N+1 = 11$ の場合： $2^5 = 32 \equiv -1 \pmod{11}$ ； $\{1, 2, 4, -3, 5\}$ 。

$N = 6, 2N+1 = 13$ の場合： $2^6 = 64 \equiv -1 \pmod{13}$ ； $\{1, 2, 4, -5, 3, 6\}$ 。

$N = 9, N = 11, N = 14, N = 19$ についても同様である。

$N = 15, 2N+1 = 31$ の場合：分母がメルセンヌ数で、さらに3つの積に分解する（既述）。

$2N+1$ がフェルマー数でもメルセンヌ数でもなくてさらに分解する例は、 $N = 20, N = 21$ である。

$N = 20, 2N+1 = 41$ の場合： $2^{10} = 1024 \equiv -1 \pmod{41}$ 。

$$\{1, 2, 4, 8, 16, -9, -18, 5, 10, 20\} + \{3, 6, 12, -17, 7, 14, -13, 15, -11, 19\}.$$

$N = 21, 2N+1 = 43$ の場合： $2^7 = 128 \equiv -1 \pmod{43}$ 。

$$\{1, 2, 4, 8, 16, -11, 21\} + \{3, 6, 12, -19, 5, 10, 20\} + \{7, 14, -15, 13, -17, 9, 18\}.$$

$2N+1$ が合成数の場合は、オイラーの定理を使う。

その前にオイラーのファイ関数 $\varphi(n)$ について復習しておく。 $\varphi(n)$ は自然数 n 以下の n と互いに素な自然数の個数を表し、その具体的な値は素因数分解と次の3つの事実に基づいてすぐに計算できる：

(1) $\varphi(1) = 1$ 。

(2) 素数 p の冪乗 $n = p^k$ ($k \geq 1$)の場合は、 $\varphi(p^k) = p^k - p^{k-1}$ 。

(3) m と n が互いに素なら乗法的である、すなわち $\varphi(mn) = \varphi(m)\varphi(n)$ 。

次の和公式が成立する。

$$\sum_{d|n} \varphi(d) = n. \quad (1.3.6)$$

ただし和は n を整除するすべての自然数 ($d = 1$ を含む) にわたる。

オイラーの定理 a と n が互いに素ならば、

$$a^{\varphi(n)} \equiv 1 \pmod{n}. \quad (1.3.7)$$

オイラーの定理(1.3.7)により、

$$2^{\varphi(2N+1)} \equiv 1 \pmod{2N+1}. \quad (1.3.8)$$

ファイ関数の性質 (2) と (3) から明らかなように $\varphi(2N+1)$ は偶数だから,

$$2^{\varphi(2N+1)/2} \equiv \pm 1 \pmod{2N+1} \quad (1.3.9)$$

となる. すなわち, $2N+1$ が素数でなくても, 同じように分解可能なことがわかる. もちろんさらに分解可能か否かはわからない.

d を $2N+1$ の約数とすると, 和公式 (1.3.6) から (1 は約数ではないので両辺から $1 = \varphi(1)$ を差し引いておく),

$$2N = \sum_d \varphi(d). \quad (1.3.10)$$

ただし, 和は $2N+1$ のすべての約数にわたる. これからコサインの個数の分解公式がえられる:

$$N = \sum_d \varphi(d)/2. \quad (1.3.11)$$

具体例をあげておこう.

$N = 7$, $2N+1 = 15 = 3 \cdot 5$ の場合: $\varphi(15)/2 = 4$, $\varphi(5)/2 = 2$, $\varphi(3)/2 = 1$.

$$\{1, 2, 4, -7\} + \{3, 6\} + \{5\}.$$

$N = 10$, $2N+1 = 21 = 3 \cdot 7$ の場合: $\varphi(21)/2 = 6$, $\varphi(7)/2 = 3$, $\varphi(3)/2 = 1$.

$$\{1, 2, 4, 8, -5, -10\} + \{3, 6, -9\} + \{7\}.$$

$N = 12$, $2N+1 = 25 = 5^2$ の場合: $\varphi(25)/2 = 10$, $\varphi(5)/2 = 2$.

$$\{1, 2, 4, 8, -9, 7, -11, 3, 6, 12\} + \{5, 10\}.$$

$N = 13$, $2N+1 = 27 = 3^3$ の場合: $\varphi(27)/2 = 9$, $\varphi(9)/2 = 3$, $\varphi(3)/2 = 1$.

$$\{1, 2, 4, 8, -11, 5, 10, -7, 13\} + \{3, 6, 12\} + \{9\}.$$

$N = 17$, $2N+1 = 35 = 5 \cdot 7$ の場合: $\varphi(35)/2 = 12$, $\varphi(7)/2 = 3$, $\varphi(5)/2 = 2$.

$$\{1, 2, 4, 8, 16, -3, -6, -12, 11, -13, 9, -17\} + \{5, 10, -15\} + \{7, 14\}.$$

$N = 31$, $2N+1 = 63 = 3^2 \cdot 7$ の場合: $\varphi(63)/2 = 18$, $\varphi(21)/2 = 6$,

$\varphi(9)/2 = 3$, $\varphi(7)/2 = 3$, $\varphi(3)/2 = 1$. 第 1 項はさらに 3 つに分解する.

$$\begin{aligned} & \{1, 2, 4, 8, 16, -31\} + \{5, 10, 20, -23, 17, -29\} + \{11, 22, -19, 25, -13, -26\} \\ & + \{3, 6, 12, 24, -15, -30\} + \{7, 14, 28\} + \{9, 18, -27\} + \{21\}. \end{aligned}$$

さて, そこで前回考察した N が 2 の冪乗の場合を再考しよう.

$N = 16$, $n = 5$, $2N+1 = 33 = 3 \cdot 11$ の場合: $\varphi(33)/2 = 10$, $\varphi(11)/2 = 5$, $\varphi(3)/2 = 1$.

第 1 項はさらに 2 つに分解する.

$$\{1, 2, 4, 8, 16\} + \{5, 10, -15, 7, 14\} + \{3, 6, 12, -9, 15\} + \{11\}.$$

$N = 32$, $n = 6$, $2N+1 = 65 = 5 \cdot 13$ の場合: $\varphi(65)/2 = 24$, $\varphi(13)/2 = 6$, $\varphi(5)/2 = 2$.

第 1 項はさらに 4 つに分解する. 前回等差数列で書いた第 2 項は $\{5, 10, 20, -25, 15\}$ のように等比数列に書き換えられる.

$N = 64$, $n = 7$, $2N+1 = 129 = 3 \cdot 43$ の場合: $\varphi(129)/2 = 42$, $\varphi(43)/2 = 21$, $\varphi(3)/2 = 1$.

第 1 項はさらに 6 つに分解する. また新たな結果として, 前回 21 要素の等差数列で書いた第 2 項が, さらに 3 つの 7 要素の等比数列に分解することがわかる. すなわち第 2 項は, 既述の $N = 21$ の分解式の各要素を 3 倍して,

$$\{3, 6, 12, 24, 48, -33, 63\} + \{9, 18, 36, -57, 15, 30, 60\} + \{21, 42, -45, 39, -51, 27, 54\}$$

のようになる.

このように, すべて等比数列のコサインの有限乗積に分解することができた.

1.4 一般的考察

等差数列のコサインの有限乗積の公式 (1.1.2) は、すべて等比数列のコサインの有限乗積の公式 (1.3.2) の合併に一意的に (λ の値が異なっても同等な式は同一と見做す) 分解される. このことをもう少しきちんと定式化しておこう.

自然数 N と奇数 $\lambda_m (1 \leq \lambda_m \leq N)$ で特徴づけられる \mathbb{Z}_N の部分集合 $S(\lambda_m)$ を次のように導入する.

公比 2 の有限等比数列 $\{\lambda_m, 2\lambda_m, \dots, 2^{n-1}\lambda_m\}$ を考える. $2^n \lambda_m \equiv \pm \lambda_m \pmod{2N+1}$ (複号はどちらか一方) が成立する最小の n を n_m とする. 各 $2^k \lambda_m$ に対し, その絶対値が N を超えない範囲で $2N+1$ を法としてそれと合同な整数の絶対値 (0 になることはないので, $\in \mathbb{Z}_N$) を α_k とするとき,

$$S(\lambda_m) = \{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{n_m-1}\}. \quad (1.4.1)$$

$S(\lambda_m)$ は次の性質をもつ.

$S(\lambda_m) \cap S(\lambda_{m'}) \neq \emptyset$ ならば, $S(\lambda_m) = S(\lambda_{m'})$ である.

[証明] もしある l と l' について $2^l \lambda_m \equiv \pm 2^{l'} \lambda_{m'} \pmod{2N+1}$ (一般性を失うことなしに $n_{m'} \geq n_m$ とする) であったとすると, $k = l' - l$ とおけば $\lambda_m \equiv 2^k \tilde{\lambda}_{m'} \pmod{2N+1}$ と書き直せる. ここに $\tilde{\lambda}_{m'}$ は $\lambda_{m'}$ の前の符号がプラスのとき $\lambda_{m'}$, マイナスのとき $2N+1 - \lambda_{m'}$ とする. $2^{n_m} \lambda_m \equiv \pm \lambda_m \pmod{2N+1}$ を $2^{n_m} \lambda_m \equiv \tilde{\lambda}_m \pmod{2N+1}$ と書き直しておいて, この式を代入すると, $2^{n_m+k} \tilde{\lambda}_{m'} \equiv \tilde{\lambda}_m \pmod{2N+1}$ を得る. ゆえに $2^{n_m} \lambda_{m'} \equiv \tilde{\lambda}_{m'} \pmod{2N+1}$; つまり $n_{m'} = n_m$ である. したがって, $S(\lambda_{m'})$ は $S(\lambda_m)$ の要素を巡回置換しただけだから, 集合としては一致する. \square

このことから数学的帰納法により, \mathbb{Z}_N はいくつかの $S(\lambda_m)$ の単純和に一意的に分解されることがわかる. これは, 等差数列のコサインの有限乗積の公式が等差数列のコサインの有限乗積の公式に一意的に分解されることにほかならない.

等差数列のコサインの有限乗積の公式を等比数列のコサインの有限乗積の式の合併に分解するさい, 後者の有限乗積のコサインの個数の最大値は次の問題になる:

「奇数 $2N+1$ に対し, $2^n \equiv \pm 1 \pmod{2N+1}$ となるような最小の n (それを $\nu(N)$ とする) を求めよ。」

等比数列 $1, 2, \dots$ の第 $n+1$ 項 2^n を考えると, 少なくとも $2^n - (2N+1)$ が -1 にならなければならないから, $2^n \geq 2N$ である. 3 節の考察と合わせると,

$$\log_2(2N) \leq \nu(N) \leq \varphi(2N+1)/2 \quad (1.4.2)$$

であることが分かる. $\nu(N)$ の値を一般的に求める方法は知られているであろうか.

衝撃問題の高次元への拡張 (3)

Extensions to Higher Dimensions of Impulsive Loading Problem (3)

世戸 憲治⁸

Kenji SETO⁹

2.1 はじめに

前回の論文「衝撃問題の高次元への拡張 (2)」(数学・物理通信 3 巻 7 号 (2013.12)) で通常の波動方程式に従う一般次元の衝撃問題を解析してきた。ここでその最終結果だけをまとめておくと；通常の波動方程式に従う n 次元の無限に大きな物体中の 1 点に半径 1, 質量 μ の球殻状の重りを取り付け, この錘に初速度 v_0 を与えたとき物体中に発生する波動の動径座標 r , 時刻 t における変位を $U(r, t)$ としたとき, その解が

$$U(r, t) = \frac{\mu v_0}{2\pi} \frac{1}{r^\nu} \Re \left(\oint_{C_-} \frac{H_\nu^{(+)}(kr) e^{-ikt}}{[H_{\nu+1}^{(+)}(k) - \mu k H_\nu^{(+)}(k)] k} dk \right) \theta(t - r + 1) \quad (2.1.1)$$

で与えられることを示した。ここに, 次元数 n と ν の関係は

$$\nu = \frac{n}{2} - 1 \quad (2.1.2)$$

であり, $H_\nu^{(+)}(z)$ は Hankel 関数で¹⁰, Bessel 関数 $J_\nu(z)$, Neumann 関数 $N_\nu(z)$ と

$$H_\nu^{(+)}(z) = J_\nu(z) + iN_\nu(z) \quad (2.1.3)$$

の関係にある。また, 積分路 C_- は複素平面上で実軸に沿って $-\infty$ から ∞ まで積分したあと半径無限大の下半円に沿った閉積分路, さらに, \Re は実部を取ることを意味し, θ は単位階段関数である。ただし, この表示式が正しいと保証されるには, この積分の被積分関数の分母のゼロ点が複素上半面ではなく下半面のみに存在するということが条件となる。したがって, この積分は下半面上にある極の留数を拾うことで実行されるが, 一般の ν についてこれを実行することは大変難しいことであり, 前回の論文では $\nu = -1/2$ および $1/2$ の場合だけを扱った。

今回はこれに引き続き $\nu = 3/2$ の場合, すなわち 5 次元の衝撃問題を扱う。もちろんこれは現実の物理空間を離れたまったく数学的なものであるが, この解析方法は現実の 3 次元空間における弾性体の衝撃問題の解析と共通したところがあり, 今回はこの弾性体の衝撃問題にも焦点をあてた解析を行う。

⁸ 北海学園大学名誉教授

⁹ seto@pony.ocn.ne.jp

¹⁰ Hankel 関数は通常 $H_\nu^{(1)}(z)$, $H_\nu^{(2)}(z)$ と書かれるが, ここでは記法の便利さからこれらを $H_\nu^{(+)}(z)$, $H_\nu^{(-)}(z)$ と記すことにする。

2.2 5次元の衝撃問題

ここでは、(2.1.1) 式の $\nu = 3/2$ の場合、すなわち、 $n = 5$ の5次元衝撃問題のより具体的解を求める。次数が $3/2, 5/2$ の場合の Neumann 関数は、つぎのように初等関数で表される。

$$H_{3/2}^{(+)}(z) = -\sqrt{\frac{2}{\pi z}} \left(1 + \frac{i}{z}\right) e^{iz}, \quad H_{5/2}^{(+)}(z) = -\sqrt{\frac{2}{\pi z}} \left[i \left(\frac{3}{z^2} - 1 \right) + \frac{3}{z} \right] e^{iz}. \quad (2.2.1)$$

これを (2.1.1) 式に代入すると

$$U(r, t) = -\frac{\mu v_0}{2\pi} \frac{1}{r^2} \Re \left(\oint_{C_-} \frac{(k + \frac{i}{r}) e^{-ik(t-r+1)}}{\mu k^3 + (\mu + 1)ik^2 - 3k - 3i} dk \right) \theta(t - r + 1) \quad (2.2.2)$$

となる。この積分を実行するには被積分関数の極の位置、すなわち分母のゼロ点の位置を求める必要があるが、ここでは、次節との関係でこれを少し一般化した関数

$$F(k) \equiv \mu k^3 + (\mu + 1)ik^2 - ck - ci \quad (2.2.3)$$

のゼロ点を求めることにする。この節のためには $c = 3$ であるが、次節では $c = 2$ の場合が必要となるので、以下では一般に $c > 0$ としておく。

初めに、この関数のゼロ点はすべて複素下半面に存在することを証明する。まず、

$$k = -ik' \quad (2.2.4)$$

と変数変換し、

$$f(k') \equiv -iF(-ik') = \mu k'^3 - (\mu + 1)k'^2 + ck' - c \quad (2.2.5)$$

と、関数 $F(k)$ から関数 $f(k')$ に定義し直すと

$$f(0) = -c < 0, \quad f\left(\frac{\mu + 1}{\mu}\right) = \frac{c}{\mu} > 0 \quad (2.2.6)$$

となるので、関数 $f(k')$ は区間 $(0, (\mu + 1)/\mu)$ 内に少なくとも1個のゼロ点を有する。これを k'_0 とする。したがって、(2.2.3) 式の関数 $F(k)$ は $-ik'_0$ という負の純虚数のゼロ点を持つ。つぎに、この関数 $F(k)$ をこのゼロ点を用いて因数分解すると、

$$F(k) = (k + ik'_0) \left[\mu k^2 + (\mu + 1 - \mu k'_0)ik - \frac{c}{k'_0} \right] \quad (2.2.7)$$

となる。ここで、 k'_0 が (2.2.5) 式のゼロ点であることを用いた。これから $k = -ik'_0$ 以外のゼロ点は

$$k = -\frac{1}{2} \left(\frac{\mu + 1}{\mu} - k'_0 \right) i \pm \frac{1}{2} \sqrt{\frac{4c}{\mu k'_0} - \left(\frac{\mu + 1}{\mu} - k'_0 \right)^2} \quad (2.2.8)$$

と求められる。このルートの中が正の場合はゼロ点の虚数部は負、また、ルートの中が負の場合でもその絶対値は1項目のそれより小なので、やはり虚数部は負となる。これですべてのゼロ点が複素下半面に存在することが示された。

実際のゼロ点を正しく求めるには Cardano の解法に従う。(2.2.4) 式の k' からさらに

$$k' = k'' + \frac{\mu + 1}{3\mu} \quad (2.2.9)$$

と変数変換をすると、(2.2.5) 式は2次の項が消えて、

$$k''^3 - ak'' - b = 0 \quad (2.2.10)$$

となる。ここに,

$$a \equiv \frac{(\mu+1)^2 - 3c\mu}{3\mu^2}, \quad b \equiv \frac{2(\mu+1)^3 - 9c\mu(\mu+1) + 27c\mu^2}{(3\mu)^3} \quad (2.2.11)$$

と定義した。ここで, a の符号は後で重要な働きをするので, これを正しく定義しておく。まず, $c > 4/3$ として, a の μ に関するゼロ点を

$$\mu_1 \equiv \frac{1}{2}[3c - 2 - \sqrt{3c(3c-4)}], \quad \mu_2 \equiv \frac{1}{2}[3c - 2 + \sqrt{3c(3c-4)}] \quad (2.2.12)$$

と定義する。 a の符号 ϵ はこの μ_1, μ_2 を用いて

$$\epsilon \equiv \begin{cases} 0, & \mu = \mu_1, \text{ or } \mu = \mu_2 \\ 1, & \mu < \mu_1, \text{ or } \mu_2 < \mu \\ -1, & \mu_1 < \mu < \mu_2 \end{cases} \quad (2.2.13)$$

と定義しておく。一方, b の符号については詳細な計算は省くことにして要点のみを記す。まず, b の定義式 (2.2.11) の分子が μ の 3 次式になっているので, これは一般に極大点と極小点を持つ。極大点は常に $\mu < 0$ の側に存在するが, $c < 2/3$ のときは極小点も負の側に存在する。 $\mu = 0$ での値は $+2$ なので, このときは正の μ すべてで $b > 0$ となる。 $c > 2/3$ のときは, 極小点は $\mu > 0$ の側に存在するので, この極小値が正であれば正の μ すべてに対し $b > 0$ と言える。そのための条件式を求めてみると,

$$9(4c^2 + 5c + 1) > (6c + 5)\sqrt{36c^2 + 30c}$$

となる。この両辺を 2 乗し, 整理しなおすと

$$9c^2 - 20c - 27 < 0$$

となり, これから

$$(-0.9466\dots =) \frac{10 - \sqrt{343}}{9} < c < \frac{10 + \sqrt{343}}{9} (= 3.1689\dots)$$

となって, この論文で必要な $c = 3$, or 2 の場合は問題なく, 正の μ に対し $b > 0$ ということが証明される。つぎに, Cardano の解法にしたがって,

$$k'' = u + v \quad (2.2.14)$$

とおくと, (2.2.10) 式は

$$(u^3 + v^3 - b) + (u + v)(3uv - a) = 0 \quad (2.2.15)$$

となる。ここで, この式の 1 項目, 2 項目を, それぞれ, ゼロとおくと

$$u^3 + v^3 = b, \quad uv = a/3 \quad (2.2.16)$$

となり, この第 2 式を 3 乗して

$$u^3 v^3 = (a/3)^3 \quad (2.2.17)$$

とすると, u^3, v^3 は 2 次方程式

$$\xi^2 - b\xi + (a/3)^3 = 0 \quad (2.2.18)$$

の根として求められる。したがって,

$$u^3 = \frac{b}{2} + \sqrt{D}, \quad v^3 = \frac{b}{2} - \sqrt{D} \quad (2.2.19)$$

と求められる。ここに判別式 D は

$$D \equiv \left(\frac{b}{2}\right)^2 - \left(\frac{a}{3}\right)^3 \quad (2.2.20)$$

と定義した. これに (2.2.11) 式を代入し, μ の関数として求めると,

$$D = \frac{c}{27\mu^4} \left[\mu^3 + (2c+3)\mu^2 + (c^2 - 5c + 3)\mu + 1 - \frac{c}{4} \right] \quad (2.2.21)$$

となる. 以下, この符号を調べるための要点を記す. 分子は, b のときと同じく μ の 3 次式となるので, 前と同じ方法で解析できる. まず, この 3 次式で $\mu = 0$ とすると $1 - (c/4)$ となり, これは $c < 4$ であれば正となる. つぎに c の値が

$$c^2 - 5c + 3 < 0, \quad \text{すなわち} \quad (0.697 \dots =) \frac{5 - \sqrt{13}}{2} < c < \frac{5 + \sqrt{13}}{2} (= 4.302 \dots)$$

の範囲内にあるとき, この 3 次式の極小点は $\mu > 0$ の側に存在する. そこで, この極小値が正となる条件を求めると,

$$-2c^2 + 5 \cdot 27c + \frac{27^2}{4} > 2(c+27)\sqrt{c^2 + 27c}$$

となる. この式の左辺は

$$(-1.324 \dots =) \frac{27(5 - \sqrt{27})}{4} < c < \frac{27(5 + \sqrt{27})}{4} (= 68.824 \dots)$$

の範囲のとき正となるので, この両辺を 2 乗し整理しなおすと,

$$(8c - 27)^3 < 0, \quad \text{すなわち} \quad c < 27/8 (= 3.375)$$

となり, この論文で必要な $c = 3$, or 2 の場合はこの範囲に含まれる. したがって以下, この判別式 D は正の μ に対し $D > 0$ となるものとして扱うことができる.

(2.2.19) 式から u^3 は常に正となるが, v^3 の方は D に (2.2.20) 式を代入してわかるように a の符号と v^3 の符号は一致している. そこで v^3 は (2.2.13) 式の符号 ϵ を用いて,

$$v^3 = \epsilon \left| \frac{b}{2} - \sqrt{D} \right| \quad (2.2.22)$$

と書ける. ここで, $(b/2) \pm \sqrt{D}$ の絶対値の 3 乗根を

$$R_{(\pm)} \equiv \sqrt[3]{\left| \frac{b}{2} \pm \sqrt{D} \right|} \quad (2.2.23)$$

と定義しておく, (2.2.19) および (2.2.22) 式から 3 乗根をとった u, v は

$$u = R_{(+)}, \quad v = \epsilon R_{(-)} \quad (2.2.24)$$

と表わされる. ここで得られた u, v は 3 乗する前の (2.2.16) 第 2 式と少なくとも符号的には一致している. 他の解を求めるには 1 の 3 乗根の 1 つである $\omega = e^{2\pi i/3} = (-1 + \sqrt{3}i)/2$ を用い, これを何乗かしたものを u, v に掛けて作ることになるが, (2.2.16) 第 2 式を満たすには u に掛けるものと v に掛けるものの積は 1 とならなければならない. このことから (2.2.14) 式における k'' の 3 個の解は

$$k''_{\ell} = \omega^{\ell} R_{(+)} + \omega^{3-\ell} \epsilon R_{(-)}, \quad \ell = 0, 1, 2 \quad (2.2.25)$$

となる. さらに (2.2.9) 式, (2.2.4) 式と遡ると初めの k の 3 個の解は

$$k_{\ell} = -i \left(\omega^{\ell} R_{(+)} + \omega^{3-\ell} \epsilon R_{(-)} + \frac{\mu + 1}{3\mu} \right), \quad \ell = 0, 1, 2 \quad (2.2.26)$$

と求められる. これを実部 p_{ℓ} と虚部 q_{ℓ} に

$$k_{\ell} = p_{\ell} + iq_{\ell}, \quad \ell = 0, 1, 2 \quad (2.2.27)$$

と分解したとき、これらは、

$$\begin{aligned} p_0 &= 0, & q_0 &= -(R_{(+)} + \epsilon R_{(-)}) - \frac{\mu + 1}{3\mu} \\ p_1 &= \frac{\sqrt{3}}{2}(R_{(+)} - \epsilon R_{(-)}), & q_1 &= \frac{1}{2}(R_{(+)} + \epsilon R_{(-)}) - \frac{\mu + 1}{3\mu} \\ p_2 &= -\frac{\sqrt{3}}{2}(R_{(+)} - \epsilon R_{(-)}), & q_2 &= \frac{1}{2}(R_{(+)} + \epsilon R_{(-)}) - \frac{\mu + 1}{3\mu} \end{aligned} \quad (2.2.28)$$

となる。これから、 k_0 は純虚数であり、 k_1, k_2 の虚部は等しいが、実部の符号が逆になっていることがわかる。これら k_0, k_1, k_2 の虚部がすべて負になることは前に証明したとおりである。

以上の結果から、(2.2.2) 式の被積分関数の極はすべて複素平面の下半面に存在することになり、この積分は

$$U(r, t) = -\frac{v_0}{2\pi r^2} \Re \left(\oint_{C_-} \frac{(k + \frac{i}{r})e^{-ik(t-r+1)}}{(k - k_0)(k - k_1)(k - k_2)} dk \right) \theta(t - r + 1) \quad (2.2.29)$$

と書き直される。つぎに、この k 積分を実行するにあたって、 $k = k_0, k_1, k_2$ の各々の極における留数を計算するときに分母に現れる因子 $(k_0 - k_1)(k_0 - k_2)$, $(k_1 - k_0)(k_1 - k_2)$, $(k_2 - k_0)(k_2 - k_1)$ を計算しておく必要がある。これらをまとめて、

$$\prod_{j=0, \neq \ell}^2 (k_\ell - k_j) = \zeta_\ell + \eta_\ell i, \quad \ell = 0, 1, 2 \quad (2.2.30)$$

と、実部 ζ_ℓ , 虚部 η_ℓ に分解したとき、(2.2.27) 式を用いてこれらを書き下し、(2.2.28) 式から得られる $p_0 = 0$, $p_2 = -p_1$, $q_2 = q_1$ を用いると、

$$\begin{aligned} \zeta_0 &= -p_1^2 - (q_0 - q_1)^2, & \eta_0 &= 0, \\ \zeta_1 &= 2p_1^2, & \eta_1 &= -2p_1(q_0 - q_1), \\ \zeta_2 &= 2p_1^2, & \eta_2 &= 2p_1(q_0 - q_1) \end{aligned} \quad (2.2.31)$$

となる。これに (2.2.28) 式の p_ℓ, q_ℓ を代入すると煩雑な式になってしまう。以下の計算は、プログラム言語を用いて数値的に解析することを目的とし、無駄な計算は省くことにする。

最終的には (2.2.29) 式の留数計算をしたあと、全体の実部を求めることになるが、そのためには、(2.2.30) 式を極表示

$$\zeta_\ell + \eta_\ell i = \sqrt{\zeta_\ell^2 + \eta_\ell^2} e^{i\delta_\ell}, \quad \ell = 0, 1, 2 \quad (2.2.32)$$

とした方が便利である。ここに、偏角 δ_ℓ は

$$\delta_\ell = \arctan \left(\frac{\eta_\ell}{\zeta_\ell} \right) + \text{Sgn}(\eta_\ell) \pi \theta(-\zeta_\ell) \quad (2.2.33)$$

とする。この右辺 2 項目は、プログラム言語の \arctan は値域が $(-\pi/2, \pi/2)$ となる主値しか与えないので、実部の ζ_ℓ が負となる場合は、位相を π だけずらしてその符号を合わせるために必要となるものである。また、 η_ℓ の符号である $\text{Sgn}(\eta_\ell)$ は、必ずしも必要なものではないが、これを入れることで、 δ_ℓ が不連続になることを防ぐことができる。

以上で (2.2.29) 式の積分を実行する準備が調った。3 個の極 $k = k_0, k_1, k_2$ の留数を拾い、この積分路は負の周りなので、留数に $-2\pi i$ を掛けたものが積分値となり、あとは全体の実部をとると、

$$U(r, t) = \frac{v_0}{r^2} \sum_{\ell=0}^2 \frac{p_\ell \sin(p_\ell(t-r+1) + \delta_\ell) - (q_\ell + \frac{1}{r}) \cos(p_\ell(t-r+1) + \delta_\ell)}{\sqrt{\zeta_\ell^2 + \eta_\ell^2}} e^{q_\ell(t-r+1)} \theta(t-r+1) \quad (2.2.34)$$

あるいは、三角関数の合成をして、

$$U(r, t) = -\frac{v_0}{r^2} \sum_{\ell=0}^2 \sqrt{\frac{p_\ell^2 + (q_\ell + \frac{1}{r})^2}{\zeta_\ell^2 + \eta_\ell^2}} \cos(p_\ell(t-r+1) + \delta_\ell + \alpha_\ell) e^{q_\ell(t-r+1)} \theta(t-r+1) \quad (2.2.35)$$

という結果が得られる．ここに，偏角 α_ℓ は

$$\alpha_\ell = \arctan\left(\frac{p_\ell}{q_\ell + \frac{1}{r}}\right) + \text{Sgn}(p_\ell)\pi\theta(-q_\ell - \frac{1}{r}) \quad (2.2.36)$$

と定義した．なお，この (2.2.35) 式で ℓ に関する和は $\ell = 1$ としたときと $\ell = 2$ としたものは同じ値になることを注意する．

この (2.2.35) 式を見ても解の様子がどうなるか想像することは難しいが，以下の第 4 節でこの式に基づくグラフを表示する．

2.3 3次元弾性体の衝撃問題

2.3.1 方程式の導入とその解法

3次元弾性体のベクトル変位 \mathbf{U} に対する波動方程式は， v_ℓ , v_t をそれぞれ，縦波（粗密波），横波（剪断波）の伝播速度としたとき，

$$\partial_t^2 \mathbf{U} = v_\ell^2 \Delta \mathbf{U} + (v_\ell^2 - v_t^2) \nabla(\nabla \cdot \mathbf{U}) \quad (2.3.1)$$

と書ける．ここに Δ は 3次元 Laplacian, ∇ はナブラ演算子であり，また， v_ℓ , v_t は，弾性体の Young 率 E , 密度 ρ , Poisson 比 ν を用いて¹¹,

$$v_\ell = \sqrt{\frac{(1-\nu)E}{\rho(1+\nu)(1-2\nu)}}, \quad v_t = \sqrt{\frac{E}{2\rho(1+\nu)}} \quad (2.3.2)$$

と定義される．

この波動方程式を基にして，前論文と同じく，弾性体中に任意にとられた原点 O を中心として質量 m , 内半径 r_0 , 外半径 $r_0(1+\varepsilon)$ の球殻状の錘を取り付け，この球殻に外向き方向の速度 v_0 を与えたときの弾性体内に発生する波動を解析する．この場合の変位 \mathbf{U} は動径方向のみで，かつ球対称に起こるので動径方向の座標を r とし， $U(r, t)$ と書くことができ，波動方程式は

$$\partial_t^2 U(r, t) = v_\ell^2 \left[\partial_r^2 + \frac{2}{r} \partial_r - \frac{1}{(1-\nu)r^2} \right] U(r, t) \quad (2.3.3)$$

となる．ここで，Poisson 比 ν は，通常 $0 < \nu < 1/2$ の範囲の値をとることを注意しておく．この方程式を錘を取り付けた $r = r_0$ での境界条件，あるいは錘の運動方程式と言ってもよいが，

$$m \partial_t^2 U = 4\pi r_0^2 E \partial_r U|_{r=r_0} \quad (2.3.4)$$

の条件の基に解くことになる．

実際に解くまえに，使用される変数を無次元化しておく． r_0 を長さの単位， r_0 を縦波が進行する時間 r_0/v_ℓ を時間の単位として，それぞれ，1 とおく．この無次元化で，波動方程式 (2.3.3) は

$$\partial_t^2 U(r, t) = \left[\partial_r^2 + \frac{2}{r} \partial_r - \frac{1}{(1-\nu)r^2} \right] U(r, t) \quad (2.3.5)$$

となる．また，錘の質量 m に関しては， $\mu = mv_\ell^2/(4\pi r_0^3 E)$ と置くことにすると，条件式 (2.3.4) はつぎの式となる．

$$\mu \partial_t^2 U = \partial_r U|_{r=1}. \quad (2.3.6)$$

¹¹ここでは通常の表記法どおり，Poisson 比を ν と書いたが，もちろんこれは，(2.1.2) 式で定義されたものとは別ものであることを注意する．

波動方程式 (2.3.5) を解くにあたって、まず、変位 $U(r, t)$ を

$$U(r, t) = R(r) \sin(kt) \quad (2.3.7)$$

と変数分離形を仮定すると、動径方向の方程式は

$$\left[\frac{d^2}{dr^2} + \frac{2}{r} \frac{d}{dr} - \frac{1}{(1-\nu)r^2} + k^2 \right] R(r) = 0 \quad (2.3.8)$$

となる。この方程式の解は Bessel, Neumann 関数で与えられ、 A, B を任意定数として、

$$R(r) = \frac{1}{\sqrt{r}} [AJ_\lambda(kr) - BN_\lambda(kr)] \quad (2.3.9)$$

で与えられる。ここに、Bessel, Neumann 関数の次数 λ は

$$\lambda = \sqrt{\frac{5-\nu}{4(1-\nu)}} \quad (2.3.10)$$

で与えられる。これから Poisson 比 ν がゼロの場合でも $\lambda = \sqrt{5}/2$ となり、(2.3.1) 式右辺 2 項目が存在しない通常の波動方程式の場合 ($\lambda = 1/2$) とは違った結果になる。この大きな違いは、弾性体の場合は、空気や水と違って剪断力が存在するからである。また、 ν が $1/2$ 、すなわち変形に対し体積不変の場合は、 $\lambda = 3/2$ となる。

(2.3.7) (2.3.9) 式で与えられるここでの変位 $U(r, t)$ に境界条件 (2.3.6) 式を適用すると、定数 A, B の比が

$$A[kJ_{\lambda+1}(k) - (\lambda - \frac{1}{2} + \mu k^2)J_\lambda(k)] = B[kN_{\lambda+1}(k) - (\lambda - \frac{1}{2} + \mu k^2)N_\lambda(k)] \quad (2.3.11)$$

と決まる。これを踏まえて固有関数 $E(r, k)$ を

$$E(r, k) \equiv \frac{1}{\sqrt{r}} [A(k)J_\lambda(kr) - B(k)N_\lambda(kr)] \quad (2.3.12)$$

ここに、

$$A(k) \equiv kN_{\lambda+1}(k) - (\lambda - \frac{1}{2} + \mu k^2)N_\lambda(k), \quad B(k) \equiv kJ_{\lambda+1}(k) - (\lambda - \frac{1}{2} + \mu k^2)J_\lambda(k) \quad (2.3.13)$$

と定義する。もちろんこれは規格化されたものではない。

この固有関数を規格化するために、 $E(r, k), E(r, k')$ が満たす (2.3.8) 式の形の方程式を 2 本書いておき、それぞれ方程式に $r^2 E(r, k'), r^2 E(r, k)$ を掛けて辺々を引き算すると、

$$E(r, k)E(r, k')r^2 = -\frac{1}{k^2 - k'^2} \frac{d}{dr} \left[r^2 E(r, k') \frac{d}{dr} E(r, k) - r^2 E(r, k) \frac{d}{dr} E(r, k') \right] \quad (2.3.14)$$

を得る。ここで、前と同じく、

$$F(r, k) \equiv -\frac{d}{dr} E(r, k) \quad (2.3.15)$$

を定義しておく、この式は

$$E(r, k)E(r, k')r^2 = \frac{1}{k^2 - k'^2} \frac{d}{dr} \left[r^2 E(r, k') F(r, k) - r^2 E(r, k) F(r, k') \right] \quad (2.3.16)$$

となる。この式を r について 1 から ∞ まで積分すると

$$\int_1^\infty E(r, k)E(r, k')r^2 dr = \frac{1}{k^2 - k'^2} \left[r^2 E(r, k') F(r, k) - r^2 E(r, k) F(r, k') \right] \Big|_1^\infty \quad (2.3.17)$$

となる。ここで, Bessel, Neumann 関数に関する Lommel 公式を使うと,

$$E(1, k) = -\frac{2}{\pi} \quad (2.3.18)$$

となる。また, $F(r, k)$ は Bessel, Neumann 関数の微分公式を使うと

$$F(r, k) = kr^{-1/2} [A(k)J_{\lambda+1}(kr) - B(k)N_{\lambda+1}(kr)] - (\lambda - \frac{1}{2})r^{-3/2} [A(k)J_{\lambda}(kr) - B(k)N_{\lambda}(kr)] \quad (2.3.19)$$

となるので, これから

$$F(1, k) = \mu k^2 [A(k)J_{\lambda}(k) - B(k)N_{\lambda}(k)] = \mu k^2 E(1, k) = -\frac{2\mu k^2}{\pi}, \quad (2.3.20)$$

したがって, (2.3.17) 式の右辺で $r = 1$ としたものは

$$\frac{1}{k^2 - k'^2} \left[r^2 E(r, k') F(r, k) - r^2 E(r, k) F(r, k') \right] \Big|_{r=1} = \frac{4\mu}{\pi^2} \quad (2.3.21)$$

となる。

つぎに, $r \rightarrow \infty$ を見積もる。十分に大きな r を M と書くことにして, Bessel, Neumann 関数の漸近式を使うと,

$$E(M, k) = \frac{1}{M\sqrt{\pi k}} \left[(A(k) + B(k)) \cos(kM - \frac{1}{2}\lambda\pi) + (A(k) - B(k)) \sin(kM - \frac{1}{2}\lambda\pi) \right] \quad (2.3.22)$$

$$F(M, k) = \frac{k}{M\sqrt{\pi k}} \left[- (A(k) - B(k)) \cos(kM - \frac{1}{2}\lambda\pi) + (A(k) + B(k)) \sin(kM - \frac{1}{2}\lambda\pi) \right] \\ - \frac{\lambda - \frac{1}{2}}{M^2\sqrt{\pi k}} \left[(A(k) + B(k)) \cos(kM - \frac{1}{2}\lambda\pi) + (A(k) - B(k)) \sin(kM - \frac{1}{2}\lambda\pi) \right] \quad (2.3.23)$$

となるが, この $F(M, k)$ の式では, 2項目は1項目に比べ分母の M の次数が1だけ多いので, 2項目は無視することができる。あとは計算が長くなるので詳細は省略するが, $r \rightarrow \infty$ のときの (2.3.17) 式右辺を見積もると, デルタ関数に関する超関数公式

$$\lim_{M \rightarrow \infty} \frac{\sin(Mx)}{\pi x} = \delta(x), \quad \lim_{M \rightarrow \infty} \frac{\cos(Mx)}{\pi x} = 0 \quad (2.3.24)$$

を用いて,

$$\frac{1}{k^2 - k'^2} \left[r^2 E(r, k') F(r, k) - r^2 E(r, k) F(r, k') \right] \Big|_{r \rightarrow \infty} = \frac{1}{k} [A^2(k) + B^2(k)] \delta(k - k') \quad (2.3.25)$$

となる。ここで, $k, k' > 0$ として $\delta(k + k')$ に比例する項は除いた。

これまでの結果として, (2.3.17) 式の積分は (2.3.25) 式から (2.3.21) 式の分を差し引いて

$$\int_1^{\infty} E(r, k) E(r, k') r^2 dr = -\frac{4\mu}{\pi^2} + \frac{1}{k} [A^2(k) + B^2(k)] \delta(k - k') \quad (2.3.26)$$

となる。この式右辺の1項目は, ここで扱っている系が弾性体と $r = 1$ に付けた質量 μ の錘とが一体となったものであるために生じる項である。このような場合, 固有関数の直交性の式を作るには積分するときに, 重み関数

$$\rho_{\varepsilon}(r) = 1 + \mu \frac{\theta(1 + \varepsilon - r)}{\varepsilon} \quad (2.3.27)$$

を付ける必要がある。これを付けることによって, (2.3.18) 式を用いると (2.3.26) 式右辺の1項目が相殺され,

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_1^{\infty} \rho_{\varepsilon}(r) E(r, k) E(r, k') r^2 dr = \frac{1}{k} [A^2(k) + B^2(k)] \delta(k - k') \quad (2.3.28)$$

となる。これが固有関数の直交性を示す式となる。

最終的な解を構成するには、変位 $U(r, t)$ を、展開係数 $K(k)$ を用いて、この固有関数で展開し、

$$U(r, t) = \int_0^\infty K(k)E(r, k) \sin(kt) dk \quad (2.3.29)$$

とおく。ここで、大きさ ϵ の錘部分だけに初速度 v_0 を与えるという初期条件

$$\partial_t U(r, t)|_{t=0} = v_0 \theta(1 + \epsilon - r) \quad (2.3.30)$$

を課すと、

$$\int_0^\infty kK(k)E(r, k) dk = v_0 \theta(1 + \epsilon - r) \quad (2.3.31)$$

となり、この両辺に $\rho_\epsilon(r)E(r, k')r^2$ を掛け、 r 積分を実行すると固有関数の直交性 (2.3.28) 式が利用でき、展開係数 $K(k)$ が

$$K(k) = -\frac{2\mu v_0}{\pi[A^2(k) + B^2(k)]} \quad (2.3.32)$$

と決まり、これを (2.3.29) 式に戻すと、変位 $U(r, t)$ が

$$U(r, t) = -\frac{2\mu v_0}{\pi} \int_0^\infty \frac{E(r, k) \sin(kt)}{A^2(k) + B^2(k)} dk \quad (2.3.33)$$

と求められる。以下、この積分をいかに実行するかが問題となる。

初めに、この被積分関数の分母を因数分解し、 $E(r, k)$ の定義式 (2.3.12)、および Hankel 関数

$$H_\lambda^{(\pm)}(z) = J_\lambda(z) \pm iN_\lambda(z) \quad (2.3.34)$$

を用いて書き直すと、

$$\frac{E(r, k)}{A^2(k) + B^2(k)} = \frac{1}{2\sqrt{r}} \left(\frac{H_\lambda^{(+)}(kr)}{A(k) - iB(k)} + \frac{H_\lambda^{(-)}(kr)}{A(k) + iB(k)} \right) \quad (2.3.35)$$

となり、さらに $A(k)$, $B(k)$ の定義式 (2.3.13) より、

$$A(k) \pm iB(k) = \pm i[kH_{\lambda+1}^{(\mp)}(k) - (\lambda - \frac{1}{2} + \mu k^2)H_\lambda^{(\mp)}(k)] \quad (2.3.36)$$

となるので、この式は

$$\frac{E(r, k)}{A^2(k) + B^2(k)} = \frac{i}{2\sqrt{r}} \left[\frac{H_\lambda^{(+)}(kr)}{kH_{\lambda+1}^{(+)}(k) - (\lambda - \frac{1}{2} + \mu k^2)H_\lambda^{(+)}(k)} - \frac{H_\lambda^{(-)}(kr)}{kH_{\lambda+1}^{(-)}(k) - (\lambda - \frac{1}{2} + \mu k^2)H_\lambda^{(-)}(k)} \right] \quad (2.3.37)$$

となる。ここで、Hankel 関数に関する偶奇性

$$H_\lambda^{(\pm)}(-z) = -e^{\mp \lambda \pi i} H_\lambda^{(\mp)}(z) \quad (2.3.38)$$

を用いて、(2.3.37) 式右辺で k の符号を変えたとき、1 項目は符号を変えた 2 項目になり、また、2 項目は符号を変えた 1 項目になる。つまり、この式は k に付き奇関数であることがわかる。したがって、(2.3.33) 式の被積分関数はこれに $\sin(kt)$ が付くので k の偶関数になる。それゆえ、この積分範囲 $(0, \infty)$ を $(-\infty, \infty)$ として 2 で割ることが許される。さらに、(2.3.37) 式大括弧中の 2 項目は、1 項目の複素共役をとり符号を変えたものになっているので、実際には 1 項目の虚数部の 2 倍になっている。これらのことをまとめると、変位 $U(r, t)$ は

$$U(r, t) = \frac{\mu v_0}{\pi \sqrt{r}} \Im \int_{-\infty}^{\infty} \frac{H_\lambda^{(+)}(kr)}{kH_{\lambda+1}^{(+)}(k) - (\lambda - \frac{1}{2} + \mu k^2)H_\lambda^{(+)}(k)} \sin(kt) dk \quad (2.3.39)$$

となる．ここに、 \Im は虚数部をとることを意味するが、さらに、 $\sin(kt)$ を Euler 公式で分解してしまうと、

$$U(r, t) = -\frac{\mu v_0}{2\pi\sqrt{r}} \Re \int_{-\infty}^{\infty} \frac{H_{\lambda}^{(+)}(kr)(e^{ikt} - e^{-ikt})}{kH_{\lambda+1}^{(+)}(k) - (\lambda - \frac{1}{2} + \mu k^2)H_{\lambda}^{(+)}(k)} dk \quad (2.3.40)$$

という表式が得られる．ここに、 \Re は実部をとることを意味する．

さらにこの積分を複素積分に拡張し、この被積分関数が複素上半面に極を持たないと仮定すると、前回の論文と同じ論法で、Hankel 関数の $z \rightarrow \infty$ での漸近形

$$H_{\lambda}^{(+)}(z) \approx \sqrt{\frac{2}{\pi z}} e^{i(z - \frac{2\lambda+1}{4}\pi)} \quad (2.3.41)$$

を利用して、(2.3.40) 式の被積分関数のうち、 e^{ikt} に比例する項は消え、 e^{-ikt} に比例する項のうち $t-r+1 > 0$ の場合だけが生き残り、

$$U(r, t) = \frac{\mu v_0}{2\pi\sqrt{r}} \Re \left(\oint_{C_-} \frac{H_{\lambda}^{(+)}(kr)e^{-ikt}}{kH_{\lambda+1}^{(+)}(k) - (\lambda - \frac{1}{2} + \mu k^2)H_{\lambda}^{(+)}(k)} dk \right) \theta(t-r+1) \quad (2.3.42)$$

となることが証明される．ここに積分路 C_- は (2.1.1) 式におけるものと同じである．ただし、これはあくまでも被積分関数が複素上半面に極を持たないという仮定のもとに成り立つ．

2.3.2 Poisson 比が $\nu = 1/2$ の場合

一般の λ に対してこれ以上計算を続行することは大変難しいが、Poisson 比が $\nu = 1/2$ で、(2.3.10) 式から $\lambda = 3/2$ となる場合は具体的に積分を実行することができる．ただし、Poisson 比が $1/2$ というのは変形に対し体積不変な弾性体を意味し、(2.3.2) 式から縦波速度 v_{ℓ} が無限大になってしまう場合に相当する．したがって、物理的にはあり得ない弾性体ということになってしまうが、ここでは極限的に Poisson 比が $1/2$ に近い弾性体を考察するというで扱ってみる．この場合は (2.2.1) 式に示したように、Hankel 関数 $H_{3/2}^{(+)}(z)$ 、 $H_{5/2}^{(+)}(z)$ は初等関数で表わされるので、これを用いると (2.3.42) 式の $U(r, t)$ は

$$U(r, t) = -\frac{\mu v_0}{2\pi} \frac{1}{r} \Re \oint_{C_-} \frac{(k + \frac{i}{r})e^{-ik(t-r+1)}}{\mu k^3 + (\mu + 1)ik^2 - 2k - 2i} dk \theta(t-r+1) \quad (2.3.43)$$

となる．前節で扱った通常の波動方程式に従う 5 次元問題の (2.2.2) 式とこの式とを比べてみると、積分の前に付く係数は同じで、 $1/r^2$ が $1/r$ に、また、被積分関数の分母で $-3k - 3i$ の部分が $-2k - 2i$ に変わっただけで、前節の解法がそのまま踏襲できる．そのため前節ではこの部分を $-ck - ci$ として両方の場合に使える形で解析してきた．したがって、この場合の解は (2.2.3) 式以下で $c = 2$ としたものを採用し、変位 $U(r, t)$ に付く $1/r^2$ を $1/r$ に変えるだけで、(2.2.35) 式の解から、この場合の変位解 $U(r, t)$ は、

$$U(r, t) = -\frac{v_0}{r} \sum_{\ell=0}^2 \sqrt{\frac{p_{\ell}^2 + (q_{\ell} + \frac{1}{r})^2}{\zeta_{\ell}^2 + \eta_{\ell}^2}} \cos(p_{\ell}(t-r+1) + \delta_{\ell} + \alpha_{\ell}) e^{q_{\ell}(t-r+1)} \theta(t-r+1) \quad (2.3.44)$$

という結果になる．なお、 c の値が変わることで変更になるのは、(2.2.11) 式の a, b 、それに伴って、(2.2.13) 式の ϵ 、(2.2.21) 式の D 、(2.2.23) 式の $R_{(\pm)}$ 、(2.2.28) 式の p_{ℓ}, q_{ℓ} 、(2.2.31) 式の $\zeta_{\ell}, \eta_{\ell}$ であることを注意する．

2.4 数値計算によるグラフ表示

通常の波動方程式に従う 5 次元衝撃問題の解 (2.2.35) 式、および、3 次元弾性体衝撃問題の解 (2.3.44) 式を見て判断できることは、波動が伝播していない領域 $t-r+1 < 0$ では変位がゼロとなる当然の事実と、指数関

数および三角関数の存在から波動は減衰振動することくらいではないか。これ以上の解の振舞いを判断することは極めて難しい。そこで、これらの変位を数値的に求め、グラフとして以下に示す。これらのグラフは、水平右方向に r 軸、斜め上方向に t 軸、上方向に変位 U をとって立体的に描いたものである。

初めに、(2.2.35) 式に基づき、数値計算したものを図 1, 図 2 に示す。これらは、それぞれ、 $\mu = 1, 4$ に対応する。 μ の値が小さいと初めに与えられるエネルギーが小さいためすぐに減衰してしまうが、 μ の値が大きくなるにつれその振動は激しくなる。この振動は文字通り 5 次元的に伝播するので、時間がたつとどの場所でも消えてしまい元の位置に復することになる。

つぎの図 3, 図 4 は 3 次元弾性体の衝撃問題の解 (2.3.44) 式に基づくもので、これらはそれぞれ、 $\mu = 1, 4$ に対応している。これらの図は、図 1, 2 と似てはいるが、(2.2.35) 式で $1/r^2$ となっていたところが、(2.3.44) 式では $1/r$ となっているので前の図と比べるとはるかに減衰が少なく、大きく振動している様子がわかる。

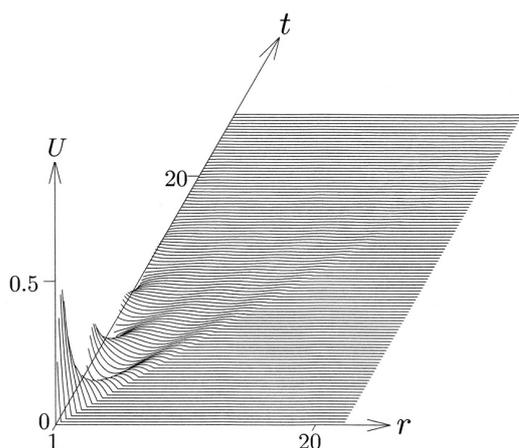


図 1 5次元モデル $\mu = 1$

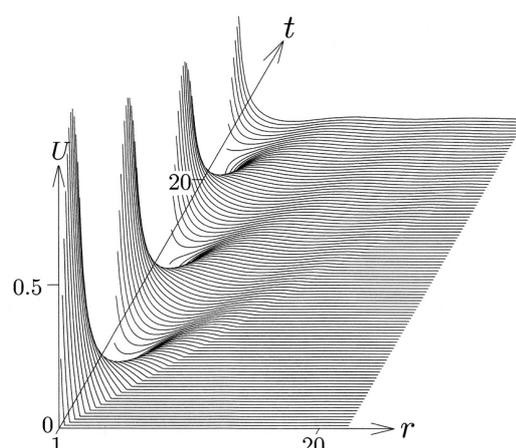


図 2 5次元モデル $\mu = 4$

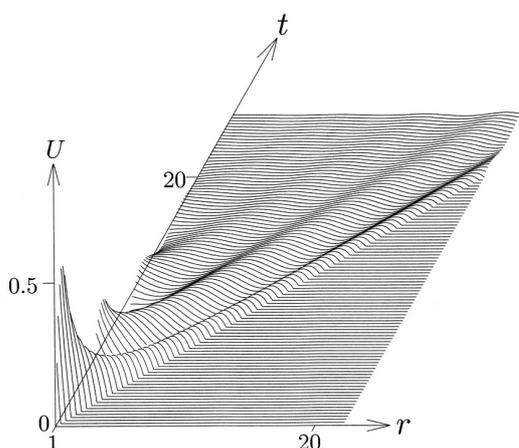


図 3 3次元弾性体モデル $\mu = 1$

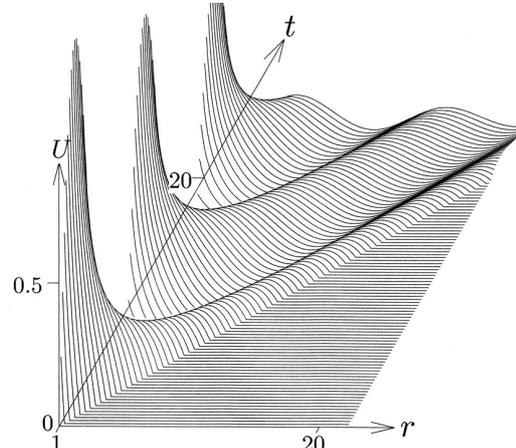


図 4 3次元弾性体モデル $\mu = 4$

2.5 おわりに

今回の論文は 3 次方程式を解くことが主な仕事になってしまった。3 次方程式の Cardano 解法は知っているが、パラメータ付きで完全な形の解を求めることは、非常に煩雑な計算を強いられ、これほど大変なもの

は思ってもいなかった。これをさらに延長して行くと、7次元の衝撃問題で、 $\nu = 5/2$ のときは、(2.2.1) 式の $H_{5/2}^{(+)}(z)$ および、

$$H_{7/2}^{(+)}(z) = -\sqrt{\frac{2}{\pi z}} \left[i \left(\frac{15}{z^3} - \frac{6}{z} \right) + \left(\frac{15}{z^2} - 1 \right) \right] e^{iz} \quad (2.5.1)$$

を用いて (2.1.1) 式に代入すると

$$U(r, t) = \frac{\mu v_0}{2\pi} \frac{1}{r^3} \Re \oint_{C_-} \frac{\left(\frac{3}{r^2} - k^2 - 3i \frac{k}{r} \right) e^{-ik(t-r+1)}}{\mu k^4 + (3\mu + 1)ik^3 - 3(\mu + 2)k^2 - 15ik + 15} dk \theta(t - r + 1) \quad (2.5.2)$$

となって、こんどは4次方程式を解くことになる。これも Ferrari の解法が知られているのでやってできなくはないであろうが非常な困難が予想される。それから先の一般5次以上の代数方程式は解析的解法が存在しないのでこのような解法はそこであってしまふ。例えて言うと、このような計算を続けることは泥沼にはまってしまうようなもので、あるいは、今回の計算ですでに泥沼にはまっているのかもしれない。数式は美しくなければならぬという心情は持っているつもりであるが、今回の計算でなんと汚い計算を強いられることかと思ひ知らされた。この続きはもうやめにしよう。

謝辞 この稿を書くにあたり、京都大学名誉教授の中西襄先生にご精読をいただき、特に2ページに記した3次式のゼロ点がすべて複素下半面に存在することの証明は先生から教えていただいたものです。ここに、謹んで感謝いたします。

四元数と空間回転 6

— Euler 角による回転の表現 —

The Quaternions and Rotations 6

矢野 忠¹²
Tadashi YANO¹³

3.1 はじめに

物理学を学んだことのある人々にとっては空間回転といえば Euler 角による表し方だと思っている人も多い。それにもかかわらず、Euler 角で表した空間回転を今まで取り扱わなかった。

これは四元数による回転の表現や Rodrigues の回転の表現とは基本的に違っていたためであるが、四元数から離れるが、それでも空間回転といえば Euler 角による回転の表現が重要である。

それで今回はそれを取り上げよう。

まず、回転の表現の仕方としてはつぎの 2 つの方法があることを思い出しておこう。

1. 回転軸の方向を指定して、その軸のまわりの回転角で表す
2. Euler 角で回転を表す

四元数による回転や Rodrigues の回転公式は 1 の方法によるものであり、これから述べる Euler 角による回転の表現は 2 の方法によるものである。第 3.2 節では回転の自由度（またはフリーなパラメーター）の数について述べる。第 3.3 節で Euler 角を用いた回転について説明をする。第 3.4 節では回転行列の満たす条件について述べる。

3.2 回転の自由度

第 1 の方法での回転の記述には 3 つのパラメーター（または自由度）が必要であった。すなわち、回転軸の方向を示すパラメーター 2 つとその軸のまわりの基準線からの回転角度のあわせて 3 つである。

それから考えると回転の記述のためには 3 つのパラメーターがあれば十分だと考えられる。この点を別の観点からもう一度考えてみよう¹⁴。

古典力学で扱われる剛体の運動はその並進運動と回転運動に分けられる。並進の自由度を無視して、いま剛体の回転運動だけに焦点をあてることにすれば、回転を記述するためにはその剛体のある基準点を原点にした

¹²元愛媛大学工学部

¹³yanotad@earth.ocn.ne.jp

¹⁴このエッセイは主として [1] によっている。しかし、議論のしかたを [1] とは変えてある。

剛体に固定された $x'y'z'$ 座標系（以後、回転座標系という）とその剛体とは独立に空間に静止した、同じ点を原点とする xyz 座標系（以後、静止座標系という）を考える。

剛体に固定された $x'y'z'$ 座標系と空間の xyz 静止座標系は時刻 $t = 0$ で座標系が完全に一致しているとする。時間の経過とともに剛体が回転をするので剛体に固定された $x'y'z'$ 座標系は静止座標系に対して回転を行う。このとき原点はどちらの座標系にも共通である。

ここで、以後の議論を簡単にするために上の 2 つの座標系でつぎの記法を採用しよう。

すなわち、 x, y, z をつぎのように

$$x_1 = x, \quad x_2 = y, \quad x_3 = z \quad (3.2.1)$$

と添字を用いて表す。同じことを x', y', z' について行えば

$$x'_1 = x', \quad x'_2 = y', \quad x'_3 = z' \quad (3.2.2)$$

と表される。

ところで、剛体の回転はいくつの自由度（パラメーター）をもつのであろうか。回転の様子を知るには回転する座標系の座標軸が静止座標系の座標軸となす角の方向余弦がわかればよい¹⁵。

静止座標系の 3 つの座標軸の方向の基底単位ベクトルを図 3.1 のように $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$ とし、回転座標系の 3 つの座標軸の方向の基底単位ベクトルを $(\mathbf{e}'_1, \mathbf{e}'_2, \mathbf{e}'_3)$ とする。回転の様子を知るには回転座標系の $(\mathbf{e}'_1, \mathbf{e}'_2, \mathbf{e}'_3)$ が

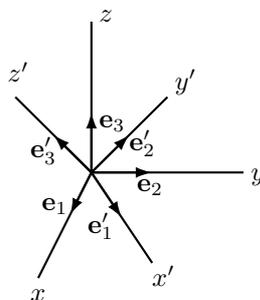


図 3.1: 静止座標系と回転座標系の基底単位ベクトル

静止座標系の $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$ でどのように表されるかがわかればよい。

このときもちろん $(\mathbf{e}'_1, \mathbf{e}'_2, \mathbf{e}'_3)$ は $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$ の 1 次結合で表されるから、つぎのように表される。

$$\mathbf{e}'_1 = a_{11}\mathbf{e}_1 + a_{12}\mathbf{e}_2 + a_{13}\mathbf{e}_3 \quad (3.2.3)$$

$$\mathbf{e}'_2 = a_{21}\mathbf{e}_1 + a_{22}\mathbf{e}_2 + a_{23}\mathbf{e}_3 \quad (3.2.4)$$

$$\mathbf{e}'_3 = a_{31}\mathbf{e}_1 + a_{32}\mathbf{e}_2 + a_{33}\mathbf{e}_3 \quad (3.2.5)$$

ここで、 $a_{11}, a_{12}, \dots, a_{33}$ は未定の係数である¹⁶。

これらの係数が決まれば回転の様子がわかるのだが、これらの係数をどうやって決めるのだろうか。それには静止座標系と回転座標系のそれぞれの基底単位ベクトルの規格直交性を用いる。すなわち、静止座標系においては

$$\mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{e}_1 = \mathbf{e}_2 \cdot \mathbf{e}_2 = \mathbf{e}_3 \cdot \mathbf{e}_3 = 1 \quad (3.2.6)$$

$$\mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{e}_2 = \mathbf{e}_2 \cdot \mathbf{e}_3 = \mathbf{e}_3 \cdot \mathbf{e}_1 = 0 \quad (3.2.7)$$

¹⁵方向余弦は (3.2.11) で定義される。

¹⁶添字を用いて式中の記号を表せば、和の記号 \sum やアインシュタインの和の規約を用いることができる。ここではそれらに立ち入らない。たとえば、[1] を参照せよ

が成り立っている。同様に回転座標系においても

$$\mathbf{e}'_1 \cdot \mathbf{e}'_1 = \mathbf{e}'_2 \cdot \mathbf{e}'_2 = \mathbf{e}'_3 \cdot \mathbf{e}'_3 = 1 \quad (3.2.8)$$

$$\mathbf{e}'_1 \cdot \mathbf{e}'_2 = \mathbf{e}'_2 \cdot \mathbf{e}'_3 = \mathbf{e}'_3 \cdot \mathbf{e}'_1 = 0 \quad (3.2.9)$$

が成り立つ。

実際には $a_{11}, a_{12}, \dots, a_{33}$ は (3.2.6), (3.2.7) を用いれば決めることができる。これらの係数が求まれば、その係数の意味も分かってくる。

いま、たとえば \mathbf{e}'_1 と \mathbf{e}_1 , \mathbf{e}'_1 と \mathbf{e}_2 , \mathbf{e}'_1 と \mathbf{e}_3 とのスカラー積をとれば、

$$a_{11} = \mathbf{e}'_1 \cdot \mathbf{e}_1, \quad a_{12} = \mathbf{e}'_1 \cdot \mathbf{e}_2, \quad a_{13} = \mathbf{e}'_1 \cdot \mathbf{e}_3$$

が得られる。同様に

$$a_{21} = \mathbf{e}'_2 \cdot \mathbf{e}_1, \quad a_{22} = \mathbf{e}'_2 \cdot \mathbf{e}_2, \quad a_{23} = \mathbf{e}'_2 \cdot \mathbf{e}_3$$

$$a_{31} = \mathbf{e}'_3 \cdot \mathbf{e}_1, \quad a_{32} = \mathbf{e}'_3 \cdot \mathbf{e}_2, \quad a_{33} = \mathbf{e}'_3 \cdot \mathbf{e}_3$$

が得られる。

$$a_{11}, a_{12}, \dots, a_{33} \quad (3.2.10)$$

を一般に a_{ij} と表せば, a_{ij} の最初の添字 i は $x'_1 x'_2 x'_3$ 座標系の x'_i 軸を表し, 後の添字 j は $x_1 x_2 x_3$ 座標系の x_j 軸を表している。

x'_i 軸と x_j 軸の間のなす角を θ_{ij} とすれば, 方向余弦は $\cos \theta_{ij}$ で定義される。この方向余弦を用いれば前に決定した係数 a_{ij} は

$$a_{ij} = \mathbf{e}'_i \cdot \mathbf{e}_j = \cos \theta_{ij} \quad (3.2.11)$$

で表される。係数 a_{ij} の求め方からもわかるように, 方向余弦はそれぞれの座標系の座標軸にそった単位ベクトルのスカラー積で表される。

空間内にベクトル \mathbf{r} があるとき $x_1 x_2 x_3$ 座標系では

$$\mathbf{r} = x_1 \mathbf{e}_1 + x_2 \mathbf{e}_2 + x_3 \mathbf{e}_3 \quad (3.2.12)$$

と表される。この同じベクトル \mathbf{r} を $x'_1 x'_2 x'_3$ 座標系では

$$\mathbf{r} = x'_1 \mathbf{e}'_1 + x'_2 \mathbf{e}'_2 + x'_3 \mathbf{e}'_3 \quad (3.2.13)$$

と表される。したがって

$$x'_1 = \mathbf{r} \cdot \mathbf{e}'_1 = a_{11} x_1 + a_{12} x_2 + a_{13} x_3 \quad (3.2.14)$$

$$x'_2 = \mathbf{r} \cdot \mathbf{e}'_2 = a_{21} x_1 + a_{22} x_2 + a_{23} x_3 \quad (3.2.15)$$

$$x'_3 = \mathbf{r} \cdot \mathbf{e}'_3 = a_{31} x_1 + a_{32} x_2 + a_{33} x_3 \quad (3.2.16)$$

となる。

いま (3.2.3)-(3.2.5) を $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ について解けば

$$\mathbf{e}_1 = a_{11} \mathbf{e}'_1 + a_{21} \mathbf{e}'_2 + a_{31} \mathbf{e}'_3 \quad (3.2.17)$$

$$\mathbf{e}_2 = a_{12} \mathbf{e}'_1 + a_{22} \mathbf{e}'_2 + a_{32} \mathbf{e}'_3 \quad (3.2.18)$$

$$\mathbf{e}_3 = a_{13} \mathbf{e}'_1 + a_{23} \mathbf{e}'_2 + a_{33} \mathbf{e}'_3 \quad (3.2.19)$$

となる (この式の導出は付録 1 に示す)。

$\mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{e}_1 = \mathbf{e}_2 \cdot \mathbf{e}_2 = \mathbf{e}_3 \cdot \mathbf{e}_3 = 1$ や $\mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{e}_2 = \mathbf{e}_2 \cdot \mathbf{e}_3 = \mathbf{e}_3 \cdot \mathbf{e}_1 = 0$ を (3.2.17)-(3.2.19) と (3.2.8),(3.2.9) を用いて計算すれば,

$$a_{11}^2 + a_{21}^2 + a_{31}^2 = a_{12}^2 + a_{22}^2 + a_{32}^2 = a_{13}^2 + a_{23}^2 + a_{33}^2 = 1 \quad (3.2.20)$$

$$a_{11}a_{12} + a_{21}a_{22} + a_{31}a_{32} = a_{12}a_{13} + a_{22}a_{23} + a_{32}a_{33} = a_{13}a_{11} + a_{23}a_{21} + a_{33}a_{31} = 0 \quad (3.2.21)$$

の 6 つの条件が得られる (この条件の導出は付録 2 に示す) .

はじめに回転運動の自由度として見かけは 9 つの未定係数 $a_{11}, a_{12}, \dots, a_{33}$ があるように思えたが, その 9 つ全部が独立ではなく, 条件式が 6 つ存在しているので, 独立な回転の自由度 (またはパラメーター) の数は 3 つであることがわかった.

これは前に回転を表現する方法として回転軸の方向を 2 つのパラメーターで指定し, かつその軸のまわりの回転角とで全体が 3 つの自由度 (またはパラメーター) で表されたことと一致している.

さて, 次節でこの 3 つのパラメーターをどのように表すかについて, そのとり方の一つとしてよく知られている, 3 つの Euler (オイラー) 角について説明をしよう.

3.3 Euler 角による空間回転

Euler 角による回転は引き続いた 3 つの軸のまわりの回転で表される¹⁷. このときに 3 つの座標軸は続いて同じ回転軸にとることはできない. もし同じ軸の回転を引き続いてとれば, それは二つの軸のまわりの回転とはみなされないからである.

どういう座標軸のまわりの 3 つの回転をとるかによって 12 通りの可能性があるが, 慣用としてよく使われるものはつぎの 3 種類である¹⁸.

第 1 の軸の選択法ははじめ z 軸のまわりに回転し, 続いて x 軸のまわりに回転し, 最後にまた z 軸のまわりに回転する. これを x 規約とよぶ. これは天体力学と応用力学または固体物理学等で用いられる.

第 2 の軸の選択法は第 1 の場合とは 2 つ目の軸の選択が x 軸ではなく, y 軸をとることだけが違っている. これを y 規約とよぶ. これは量子力学と核物理学または素粒子物理学等でよく用いられる.

第 3 の軸の選択法ははじめ x 軸のまわりに回転し, 続いて y 軸のまわりに回転をし, 最後に z 軸にまわりに回転をする. これを xyz 規約とよぶ. これは飛行機や人工衛星等の機体の姿勢制御等のときによく用いられる.

ここでは [1] にしたがって, x 規約について Euler 角を定義し, それによる空間回転について述べよう.

最初の座標軸 xyz を z 軸のまわりに角度 ϕ だけ反時計回りに回転させる. そのとき z 軸は変わらないが, 回転後の新しい座標軸を XYZ 軸としよう. ここで $Z = z$ 軸である. だから, 座標軸を XYz と表してもよい (図 3.2 参照). つぎに新しい座標軸 X のまわりに θ だけ反時計まわりに回転させる. このとき X 軸は変わらないが, 新しい座標軸を $X'Y'Z'$ 軸としよう. ここで $X' = X$ 軸である. だから座標軸は $XY'Z'$ と表してもよい (図 3.3 参照). 最後に Z' 軸のまわりに ψ だけ反時計方向に回転させる. こうして得られた新しい座標軸を $x'y'z'$ 軸としよう. ここで, $z' = Z'$ 軸である. だから座標軸は $x'y'Z'$ と表してもよい (図 3.4 参照).

ここで指定した 3 つの角 ϕ, θ, ψ で静止座標系 xyz に対して回転後の座標系 $x'y'z'$ の向きを決めることができる¹⁹.

ここで指定したように 3 つの回転のどの一つも座標系のある軸のまわりの回転であるから, それぞれは平面の回転を表している.

¹⁷以下では回転は受動的にとられている. もし能動的な回転に変えたいときには ϕ, θ, ψ を $-\phi, -\theta, -\psi$ と置き換えればよい.

¹⁸この節では添字をつけない記法を用いている. 読者を混乱させるかもしれない.

¹⁹このエッセイで Euler 角を表す記号として ϕ, θ, ψ をとる理由は付録 3 を見よ.

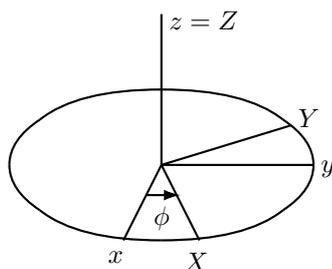


図 3.2: Euler 角による回転 1

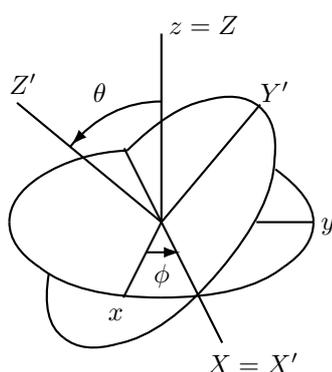


図 3.3: Euler 角による回転 2

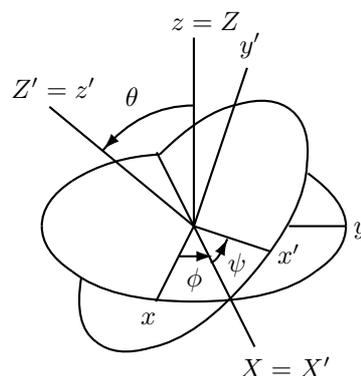


図 3.4: Euler 角による回転 3

ところで、 z 軸のまわりの ϕ の回転は

$$D = \begin{pmatrix} \cos \phi & \sin \phi & 0 \\ -\sin \phi & \cos \phi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (3.3.1)$$

で表される。また X 軸のまわりの θ の回転は

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta & \sin \theta \\ 0 & -\sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \quad (3.3.2)$$

と表される。最後の Z' 軸のまわりの ψ の回転は

$$B = \begin{pmatrix} \cos \psi & \sin \psi & 0 \\ -\sin \psi & \cos \psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (3.3.3)$$

と表される。全体の回転はこの 3 つの回転を続けて行うから最初の列行列 $(x \ y \ z)^t$ を x と表し、2 番目の列行列 $(X \ Y \ Z)^t$ を X と表し、3 番目の列行列 $(X' \ Y' \ Z')^t$ を X' と表し、最後の列行列 $(x' \ y' \ z')^t$ を x' と表せば²⁰、はじめの行列 D による回転は

$$X = Dx \quad (3.3.4)$$

²⁰ここで、たとえば $(x \ y \ z)^t$ は $(x \ y \ z)$ の転置、すなわち、列ベクトルを表す。

と表され、2番目の回転は

$$X' = CX \quad (3.3.5)$$

と表され、3番目の回転は

$$x' = BX' \quad (3.3.6)$$

と表される.

ところで x を x' に変換する行列を A で

$$x' = Ax \quad (3.3.7)$$

と表せば、(3.3.4),(3.3.5),(3.3.6) によって

$$A = BCD \quad (3.3.8)$$

となる. したがって

$$A = \begin{pmatrix} \cos \psi \cos \phi - \sin \psi \cos \theta \sin \phi & \cos \psi \sin \phi + \sin \psi \cos \theta \cos \phi & \sin \psi \sin \theta \\ -\sin \psi \cos \phi - \cos \psi \cos \theta \sin \phi & -\sin \psi \sin \phi + \cos \psi \cos \theta \cos \phi & \cos \psi \sin \theta \\ \sin \theta \sin \phi & -\sin \theta \cos \phi & \cos \theta \end{pmatrix} \quad (3.3.9)$$

となる (計算は付録4に述べる).

また、ここでは証明をしなかったが、 A は直交行列であり、転置行列 A^t は A の逆行列であり、

$$AA^t = A^tA = E$$

が成り立つ. そこで E は単位行列である.

3.4 回転行列の条件

Euler 角で回転を表せば、その行列は (3.3.9) で表せることを 3.3 節の最後に見た. ところでこの行列はある特殊な性質をもっている. それはその行列の行列式の値が 1 になるということである.

そのことをこの節では確認しよう. そのためにももちろん (3.3.9) の行列式を計算してもよい²¹. しかし、ここではもっと簡単な方法を考えよう.

それは行列 PQ の行列式はそれぞれの行列 P と Q の行列式の積に等しいという行列式の性質を使うことである. すなわち、 $|PQ| = |P||Q|$ であることを用いて、この回転の行列 (3.3.9) の行列式が 1 であることを示すことにしよう.

前節の行列の積 $B(CD)$ の行列式は

$$|B(CD)| = |B||CD| = |B||C||D| = 1 \quad (3.4.1)$$

となる. なぜなら、それぞれの行列から直ちに $|B| = 1$, $|C| = 1$, $|D| = 1$ であることがわかるから.

また、これは行列 B, C, D の回転角 ψ, θ, ϕ が無限小の角として、回転角の 2 次以上の積をすべて無視すれば

$$B = \begin{pmatrix} 1 & \psi & 0 \\ -\psi & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (3.4.2)$$

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \theta \\ 0 & -\theta & 1 \end{pmatrix} \quad (3.4.3)$$

²¹行列 A からその行列式が 1 であることを示すことができる. その計算を付録5で示す.

$$\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 1 & \phi & 0 \\ -\phi & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (3.4.4)$$

となる。そこで、このとき BCD の積を求めるが、このときやはり回転角の 2 次以上の積を無視すれば

$$\begin{aligned} \mathbf{BCD} &= \begin{pmatrix} 1 & \phi + \psi & 0 \\ -(\phi + \psi) & 1 & \theta \\ 0 & -\theta & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & \phi + \psi & 0 \\ -(\phi + \psi) & 0 & \theta \\ 0 & -\theta & 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

と表せる。ここで行列

$$\mathbf{E} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (3.4.5)$$

の行列式の値は 1 であることが直ぐにわかる。また行列

$$\begin{pmatrix} 0 & \phi + \psi & 0 \\ -(\phi + \psi) & 0 & \theta \\ 0 & -\theta & 0 \end{pmatrix} \quad (3.4.6)$$

の行列式の値は 0 であることも直ぐにわかる。

したがって、無限小の角度の回転の場合もその行列式の値は 1 であることがわかる。

このようなその行列式の値が 1 であるような回転を固有回転といい、空間回転においては恒等回転（まったく回転をしないとき）から連続的に変化する回転は必ずその回転行列の行列式の値は +1 である。

それに反して回転行列の行列式の値が -1 となる、回転はどこかに座標軸の反転の操作が入っており、このような回転は非固有な回転と言われる。そしてこのような回転は恒等回転からは連続的には変化ができない。

今まで扱ってきた回転はいずれも空間回転であり、それは固有回転に限られていたのである。

3.5 おわりに

先回までのシリーズ「四元数と空間回転 1-5」 [2]- [6] において、ベクトルなどの空間回転について多くのことを述べてきたが、最後のテーマとして残っていた、Euler 角による空間回転の表現について今回ようやく述べることができた。

このエッセイで四元数と空間回転についての一連のシリーズを終える。しかし、四元数については球面線形補間の話がまだ残っている。

3.6 付録

3.6.1 付録 1 (3.2.17)-(3.2.19) の導出

$$\mathbf{e}'_1 = a_{11}\mathbf{e}_1 + a_{12}\mathbf{e}_2 + a_{13}\mathbf{e}_3 \quad (3.2.3)$$

$$\mathbf{e}'_2 = a_{21}\mathbf{e}_1 + a_{22}\mathbf{e}_2 + a_{23}\mathbf{e}_3 \quad (3.2.4)$$

$$\mathbf{e}'_3 = a_{31}\mathbf{e}_1 + a_{32}\mathbf{e}_2 + a_{33}\mathbf{e}_3 \quad (3.2.5)$$

を逆に $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ について解いて, (3.2.17)-(3.2.19) が得られることは, (3.2.3)-(3.2.5) を行列で

$$\begin{pmatrix} \mathbf{e}'_1 \\ \mathbf{e}'_2 \\ \mathbf{e}'_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{e}_1 \\ \mathbf{e}_2 \\ \mathbf{e}_3 \end{pmatrix} \quad (3.6.1)$$

と表し, この係数行列を

$$\mathbf{O} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

と表して, \mathbf{O} の転置行列 \mathbf{O}^t を (3.6.1) に左側からかければ, 係数行列 \mathbf{O} は直交行列であるから

$$\mathbf{O}^t \mathbf{O} = \mathbf{E}, \quad \mathbf{E}: \text{単位行列}$$

が成り立つので

$$\begin{pmatrix} \mathbf{e}_1 \\ \mathbf{e}_2 \\ \mathbf{e}_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{e}'_1 \\ \mathbf{e}'_2 \\ \mathbf{e}'_3 \end{pmatrix}$$

が得られる. すなわち, (3.2.17)-(3.2.19) が成り立っている.

しかし, ここでは係数行列 \mathbf{O} が直交行列であることを証明していないので

$$\mathbf{e}_1 = b_{11}\mathbf{e}'_1 + b_{12}\mathbf{e}'_2 + b_{13}\mathbf{e}'_3$$

$$\mathbf{e}_2 = b_{21}\mathbf{e}'_1 + b_{22}\mathbf{e}'_2 + b_{23}\mathbf{e}'_3$$

$$\mathbf{e}_3 = b_{31}\mathbf{e}'_1 + b_{32}\mathbf{e}'_2 + b_{33}\mathbf{e}'_3$$

とにおいて, $b_{11}, b_{12}, \dots, b_{33}$ を求める²². いま $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ と $\mathbf{e}'_1, \mathbf{e}'_2, \mathbf{e}'_3$ とのスカラー積をとれば,

$$b_{11} = \mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{e}'_1 = a_{11}, \quad b_{12} = \mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{e}'_2 = a_{21}, \quad b_{13} = \mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{e}'_3 = a_{31}$$

$$b_{21} = \mathbf{e}_2 \cdot \mathbf{e}'_1 = a_{12}, \quad b_{22} = \mathbf{e}_2 \cdot \mathbf{e}'_2 = a_{22}, \quad b_{23} = \mathbf{e}_2 \cdot \mathbf{e}'_3 = a_{32}$$

$$b_{31} = \mathbf{e}_3 \cdot \mathbf{e}'_1 = a_{13}, \quad b_{32} = \mathbf{e}_3 \cdot \mathbf{e}'_2 = a_{23}, \quad b_{33} = \mathbf{e}_3 \cdot \mathbf{e}'_3 = a_{33}$$

であることを示すことができる.

3.6.2 付録2 a_{ij} の間の条件

$\mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{e}_1 = \mathbf{e}_2 \cdot \mathbf{e}_2 = \mathbf{e}_3 \cdot \mathbf{e}_3 = 1$ および $\mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{e}_2 = \mathbf{e}_2 \cdot \mathbf{e}_3 = \mathbf{e}_3 \cdot \mathbf{e}_1 = 0$ を (3.2.17)-(3.2.19) と (3.2.8), (3.2.9) を用いて求めれば,

$$\mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{e}_1 = a_{11}^2 + a_{21}^2 + a_{31}^2 = 1$$

$$\mathbf{e}_2 \cdot \mathbf{e}_2 = a_{12}^2 + a_{22}^2 + a_{32}^2 = 1$$

$$\mathbf{e}_3 \cdot \mathbf{e}_3 = a_{13}^2 + a_{23}^2 + a_{33}^2 = 1$$

$$\mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{e}_2 = a_{11}a_{12} + a_{21}a_{22} + a_{31}a_{32} = 0$$

$$\mathbf{e}_2 \cdot \mathbf{e}_3 = a_{12}a_{13} + a_{22}a_{23} + a_{32}a_{33} = 0$$

$$\mathbf{e}_3 \cdot \mathbf{e}_1 = a_{13}a_{11} + a_{23}a_{21} + a_{33}a_{31} = 0$$

²²係数 b_{ij} の前の添字 i は x_i 軸を表し, 後ろの添字 j は x'_j 軸を表している. この点で係数 a_{ij} の添字の場合と違うことに注意せよ.

と求められる.

なお, $\mathbf{e}'_1 \cdot \mathbf{e}'_1 = \mathbf{e}'_2 \cdot \mathbf{e}'_2 = \mathbf{e}'_3 \cdot \mathbf{e}'_3 = 1$ および $\mathbf{e}'_1 \cdot \mathbf{e}'_2 = \mathbf{e}'_2 \cdot \mathbf{e}'_3 = \mathbf{e}'_3 \cdot \mathbf{e}'_1 = 0$ を (3.2.3)-(3.2.5) と (3.2.6), (3.2.7) を用いて求めれば,

$$\begin{aligned} \mathbf{e}'_1 \cdot \mathbf{e}'_1 &= a_{11}^2 + a_{12}^2 + a_{13}^2 = 1 \\ \mathbf{e}'_2 \cdot \mathbf{e}'_2 &= a_{21}^2 + a_{22}^2 + a_{23}^2 = 1 \\ \mathbf{e}'_3 \cdot \mathbf{e}'_3 &= a_{31}^2 + a_{32}^2 + a_{33}^2 = 1 \\ \mathbf{e}'_1 \cdot \mathbf{e}'_2 &= a_{11}a_{21} + a_{12}a_{22} + a_{13}a_{23} = 0 \\ \mathbf{e}'_2 \cdot \mathbf{e}'_3 &= a_{21}a_{31} + a_{22}a_{32} + a_{23}a_{33} = 0 \\ \mathbf{e}'_3 \cdot \mathbf{e}'_1 &= a_{31}a_{11} + a_{32}a_{12} + a_{33}a_{13} = 0 \end{aligned}$$

という別の形の条件も得られる.

3.6.3 付録3 Euler角の記号

Euler角を表す記号として ϕ, θ, ψ を用いたのは, ϕ, θ が3次元極座標で極角 θ , 方位角 ϕ として慣用的に用いられていたからであろう (図 3.5 参照). もっとも Euler角の場合にはさらにもう一つの角 ψ が加わっている.

Euler角として ϕ, θ, ψ の代わりに α, β, γ を用いるテキストもあるが [8] [9], ここでは [1] にしたがった. ちなみに [1] では ϕ, θ, ψ をなぜ用いるのかという説明はなされていない.

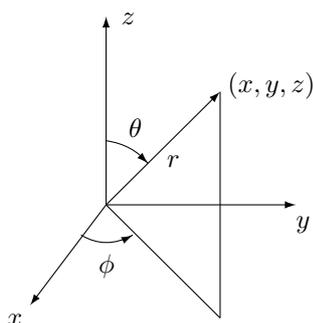


図 3.5: 3次元球座標 (r, θ, ϕ) の定義

3.6.4 付録4 行列 A の計算

行列の計算をするまでもないであろうが, 念のために示しておこう.

$$CD = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta & \sin \theta \\ 0 & -\sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \phi & \sin \phi & 0 \\ -\sin \phi & \cos \phi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \phi & \sin \phi & 0 \\ -\cos \theta \sin \phi & \cos \theta \cos \phi & \sin \theta \\ \sin \theta \sin \phi & -\sin \theta \cos \phi & \cos \theta \end{pmatrix}$$

である. この CD の積を用いて

$$\begin{aligned} B(CD) &= \begin{pmatrix} \cos \psi & \sin \psi & 0 \\ -\sin \psi & \cos \psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \phi & \sin \phi & 0 \\ -\cos \theta \sin \phi & \cos \theta \cos \phi & \sin \theta \\ \sin \theta \sin \phi & -\sin \theta \cos \phi & \cos \theta \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \cos \psi \cos \phi - \sin \psi \cos \theta \sin \phi & \cos \psi \sin \phi + \sin \psi \cos \theta \cos \phi & \sin \psi \sin \theta \\ -\sin \psi \cos \phi - \cos \psi \cos \theta \sin \phi & -\sin \psi \sin \phi + \cos \psi \cos \theta \cos \phi & \cos \psi \sin \theta \\ \sin \theta \sin \phi & -\sin \theta \cos \phi & \cos \theta \end{pmatrix} \end{aligned}$$

これが行列 A の計算の詳細である.

3.6.5 付録 5 $|A| = 1$ の直接の証明

すでに本文で行列式 $|A| = 1$ であることを示したのだから, 蛇足だと思うが, 行列式 $|A| = 1$ であることを行列 A から直接に示す.

$$\begin{aligned} |A| &= (\cos \psi \cos \phi - \sin \psi \cos \theta \sin \phi)A_{11} - (\cos \psi \sin \phi + \sin \psi \cos \theta \cos \phi)A_{12} + (\sin \psi \sin \theta)A_{13} \\ &= (\cos \psi \cos \phi - \sin \psi \cos \theta \sin \phi)^2 + (\cos \psi \sin \phi + \sin \psi \cos \theta \cos \phi)^2 + (\sin \psi \sin \theta)^2 \\ &= \cos^2 \psi + \sin^2 \psi \cos^2 \theta + \sin^2 \psi \sin^2 \theta \\ &= \cos^2 \psi + \sin^2 \psi \\ &= 1 \end{aligned}$$

ここで

$$\begin{aligned} A_{11} &= \begin{vmatrix} -\sin \psi \sin \phi + \cos \psi \cos \theta \cos \phi & \cos \psi \sin \theta \\ -\sin \theta \cos \phi & \cos \theta \end{vmatrix} \\ &= \cos \psi \cos \phi - \sin \psi \cos \theta \sin \phi \\ A_{12} &= \begin{vmatrix} -\sin \psi \cos \phi - \cos \psi \cos \theta \sin \phi & \cos \psi \sin \theta \\ \sin \theta \sin \phi & \cos \theta \end{vmatrix} \\ &= -(\cos \psi \sin \phi + \sin \psi \cos \theta \cos \phi) \\ A_{13} &= \begin{vmatrix} -\sin \psi \cos \phi - \cos \psi \cos \theta \sin \phi & -\sin \psi \sin \phi + \cos \psi \cos \theta \cos \phi \\ \sin \theta \sin \phi & -\sin \theta \cos \phi \end{vmatrix} \\ &= \sin \psi \sin \theta \end{aligned}$$

である.

3.6.6 付録 6 Gimbal lock の現象

Euler 角による空間回転ではときどき困ったことが起きる. それは 3 つの軸のまわりの回転のつもりでいたら, そうではないことが起こる可能性がある²³.

インターネットで調べるといろいろの説明があり, その中には体験的な感覚に訴えるものも存在する.

ここでは wikipedia [7] にしたがって, Euler 角での回転行列による説明を見ておこう. まず取り上げるのは x 規約の場合である. いま Euler 角 ϕ と ψ とはその変域を $[-\pi, \pi]$ とし, θ の変域を $[0, \pi]$ とする.

²³Gimbals については付録 7 を参照せよ.

このとき $\theta = 0, \pi$ のときに gimbal lock の現象が起きる。
 まず $\theta = 0$ のときをまず考えよう。このとき

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta & \sin \theta \\ 0 & -\sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

であるから

$$\begin{aligned} R(\psi, 0, \phi) &= \begin{pmatrix} \cos \psi & \sin \psi & 0 \\ -\sin \psi & \cos \psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \phi & \sin \phi & 0 \\ -\sin \phi & \cos \phi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \cos(\psi + \phi) & \sin(\psi + \phi) & 0 \\ -\sin(\psi + \phi) & \cos(\psi + \phi) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

これは結局 z 軸のまわりの角度 $\psi + \phi$ の回転と同じであり、2次元の回転ではあるが、もはや3次元の回転ではない。すなわち3つの自由度のうちの一つが失われている。

同様に $\theta = \pi$ のときには

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta & \sin \theta \\ 0 & -\sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

となり、

$$\begin{aligned} R(\psi, \pi, \phi) &= \begin{pmatrix} \cos \psi & \sin \psi & 0 \\ -\sin \psi & \cos \psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \phi & \sin \phi & 0 \\ -\sin \phi & \cos \phi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \cos(\psi - \phi) & -\sin(\psi - \phi) & 0 \\ -\sin(\psi - \phi) & -\cos(\psi - \phi) & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

これもやはり z 軸のまわりの角度 $\psi - \phi$ の回転と同じであり、2次元の回転ではあるが、もはや3次元の回転ではない。この場合も上と同様である。

以上は x 規約における gimbal lock 現象であったが、 xyz 規約でも同様な議論ができる。しかし、 xyz 規約ではすべての回転軸が異なっているので、heading-pitch-bank 中の pitch の角が $\theta = \pm\pi/2$ のときに gimbal lock 現象が生じる²⁴。

3.6.7 付録7 Gimbals

Gimbals とは Webster 英英辞典によれば、

A pair of rings pivoted on axes at right angles to each other so that one is free to swing within the other: a ship compass, etc. will keep a horizontal position when suspended in gimbals. (一組のリングで、お互いに直交するように軸づけされている。それで中にある小さなリングは外側の大きなリングに対して自由に動くようになっている：船舶のコンパス等はジンバルに吊るされて水平の位置を保つことができる。)

²⁴ [10] にその説明があるが、 θ の変域が $[-\pi/2, \pi/2]$ になっており、 x 規約での θ の変域と異なっていることに注意せよ。

逐語訳ではなく、想像しやすいように意識した。辞典では gimbals と必ず s がついているが、Gimbal lock のインターネットでの記述では s が落ちている。Gimbals は言葉で説明するよりも図とか実物を見た方がわかりやすいと思うので、[11] をぜひ参照してください。

一般的に 3 つのリングで使われているが、この場合には gimbal lock が生じる可能性があるので、それを防止するためには 4 つのリングを使えばよいと説明されている。

(2013. 12. 18)

参考文献

- [1] Goldstein, Poole, Safko (矢野, 江沢, 瀧崎 訳), 『古典力学』(第 3 版) 上 (吉岡書店, 2006) 213-215
- [2] 矢野 忠, 四元数と空間回転 1, 数学・物理通信 第 2 巻, 第 2 号 (2012.6) 19-29
- [3] 矢野 忠, 四元数と空間回転 2, 数学・物理通信 第 2 巻, 第 5 号 (2012.10) 20-27
- [4] 矢野 忠, 四元数と空間回転 3, 数学・物理通信 第 3 巻, 第 1 号 (2013.3) 15-24
- [5] 矢野 忠, 四元数と空間回転 4, 数学・物理通信 第 3 巻, 第 2 号 (2013.3) 19-28
- [6] 矢野 忠, 四元数と空間回転 5, 数学・物理通信 第 3 巻, 第 5 号 (2013.9) 16-20
- [7] http://en.wikipedia.org/wiki/Gimbal_lock
- [8] S. L. Altmann, *Rotations, Quaternions, and Double Groups* (Dover, 2005)
- [9] J. B. Kuipers, *Quaternions and Rotation Sequences* (Princeton Univ. Press, 1999)
- [10] F. Dunn and I. Parberry (松田晃一 訳) 『ゲーム 3D 数学』(オーライリー・ジャパン, 2008) 154-155
- [11] http://mailsrv.nara-edu.ac.jp/~asait/kuiper_belt/navigation2/gimbal.htm

編集後記

いつも投稿を頂く、中西先生はこの『数学・物理通信』の一番いい読者でもある。多分、書いた原稿の不備をご指摘頂いた回数は私が一番多いだろう。

どうも私は無限大の処理がいつも甘いらしく、ご指摘を頂く。もっともそれを修正する機会はなかなかない。

今回もこれは私の書いた論文ではないが、メールであるコメントを頂いた。それでそのコメントをちょっと書いていただけませんかとお願いをしたら、逆にコメント欄をつくったらどうでしょうかとご提案があった。

そのご意見に賛成であるので、投稿規定にコメント欄を設けると明記します。コメント欄の新設に編集後記で触れますとのお約束をした。しかし、今号はページ数が30ページを越したので改訂した投稿規定の掲載は見送った。

読者の中にはちょっとしたコメントをお持ち方も多いであろう。だが、コメントでも形式を整える必要があるとなれば、そのようなコメントは面倒だからしたくはないかもしれない。このコメント欄はむしろ編集者宛ての私信みたいなものと考えて頂いたらよい。もっともきちんとした論文なり、エッセイに似たコメントを禁止するというつもりではない。それは人ひとによって違っていてもよい。

編集者宛てに頂く、メールにもいろいろなご意見やご感想がある。それらも取り上げる場所があれば、もっといいだろう。そのような感想については編集後記でそれとなく触れたりしてきた。結構、気楽な感想の中に聞くべき話があったりする。

今年もまた年の瀬が近づいてきた。いいクリスマスと新年をお迎えください。

(矢野 忠)