

# 数学・物理通信

4卷2号      2014年4月

編集 新関章三・矢野 忠

2014年4月21日

# 目次

<b>四元数と球面線形補間</b>	<b>4</b>
1.1 はじめに	4
1.2 補間とはなにか	4
1.3 線形補間	5
1.4 球面線形補間 1	7
1.5 球面線形補間 2	8
1.6 四元数の球面線形補間	9
1.7 おわりに	11
1.8 付録	11
1.8.1 付録 1 $k_0, k_1$ の別の導出	11
1.8.2 付録 2 $u \rightarrow 0$ のとき $f(u) \rightarrow u$ となる関数	12
1.8.3 付録 3 球面線形補間の導出 3	12
1.8.4 付録 4 球面線形補間の導出 4	13
1.8.5 付録 5 球面線形補間の導出 5	14
1.8.6 付録 6 Gram-Schmidt の正規直交化	15
1.8.7 付録 7 $\mathbf{w}$ の代入計算	16
1.8.8 付録 8 四元数の差分	16
1.8.9 付録 9 (1.6.2) の計算	16
1.8.10 付録 10 四元数の極形式表示	17
1.8.11 付録 11 四元数の指数関数, 対数関数, ベキ乗	18
1.8.12 付録 12 (1.8.14) の導出	20
<b>Bessel 関数と Kepler 方程式</b>	<b>23</b>
2.1 はじめに	23
2.2 惑星運動を解くための準備	24
2.2.1 速度, 加速度の極座標表示	24
2.2.2 楕円の極座標表示	24
2.3 惑星の運動	25
2.3.1 楕円軌道の導出	25
2.3.2 Kepler 方程式の導出	26
2.4 方程式の厳密解	27
2.4.1 Bessel 関数の準備	27
2.4.2 Kepler 方程式の解法	28
2.4.3 Bessel 関数に関する余計な公式	30
2.5 非周期的な軌道の場合	31
2.5.1 離心率 $e$ が 1 より大の場合	31
2.5.2 離心率 $e$ が 1 の場合	33
2.6 おわりに	34



# Contents

1. Tadashi YANO: Quaternions and Spherical Linear Interpolation
2. Kenji SETO: Bessel Function and Kepler Equation
3. Tadashi YANO: Editorial Comments

# 四元数と球面線形補間

## Quaternions and Spherical Linear Interpolation

矢野 忠<sup>1</sup>  
Tadashi YANO<sup>2</sup>

### 1.1 はじめに

現在の四元数の重要性はもちろんアニメのフィギュアを画面上で動かしたり、または衛星やロケットの姿勢制御とかはたまた自動制御の機械の回転操作等の際に有用だからである。

それでこの四元数のシリーズでも物体の回転について6回にわたって述べてきた。このシリーズではあまり応用には目を向けてはいない。しかし、それでも応用においては四元数の補間が必要になってくるので、今回はベクトルの球面線形補間について述べ、さらにそれが四元数の球面線形補間にどのように応用されるかを見てみよう。

まず第1.2節では補間とはなにかを述べる。つづいて第1.3節ではベクトルの線形補間について述べる。第1.4節と第1.5節では大きさが一定のベクトルの球面線形補間について説明する。ここではできるだけ線形補間の拡張として球面線形補間を考える。第1.6節では応用との関連で重要な四元数の球面線形補間について述べよう。

本文では話の筋道を重視したので、そこでは省略した事項を付録で補足的に説明する。もし細かなことを知りたいときには付録の該当箇所を参照してほしい。

### 1.2 補間とはなにか

もともと補間法<sup>3</sup>とは関数表に与えられていない引数に対する関数（たとえば三角関数、対数関数、指数関数など）の値を求めるために考えられたものである。しかし、現在では汎用のコンピュータ、スーパーコンピュータ、パーソナル・コンピュータ、関数電卓等が普及したためにこれらの関数の値を容易に求められるようになったので、本来の意味での補間法は存在意義がなくなってしまった。

しかし、その意義はまったくなくなってしまったわけではなく、情報処理工学の観点から重要となっている。たとえば実験データのようなとびとびの数値があたえられたときに、これらの中間の値を適当な方法によって求める必要があったり、またそのデータから、それらの実験式を得たり、それらの実験式の微係数や積分値を求めたりする必要があるときに補間や補外<sup>4</sup>は有効である。

---

<sup>1</sup>元愛媛大学工学部

<sup>2</sup>yanotad@earth.ocn.ne.jp

<sup>3</sup>補間法は内挿法ともいわれる。補間は英語では interpolation という。

<sup>4</sup>補外は外挿ともいわれる。英語では extrapolation という。

またグラフィックスでのフィギュアの回転や移動とかでも補間は重要であろう。同様に機械の自動制御の過程においても必要があれば、簡単に補間法を用いて計算できると便利であろう。そのような用途のために球面線形補間が Shoemake によって 1985 年に考えられた [1].

### 1.3 線形補間

まず球面線形補間について述べる前にまず線形補間について述べよう。そしてその拡張として球面線形補間を考えることにしたい。最終的には四元数の球面線形補間を考えるのを目的とするが、まずはベクトルの線形補間を考えることから始めよう。図 1.1 に示すような、始点の一致した二つのベクトル  $\mathbf{x}$  と  $\mathbf{y}$  とがあるとき、

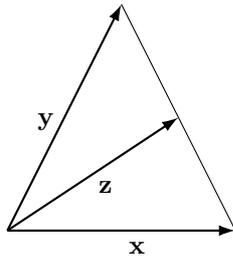


図 1.1: 線形補間 1

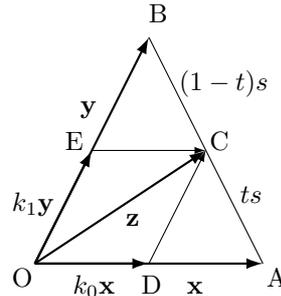


図 1.2: 線形補間 2

この二つのベクトルの終点を結んだ直線上にベクトルの終点がくるような、この中間の位置ベクトル  $\mathbf{z}$  は  $\mathbf{x}$  と  $\mathbf{y}$  の一次結合として、

$$\mathbf{z} = k_0(t)\mathbf{x} + k_1(t)\mathbf{y}, \quad 0 \leq t \leq 1 \quad (1.3.1)$$

で表されるであろう<sup>5</sup>。ここで、 $t$  はパラメータである。さて、係数  $k_0(t), k_1(t)$  をどのように決めたらよいか。ベクトル  $\mathbf{x}$  と  $\mathbf{y}$  の先端の点を直線で結んだその直線上にベクトル  $\mathbf{z}$  の先端があるから、係数  $k_0(t), k_1(t)$  もパラメータ  $t$  の 1 次関数として表されるだろう。それをいま

$$k_0(t) = at + b, \quad (1.3.2)$$

$$k_1(t) = ct + d \quad (1.3.3)$$

と仮定しよう。ここで、 $a, b, c, d$  は未定の係数である。

$t = 0$  のときには

$$\mathbf{z} = \mathbf{x}$$

であるとすれば、

$$k_0(0) = 1, \quad k_1(0) = 0 \quad (1.3.4)$$

となる。

$t = 1$  のときには

$$\mathbf{z} = \mathbf{y}$$

であるとすれば、

$$k_0(1) = 0, \quad k_1(1) = 1 \quad (1.3.5)$$

となる。

<sup>5</sup>もっとも補外を行うときには  $0 \leq t \leq 1$  という制限を取り除く必要がある。

これで  $k_0(t), k_1(t)$  のそれぞれについての 2 つの条件が得られたから、未定係数  $a, b, c, d$  を求めることができる。

$k_0(0) = 1, k_0(1) = 0$  から

$$b = 1, \quad (1.3.6)$$

$$a + b = 0 \quad (1.3.7)$$

$k_1(0) = 0, k_1(1) = 1$  から

$$d = 0 \quad (1.3.8)$$

$$c + d = 1 \quad (1.3.9)$$

(1.3.6), (1.3.7), (1.3.8), (1.3.9) から

$$a = -1, \quad b = 1, \quad c = 1, \quad d = 0$$

が得られる。これから

$$k_0(t) = 1 - t, \quad k_1(t) = t \quad (1.3.10)$$

と求められる<sup>6</sup>。したがって、(1.3.1) は

$$\mathbf{z} = (1 - t)\mathbf{x} + t\mathbf{y} \quad (1.3.11)$$

と表される。

以下では簡単のために必要な場合以外は  $k_0(t) = k_0, k_1(t) = k_1$  と引数の  $t$  を省く。

(1.3.10) を初等幾何学的に考えてみよう。図 1.2 のように  $\mathbf{z}$  を対角線とする、平行四辺形を考える。O, A, B, C, D, E を図 1.2 のようにとる。

ここで、 $\overrightarrow{DC} = \overrightarrow{OE} = k_1\mathbf{y}$  は  $\mathbf{y}$  と平行であり、また  $\overrightarrow{EC} = \overrightarrow{OD} = k_0\mathbf{x}$  は  $\mathbf{x}$  と平行である。

図 1.2 においてベクトルの合成から

$$\mathbf{z} = k_0\mathbf{x} + k_1\mathbf{y} \quad (1.3.1)$$

が成り立っていることを再度確認できる。

さて、図 1.2 において  $\overline{AB} = s$  とし、 $\overline{AC} = ts$ 、 $\overline{CB} = (1 - t)s$  とすれば、 $EC \parallel OA$  であるから  $\triangle ECB$  と  $\triangle OAB$  とは相似三角形である。したがって

$$\frac{k_0|\mathbf{x}|}{(1 - t)s} = \frac{|\mathbf{x}|}{s}$$

が成り立つ。すなわち、 $k_0$  は

$$k_0 = \frac{(1 - t)s}{s} \quad (1.3.12)$$

となる。

また  $DC \parallel OB$  であるから  $\triangle DAC$  と  $\triangle OAB$  とは相似三角形である。したがって

$$\frac{k_1|\mathbf{y}|}{ts} = \frac{|\mathbf{y}|}{s}$$

が成り立つ。すなわち、 $k_1$  は

$$k_1 = \frac{ts}{s} \quad (1.3.13)$$

となる。

(1.3.12), (1.3.13) は (1.3.10) とまったく同じ式であるが、わざと冗長に書き直されている。これをまとめれば

$$k_0 = \frac{(1 - t)s}{s}, \quad k_1 = \frac{ts}{s} \quad (1.3.14)$$

である。(1.3.10) ではなくわざわざ (1.3.14) と表したのは次節以降に述べる球面線形補間との類似性をはっきりさせるためである。

<sup>6</sup>もっと簡単な  $k_0(t), k_1(t)$  の式の導出を付録 1 で示す。

## 1.4 球面線形補間 1

ベクトルの球面線形補間について述べよう (図 1.3 参照)。

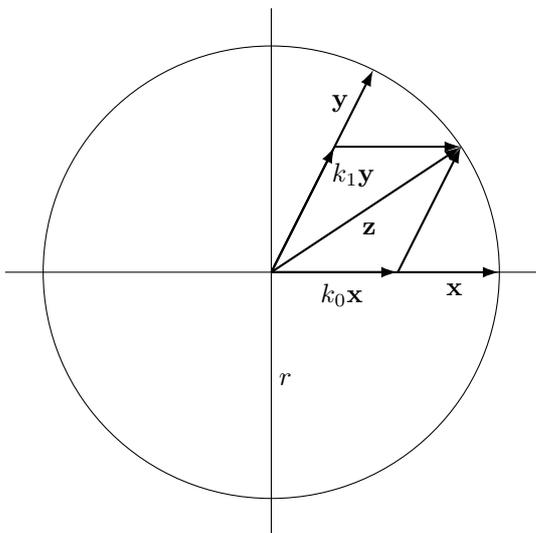


図 1.3: 球面線形補間 1

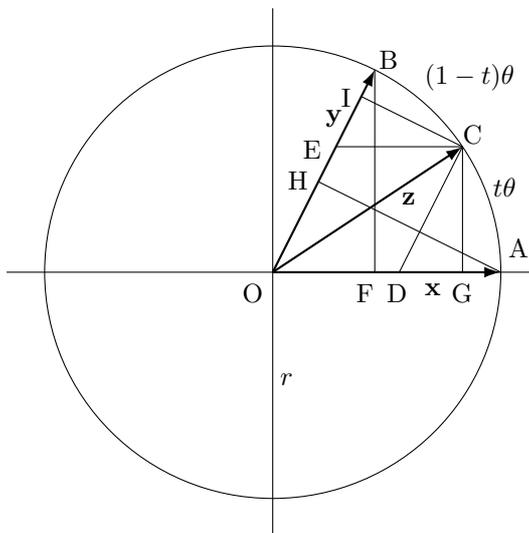


図 1.4: 球面線形補間 2

線形補間の場合と比べてそのベクトルの大きさが一定という条件がついている。すなわち,

$$|\mathbf{x}| = |\mathbf{y}| = |\mathbf{z}| = r \quad (1.4.1)$$

この条件の下で

$$\mathbf{z} = k_0\mathbf{x} + k_1\mathbf{y} \quad (1.4.2)$$

の  $k_0, k_1$  を求める<sup>7</sup>。(1.4.2) は前の (1.3.1) と同じ形だが, 条件 (1.4.1) がついている。だからまったく新しい問題となる。

だが, その前にちょっと極限の場合を考えてみよう。それは二つのベクトル  $\mathbf{x}$  と  $\mathbf{y}$  のなす角  $\theta$  が微小角である場合である。この場合には近似的に線形補間の式と同じ式が成り立つと考えられる。

したがって,  $\theta \rightarrow 0$  の極限の場合には  $k_0, k_1$  は線形補間 (1.3.14) と同じ形の式が成り立つと考えてよい<sup>8</sup>。

そうすると線形補間のときの  $k_0, k_1$  の式 (1.3.14) で  $s$  を  $\theta$  で置き換えた式が  $\theta \rightarrow 0$  では成り立つであろう。したがって, この極限の場合では

$$k_0 = \frac{(1-t)\theta}{\theta}, \quad k_1 = \frac{t\theta}{\theta} \quad (1.4.3)$$

と近似できる。

これから  $\theta \rightarrow 0$  のときに (1.4.3) となるような  $\theta$  と  $t$  の関数である,  $k_0, k_1$  を見つければよい。直ぐに思いつく関数としては  $\sin$  関数がある。

すなわち, (1.4.3) で  $(1-t)\theta \rightarrow \sin(1-t)\theta$ ,  $t\theta \rightarrow \sin t\theta$ ,  $\theta \rightarrow \sin \theta$  と置き換えれば,

$$k_0 = \frac{\sin(1-t)\theta}{\sin \theta}, \quad k_1 = \frac{\sin t\theta}{\sin \theta} \quad (1.4.4)$$

<sup>7</sup>1.4 節以下での  $k_0, k_1$  は 1.3 節のそれらに対応しているが, 違うものであることに注意せよ。違うものには違う記号を使うべきかもしれないが, 記号の節約のために同じ記号を流用する。

<sup>8</sup>線形補間の場合にはベクトル  $\mathbf{x}$  と  $\mathbf{y}$  のベクトルの先端の間の長さを  $s$  としたが, 球面線形補間ではベクトル  $\mathbf{x}$  と  $\mathbf{y}$  のなす角を  $\theta$  としている。

が得られる。

これは求める球面線形補間なのであるが、ただ  $u \rightarrow 0$  のときに  $f(u) \rightarrow u$  の条件を満たす関数は  $\sin$  関数だけではない。たとえば、 $\tan$  関数も同じ条件を満たす。

ではどうやって  $u \rightarrow 0$  のときに  $f(u) \rightarrow u$  という条件を満たす、多くの関数の内で  $\sin$  関数のみが球面線形補間となり、他の関数は球面線形補間とはならないことを示すか。それにはベクトルの大きさが一定という条件をみたくかかどうかを調べなくてはならない。その検討は簡単ではない。またいままで知られている、 $u \rightarrow 0$  のときに  $f(u) \rightarrow u$  となる関数  $f(u)$  をすべて調べたとしても他の知らない可能性がないとはいえない。それでこの考えはおもしろいがここで頓挫する。それに関する議論の一端については付録 2 で述べよう。1.5 節では別の考えを述べよう。

## 1.5 球面線形補間 2

初等幾何学的には線形補間の場合と類推的につぎのような考えが思いつかれるであろう [2]<sup>9</sup>。それは線形補間の場合に  $k_0, k_1$  の関数を求めるときに三角形が相似であることを用いたが、同様なことが球面線形補間でも行えないだろうか。すなわち、この場合でも相似な三角形をつくれまいだろうか。

平行四辺形は線形補間の場合も球面線形補間の場合も同じようにあるが、相似な三角形は球面線形補間の場合には線形補間の場合とは異なってそのままでは存在していない。

しかし、補間ベクトル  $\mathbf{z}$  の終点  $C$  とベクトル  $\mathbf{x}$  の終点  $A$  から線分  $OB$  に垂線を下した足をそれぞれ  $I$  と  $H$  とすれば、相似な直角三角形をつくることできる (図 1.4 参照)<sup>10</sup>。

ちょっと図について注意しておく。図 1.4 の円弧につけられた  $t\theta$  と  $(1-t)\theta$  はそれぞれ角度  $\angle AOC$  と  $\angle COB$  を表しており、円弧の長さではない。もちろん円の半径  $r$  を 1 とすれば、角度  $t\theta$  と  $(1-t)\theta$  はその記号のつけられた円弧の長さに等しい。また、 $\theta = \angle AOB$  である。この注意は以下の図 1.6-図 1.9 についても同様である。

$EC \parallel OA$  であるから  $\triangle ECI$  と  $\triangle OAH$  とは相似な直角三角形である。それで

$$\frac{\overline{EC}}{r \sin(1-t)\theta} = \frac{|\mathbf{x}|}{r \sin \theta}$$

が成り立つ。このとき  $\overline{EC} = \overline{OD} = k_0 |\mathbf{x}|$  である。したがって

$$k_0 = \frac{\sin(1-t)\theta}{\sin \theta} \quad (1.5.1)$$

が得られる<sup>11</sup>。

同様に補間ベクトル  $\mathbf{z}$  の終点  $C$  とベクトル  $\mathbf{y}$  の終点  $B$  から線分  $OA$  に垂線を下した足をそれぞれ  $G$  と  $F$  とすれば、相似な直角三角形をつくることできる (図 1.4 参照)。

また  $DC \parallel OB$  であるから  $\triangle DGC$  と  $\triangle OFB$  とは相似な直角三角形である。それで

$$\frac{\overline{DC}}{r \sin t\theta} = \frac{|\mathbf{y}|}{r \sin \theta}$$

成り立つ<sup>12</sup>。このとき  $\overline{DC} = \overline{OE} = k_1 |\mathbf{y}|$  である。したがって

$$k_1 = \frac{\sin t\theta}{\sin \theta} \quad (1.5.2)$$

が得られる。

<sup>9</sup> [2] のアイディアは [3] に触発されたのかもしれないが、論理がより明確である。

<sup>10</sup> 図 1.4 にベクトル  $k_0 \mathbf{x}$  や  $k_1 \mathbf{y}$  の記号等を書き入れるとわかり難くなるので、書き入れていない。図 1.3 とあわせて参照せよ。

<sup>11</sup>  $\overline{CI}$  を  $\triangle OCI$  の高さと考えれば、 $\overline{CI} = r \sin(1-t)\theta$  が得られる。

<sup>12</sup>  $\overline{CG}$  を  $\triangle OGC$  の高さと考えれば、 $\overline{CG} = r \sin t\theta$  が得られる。

ここで (1.5.1),(1.5.2) を一つにまとめておく。これは

$$k_0 = \frac{\sin(1-t)\theta}{\sin\theta}, \quad k_1 = \frac{\sin t\theta}{\sin\theta} \quad (1.4.4)$$

と同一である。

したがって

$$\mathbf{z} = \frac{\sin(1-t)\theta}{\sin\theta} \mathbf{x} + \frac{\sin t\theta}{\sin\theta} \mathbf{y} \quad (1.5.3)$$

となる。

(1.4.4) から  $\theta \rightarrow 0$  のときに (1.4.3) が得られる。したがって、この球面線形補間 (1.5.3) は線形補間 (1.3.11) の自然な拡張とみなすことができる。(1.5.3) の  $\mathbf{z}$  のスカラー積  $\mathbf{z} \cdot \mathbf{z}$  をとってあらためて  $|\mathbf{z}| = r$  を示すこともできる。

この (1.5.3) の球面線形補間の求め方は他にもいろいろある。そのいくつかの導出法を付録 3, 4, 5 に述べる。

## 1.6 四元数の球面線形補間

この節ではこのエッセイの中心課題である、四元数の球面線形補間について述べよう。

[8] によれば、線形補間の手続きはつぎの 3 つのステップを踏む。

1. 2 つの値の差分をとる。  $\Delta a = a_1 - a_0$
2. この差分のフラクションをとる。  $t\Delta a$ , ( $0 \leq t \leq 1$ ,  $t$ : パラメータ)
3. はじめの値をその差分のフラクションで補正する。  $a = a_0 + t\Delta a$

四元数の球面線形補間も同じ手続きで得られる。しかし、四元数に特有なところもある。いま二つの四元数を  $x, y$  としよう。これは単位四元数、すなわち大きさが 1 の四元数とする。

1. 2 つの四元数  $x, y$  の差分を求めよう。

これは四元数  $x$  から  $y$  への角変位であるが、それを  $\Delta z$  と表せば、

$$\Delta z = yx^{-1}$$

で与えられる。ここで、オペレーションは右から先に左へと順にオペレートするものとする<sup>13</sup>。

2. この差分  $\Delta z$  のフラクションをとる。

この差分のフラクションは、四元数のべき乗を用いて

$$(\Delta z)^t$$

と表される<sup>14</sup>。

3. はじめの四元数  $x$  をとり、それをステップ 2 で得られた差分で補間をする。

$$z(t) = (\Delta z)^t x$$

<sup>13</sup>この差分は付録 8 で説明をする。またオペレーションの順序が [8] とは違っている。

<sup>14</sup>フラクション (fraction) とは小部分、断片とか分数を意味する。ここでは差分の小部分という意味に使っている。

手続きは以上である。後はこの計算を実行すればよい。

$x, y$  も  $z$  も大きさ 1 の単位四元数であるから、

$$|x| = |y| = |z| = 1$$

が成り立つ<sup>15</sup>。

いま  $x, y$  をそれぞれ  $x = 1, y = \cos \theta + \mathbf{n} \sin \theta$  ととろう。このように  $x, y$  をとつても議論の一般性を失うことはない。ここで、 $\mathbf{n} = in_x + jn_y + kn_z$  である。

第 1 ステップではまず差分  $\Delta z$  を導こう。四元数  $x$  に差分  $\Delta z$  をオペレートすれば、

$$(\Delta z)x = y$$

となるから、この式の両辺に右から  $x^{-1}$  をかけると四元数の差分  $\Delta z$  は

$$\Delta z = yx^{-1} \tag{1.6.1}$$

と求められる。

第 2 ステップが少し面倒である。差分のフラクシオンをとる。これは

$$\begin{aligned} (\Delta z)^t &= (yx^{-1})^t \\ &= \cos t\theta + \mathbf{n} \sin t\theta \end{aligned} \tag{1.6.2}$$

となる<sup>16</sup>。

第 3 ステップは四元数  $x$  に差分のフラクシオン  $(\Delta z)^t$  を左からかければよい。  $x = 1$  ととっていたから

$$\begin{aligned} z &= (\Delta z)^t x \\ &= (\cos t\theta + \mathbf{n} \sin t\theta) \cdot 1 \\ &= \cos t\theta + \mathbf{n} \sin t\theta \end{aligned} \tag{1.6.3}$$

ところで、 $z$  は

$$z = Ax + By \tag{1.6.4}$$

とも表される。ここで  $A, B$  は未定の係数である。これに  $x = 1, y = \cos \theta + \mathbf{n} \sin \theta$  を代入すれば、

$$z = A + B \cos \theta + B\mathbf{n} \sin \theta \tag{1.6.5}$$

となる。

したがって (1.6.3), (1.6.5) から

$$\cos t\theta = A + B \cos \theta, \tag{1.6.6}$$

$$\sin t\theta = B \sin \theta \tag{1.6.7}$$

が得られる。

(1.6.6), (1.6.7) を  $A, B$  について解けば、

$$\begin{aligned} A &= \frac{\sin(1-t)\theta}{\sin \theta} \\ B &= \frac{\sin t\theta}{\sin \theta} \end{aligned}$$

<sup>15</sup>前に述べたベクトルの球面線形補間ではベクトルの大きさを  $r$  ととつた。もちろんベクトルの大きさ  $r = 1$  ととっても何の不都合も生じない。

<sup>16</sup>ここで  $(\Delta z)^t$  は差分  $\Delta z$  のべき乗を表す。この計算の詳細は付録 9 に述べる。

が得られる.

したがって, 四元数  $x$  と  $y$  との補間として四元数  $z$  は

$$z = \frac{\sin(1-t)\theta}{\sin\theta}x + \frac{\sin t\theta}{\sin\theta}y \quad (1.6.8)$$

と求められる. これはベクトルの補間  $\mathbf{z}$  の (1.5.3) と一致している.

## 1.7 おわりに

「四元数に近づく」からはじまって, 「四元数の発見」「四元数と空間回転」「四元数と球面線形補間」と10回にわたった, この四元数シリーズも筆をおくときが来た.

はじめの予定では「四元数とベクトル代数」や「四元数と球面三角法」とか述べたいと思うテーマもあったが, それらはすでに『ハミルトンと四元数』[9]によって取り扱われたテーマである. これらのテーマに関心のある方々は同書をひもといていただくのがよい.

## 1.8 付録

### 1.8.1 付録1 $k_0, k_1$ の別の導出

図 1.5 に示したようにベクトル  $\mathbf{x}$  と  $\mathbf{y}$  をとる.  $\mathbf{x}$  と  $\mathbf{y}$  の先端を結ぶベクトル  $\mathbf{y} - \mathbf{x}$  上にある1点  $P(t)$  をとり, この点  $P(t)$  と原点  $O$  とを結ぶベクトル  $\mathbf{z}$  を考える. このベクトル  $\mathbf{z}$  はパラメータを  $t$  として

$$\mathbf{z} = \mathbf{x} + t(\mathbf{y} - \mathbf{x})$$

と表すことができる<sup>17</sup>. これはまた

$$\mathbf{z} = (1-t)\mathbf{x} + t\mathbf{y} \quad (1.3.11)$$

と表せる. したがって, 関数  $k_0 = 1-t, k_1 = t$  であることはまったく自然に導かれる. この式から  $t=0$  な

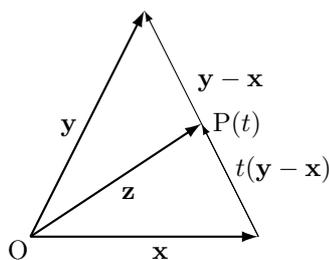


図 1.5:  $k_0, k_1$  の別の導出

らば,

$$\mathbf{z} = \mathbf{x}$$

となり, また  $t=1$  ならば,

$$\mathbf{z} = \mathbf{y}$$

となる.

<sup>17</sup>これは  $t$  を任意の実数とすれば, ベクトル  $\mathbf{x}$  と  $\mathbf{y}$  の先端を結ぶ直線をベクトル  $\mathbf{z}$  で表したものである.

一般に

$$\mathbf{z} = k_0 \mathbf{x} + k_1 \mathbf{y} \quad (1.3.1)$$

と表したとき、もし  $k_0(t) = 1 - t, k_1(t) = t$  ならば、

$$k_0(0) = 1, k_1(0) = 0$$

$$k_0(1) = 0, k_1(1) = 1$$

はもちろん満たされる。

### 1.8.2 付録2 $u \rightarrow 0$ のとき $f(u) \rightarrow u$ となる関数

$u \rightarrow 0$  のときに  $f(u) \rightarrow u$  となるような関数はかなり多く存在する。もっともその中でいちばんはじめに可能性のあるのが本文中で挙げた  $\sin$  関数である。他に  $\tan$  関数も  $u \rightarrow 0$  のときに  $f(u) \rightarrow u$  の条件をみたしている。数学公式集 [4] に中に出てくる  $u \rightarrow 0$  のときに  $F(u) \rightarrow u$  となるような関数を挙げておこう。

$\sin u,$	$\tan u,$	$\arcsin u,$	$\arctan u,$
$\sinh u,$	$\tanh u,$	$\sinh^{-1} u,$	$\tanh^{-1} u$
$\log(1 + u),$	$e^u \sin u$	$\frac{\log(1 + u)}{1 + u}$	

等がある。これらを用いて  $\mathbf{z}$  を定義した後で、この  $\mathbf{z}$  の大きさが  $\mathbf{x}, \mathbf{y}$  の大きさと同じになることが必要である。 $\sin$  関数はこの条件をみたす。他のすべての場合を調べたわけではないが、少なくとも関数  $\tan$  は条件を満たさない。

### 1.8.3 付録3 球面線形補間の導出3

線形補間から離れるかもしれないが、球面線形補間の導出法はいろいろある。その中でもっとも正統的と思われる3番目の導出をこの付録3で述べよう [5] [6]。

まずベクトル  $\mathbf{x}$  と  $\mathbf{y}$  がある平面上にあり、一次独立であるとしよう (図 1.6 参照)。このときは一般には補間するベクトル  $\mathbf{z}$  を  $\mathbf{x}$  と  $\mathbf{y}$  ですぐに表すことができない。

しかし、この二つのベクトルが直交している場合には、補間するベクトルを

$$\mathbf{z} = (\cos t\theta)\mathbf{x} + (\sin t\theta)\mathbf{y} \quad (1.8.1)$$

と表すことができる (図 1.7 参照)。

では  $\mathbf{x}$  と  $\mathbf{y}$  とが直交はしていないときはどうするか。まず  $\mathbf{x}$  に直交するように Gram-Schmidt の直交化法で新しいベクトルをつくれればよい<sup>18</sup>。  $\mathbf{x}$  に直交するように新しく求めたベクトルを  $\mathbf{v}$  とする。

このベクトルは一般にベクトル  $\mathbf{x}$  や  $\mathbf{y}$  の大きさと同じではない。同じ大きさになるように  $\mathbf{v}$  を正規化したベクトルを  $\mathbf{w}$  と表す<sup>19</sup>。

このベクトル  $\mathbf{w}$  が得られれば、補間ベクトル  $\mathbf{z}$  は正規直交化された二つのベクトル  $\mathbf{x}$  と  $\mathbf{w}$  とを用いて

$$\mathbf{z} = (\cos t\theta)\mathbf{x} + (\sin t\theta)\mathbf{w} \quad (1.8.2)$$

と表すことができる。

ここで、すでに  $\mathbf{w}$  は  $\mathbf{x}$  と  $\mathbf{y}$  で表されているから、それを代入すれば、球面線形補間 (1.5.3) が得られる<sup>20</sup>。

球面線形補間3の考え方はきわめて単純である。

<sup>18</sup>新しい直交ベクトルの求め方は付録6で述べる。

<sup>19</sup>ここでは正規化は1とは限らない一定の大きさ  $r$  にすることを意味する。

<sup>20</sup>この計算は難しいものではないが、付録7に述べる。

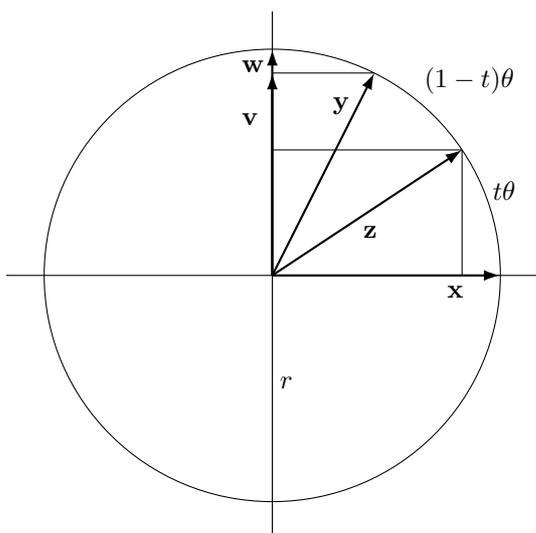


図 1.6: 球面線形補間 3.1

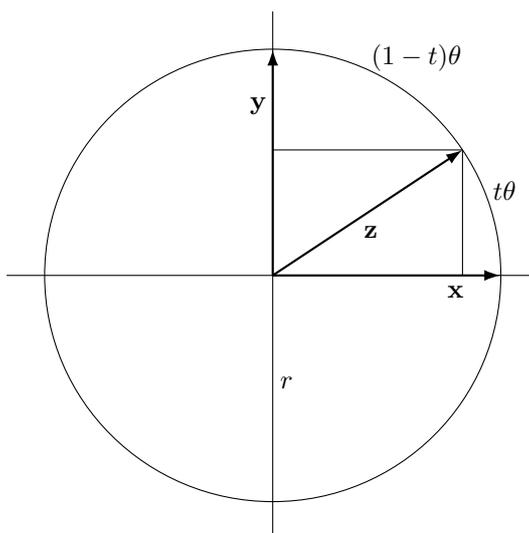


図 1.7: 球面線形補間 3.2

#### 1.8.4 付録 4 球面線形補間の導出 4

4番目の導出法もそんなに難しくはない [7].

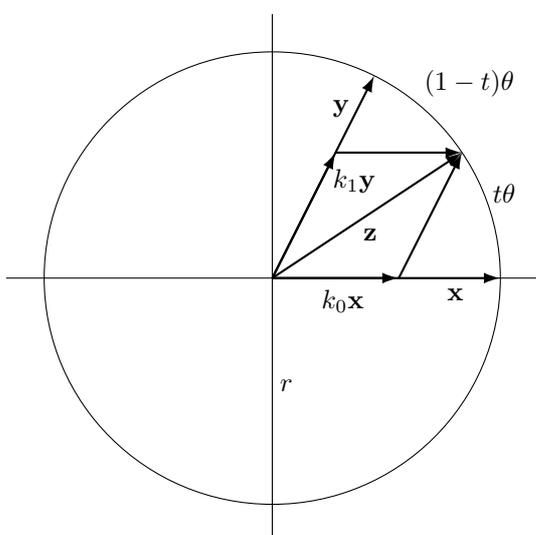


図 1.8: 球面線形補間 4

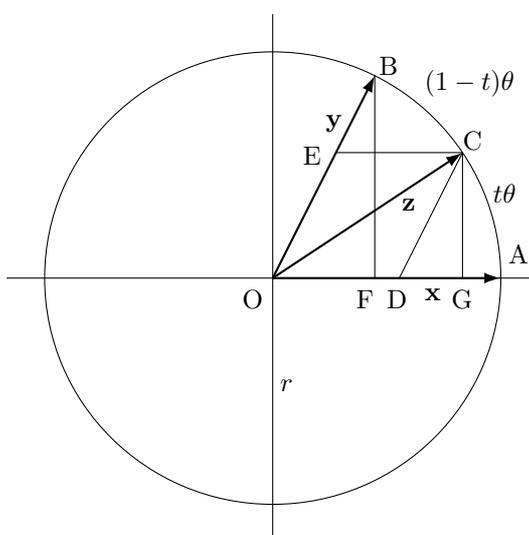


図 1.9: 球面線形補間 5

ベクトル  $\mathbf{x}$  と  $\mathbf{y}$  との補間として得られるベクトル  $\mathbf{z}$  は

$$\mathbf{z} = k_0 \mathbf{x} + k_1 \mathbf{y} \quad (1.4.2)$$

表されるから、この  $\mathbf{z}$  とベクトル  $\mathbf{x}$  と  $\mathbf{y}$  とのスカラ積をとれば、二通りの方法で  $\mathbf{z} \cdot \mathbf{x}$  および  $\mathbf{z} \cdot \mathbf{y}$  を表すことができる (図 1.8 参照)。

$\mathbf{z}$  は  $\mathbf{x}$  と  $t\theta$  の角をなしているから

$$\mathbf{z} \cdot \mathbf{x} = r^2 \cos t\theta \quad (1.8.3)$$

また  $\mathbf{z}$  は  $\mathbf{y}$  と  $(1-t)\theta$  の角をなしているから

$$\mathbf{z} \cdot \mathbf{y} = r^2 \cos(1-t)\theta \quad (1.8.4)$$

が得られる.

ところで, (1.4.2) の  $\mathbf{z}$  と  $\mathbf{x}, \mathbf{y}$  とのスカラ積をそれぞれとれば,

$$\mathbf{z} \cdot \mathbf{x} = r^2(k_0 + k_1 \cos \theta) \quad (1.8.5)$$

と

$$\mathbf{z} \cdot \mathbf{y} = r^2(k_0 \cos \theta + k_1) \quad (1.8.6)$$

が得られる.

(1.8.3), (1.8.5) と (1.8.4), (1.8.6) から  $k_0, k_1$  についての連立1次方程式

$$\begin{aligned} k_0 + k_1 \cos \theta &= \cos t\theta \\ k_0 \cos \theta + k_1 &= \cos(1-t)\theta \end{aligned}$$

が得られる. この連立1次方程式を解けば,  $k_0, k_1$  の式 (1.4.4) が求められる.

この場合も考え方は難しくはない.

### 1.8.5 付録5 球面線形補間の導出5

この5番目の導出は代数計算も簡単な方法である [8].

図 1.8 から

$$\mathbf{z} = k_0 \mathbf{x} + k_1 \mathbf{y} \quad (1.4.2)$$

が成り立つ.

図 1.9 から  $DC \parallel OB$  であるから  $\triangle DGC$  と  $\triangle OFB$  とは相似な直角三角形である.

したがって

$$\frac{\overline{OB}}{\overline{BF}} = \frac{\overline{DC}}{\overline{CG}} \quad (1.8.7)$$

が成り立つ.

$\triangle DGC$  の斜辺は  $\overline{DC} = k_1 |\mathbf{y}|$  であり, 高さは  $\overline{CG} = r \sin t\theta$  である. また  $\triangle OFB$  の斜辺は  $\overline{OB} = |\mathbf{y}|$  であり, 高さ  $\overline{BF} = r \sin \theta$  である.

これから

$$\frac{|\mathbf{y}|}{r \sin \theta} = \frac{k_1 |\mathbf{y}|}{r \sin t\theta} \quad (1.8.8)$$

が導かれる<sup>21</sup>.

つぎに  $DC \parallel OB$  であるから,  $\angle COB = \angle OCD = (1-t)\theta$  が成り立つ.

$k_0 \mathbf{x}, k_1 \mathbf{y}, \mathbf{z}$  でつくられた三角形において, 三角形の正弦法則を用いれば,

$$\frac{k_0 |\mathbf{x}|}{\sin(1-t)\theta} = \frac{k_1 |\mathbf{y}|}{\sin t\theta} \quad (1.8.9)$$

が成り立つ.

<sup>21</sup> [8] では  $\overline{CG}$  を図 1.9 の三角形  $\triangle DGC$  の高さと考えれば,  $\overline{CG} = k_1 |\mathbf{y}| \sin \theta$  が得られ, また三角形  $\triangle OGC$  の高さと考えれば,  $\overline{CG} = r \sin t\theta$  が得られる. これが等しいから, (1.8.8) の両辺に  $r$  をかけた式が得られる. ここで, もちろん  $r = |\mathbf{y}|$  を用いている.

(1.8.8) から

$$k_1 = \frac{\sin t\theta}{\sin \theta} \quad (1.8.10)$$

と求められ, (1.8.9),(1.8.10) から

$$k_0 = \frac{\sin(1-t)\theta}{\sin \theta} \quad (1.8.11)$$

と求められる.

この導出では正弦法則を使うことを思いつきさえすれば, 後の計算は簡単である<sup>22</sup>.

### 1.8.6 付録6 Gram-Schmidt の正規直交化

ここではベクトル  $\mathbf{x}$  に正規直交するベクトルをベクトル  $\mathbf{y}$  と  $\mathbf{x}$  とからつくる.

ベクトル  $\mathbf{x}$  に直交する, 新しいベクトルを  $\mathbf{v}$  とする. そのベクトルの主要な成分はベクトル  $\mathbf{y}$  であるから,

$$\mathbf{v} = \mathbf{y} - a\mathbf{x}$$

とおく. ここで  $a$  は未定の係数である. この未定の係数  $a$  を  $\mathbf{v}$  と  $\mathbf{x}$  とが直交するという条件から決めることができる. すなわち,

$$\mathbf{v} \cdot \mathbf{x} = \mathbf{x} \cdot \mathbf{y} - a|\mathbf{x}|^2 = 0$$

したがって

$$a = \frac{\mathbf{x} \cdot \mathbf{y}}{|\mathbf{x}|^2} = \cos \theta$$

となる. ここで  $\theta$  はベクトル  $\mathbf{x}$  と  $\mathbf{y}$  とのなす角である.

しかし, こうやって求められたベクトル  $\mathbf{v}$  はまだ大きさが  $r$  に正規化されていない. いまベクトル  $\mathbf{v}$  の大きさを  $r$  に正規化したときのベクトルを  $\mathbf{w}$  と表せば,

$$\mathbf{w} = N\mathbf{v}$$

と表される. ここで  $N$  は正規化定数である.

いま,  $|\mathbf{w}| = r$  となるように  $N$  を求めよう.

$$N^2|\mathbf{v}|^2 = |\mathbf{w}|^2 = r^2$$

であるから

$$N^2 = \frac{r^2}{|\mathbf{v}|^2} = \frac{1}{\sin^2 \theta}$$

$N > 0$  であるから

$$N = \frac{r}{|\mathbf{v}|} = \frac{1}{\sin \theta}$$

となる. ここで,  $\mathbf{v} = \mathbf{y} - (\cos \theta)\mathbf{x}$  であるから  $|\mathbf{v}|^2 = r^2 \sin^2 \theta$  となることを用いた.

すなわち, 大きさ  $r$  に正規直交化されたベクトル  $\mathbf{w}$  は

$$\mathbf{w} = \frac{1}{\sin \theta}[\mathbf{y} - (\cos \theta)\mathbf{x}] \quad (1.8.12)$$

と求められる.

---

<sup>22</sup> [8] では正弦法則を使うとは明言していない.

### 1.8.7 付録7 $w$ の代入計算

(1.8.12) を (1.8.2) に代入すれば

$$\begin{aligned} \mathbf{z} &= (\cos t\theta)\mathbf{x} + (\sin t\theta)\frac{\mathbf{y} - (\cos \theta)\mathbf{x}}{\sin \theta} \\ &= \left(\cos t\theta - \frac{\sin t\theta \cos \theta}{\sin \theta}\right)\mathbf{x} + \frac{\sin t\theta}{\sin \theta}\mathbf{y} \\ &= \frac{\sin(1-t)\theta}{\sin \theta}\mathbf{x} + \frac{\sin t\theta}{\sin \theta}\mathbf{y} \end{aligned} \quad (1.5.3)$$

### 1.8.8 付録8 四元数の差分

四元数の差分は実数の差分とは違っている [10]. 2つの四元数  $x$  と  $y$  があり,  $x$  を原点のまわりに角度  $\theta$  回転すれば,  $y$  になるとき, この角変位として四元数  $x$  と  $y$  の差分  $\Delta z$  が定義される. すなわち

$$(\Delta z)x = y \quad (1.8.13)$$

と表すことができる.

いま差分としての角変位  $\Delta z$  を求めたい. それには (1.8.13) に右から  $x^{-1}$  をかけて

$$\Delta z = yx^{-1} \quad (1.6.1)$$

と求められる.

角変位  $\Delta z$  は差分という語のイメージからすれば,  $y$  と  $x$  との差であるかのように感じられるが, 四元数の場合には四元数の乗算と逆数を用いて表される. そのイメージのギャップがあるので, 慣れることが必要である.

### 1.8.9 付録9 (1.6.2) の計算

この (1.6.2) の計算するためにはまず差分  $\Delta z$  のべき乗を定義する必要がある. またそのために四元数の指数関数と対数関数を定義しなければならない. それらについては付録11で説明する. いま  $|x| = 1$  であるから,  $x^{-1} = \bar{x}$  が成り立つ. ここで  $\bar{x}$  は  $x$  の共役四元数である.  $x = 1, y = \cos \theta + \mathbf{n} \sin \theta$  ととったから

$$y\bar{x} = \cos \theta + \mathbf{n} \sin \theta = e^{\mathbf{n}\theta}$$

となる. ここで

$$e^{\mathbf{n}\theta} = \cos \theta + \mathbf{n} \sin \theta \quad (1.8.14)$$

を用いた<sup>23</sup>. (1.8.14) を用いれば

$$\begin{aligned} (\Delta z)^t &= (yx^{-1})^t \\ &= \exp[t \log(y\bar{x})] \\ &= \exp(t\mathbf{n}\theta) \\ &= \exp(\mathbf{n}t\theta) \\ &= \cos t\theta + \mathbf{n} \sin t\theta \end{aligned} \quad (1.6.2)$$

となる.

---

<sup>23</sup>(1.8.14) の導出は付録12で述べる.

### 1.8.10 付録 10 四元数の極形式表示

複素数  $z = x + iy$  は極形式で

$$z = x + iy = re^{i\theta} = r(\cos \theta + i \sin \theta)$$

と表される. これと同じように四元数を極形式 (polar form) で表すことを考えよう [11].  
その前に複素数の極形式について少し振り返ってみよう.

$$\begin{aligned} r = |z| & : \text{複素数 } z \text{ の絶対値,} \\ \theta = \arg(z) & : \text{複素数 } z \text{ の偏角,} \\ |e^{i\theta}| = 1 & : e^{i\theta} \text{ の絶対値が } 1 \end{aligned}$$

であることを思い出そう. これは

1. 任意の複素数は絶対値と大きさ 1 の複素数 (単位複素数) との積で表せる.
2. 単位複素数は複素数の指数関数で表せる.

ことを示している.

同じことを四元数 (quaternion) についても行うことができる. 以下にこのことを示す.  
いま一般の四元数を  $p$  とし,

$$p = w + ix + jy + kz$$

と表す. このとき

$$|p|^2 = p\bar{p} = (w + ix + jy + kz)(w - ix - jy - kz) = w^2 + x^2 + y^2 + z^2$$

となる. したがって四元数の大きさ  $m = |p|$  は

$$m = |p| = \sqrt{w^2 + x^2 + y^2 + z^2}$$

と表される.

いま

$$p = m \frac{p}{m}$$

と表せば,

$$u = \frac{p}{m} = W + iX + jY + kZ$$

は単位四元数である. すなわち,

$$u\bar{u} = 1$$

が成り立つ. したがって

$$|u|^2 = W^2 + X^2 + Y^2 + Z^2 = 1$$

であるから

$$W = \cos \theta, \quad X = n_x \sin \theta, \quad Y = n_y \sin \theta, \quad Z = n_z \sin \theta$$

と表すことができる. また

$$|\mathbf{n}|^2 = n_x^2 + n_y^2 + n_z^2 = 1, \quad \mathbf{n} = in_x + jn_y + kn_z$$

を満たすので

$$|u| = 1$$

が成り立つ.

したがって

$$\begin{aligned} u &= W + iX + jY + kZ \\ &= \cos \theta + \mathbf{n} \sin \theta \\ &= e^{\mathbf{n}\theta} \end{aligned}$$

と表すことができる.

したがって

$$\begin{aligned} p &= mu \\ &= |p|e^{\mathbf{n}\theta} \\ &= \sqrt{w^2 + x^2 + y^2 + z^2}e^{\mathbf{n}\theta} \end{aligned}$$

と複素数に類似の形の極形式で表すことができる.

### 1.8.11 付録 11 四元数の指数関数, 対数関数, べき乗

最終目的は四元数の差分のべき乗を定義したいのだが, そのために四元数の指数関数と対数関数を定義する [12].

はじめに四元数  $p = w + ix + jy + kz = w + \mathbf{r}$  の指数関数  $\exp p = \exp(w + ix + jy + kz)$  を考えよう.

四元数のスカラー (実数) 部分  $w$  はベクトル (虚数) 部分  $ix + jy + kz$  と交換するから

$$\exp p = e^w \exp(ix + jy + kz)$$

と二つの部分の積に書くことができる.

付録 12 で

$$\exp(ix + jy + kz) = e^{\mathbf{n}\theta} = \cos \theta + \mathbf{n} \sin \theta$$

と表されることを示した.

したがって

$$\begin{aligned} \exp p &= e^w \exp \mathbf{n}\theta \\ &= e^w (\cos \theta + \mathbf{n} \sin \theta) \end{aligned} \tag{1.8.15}$$

で四元数  $p$  の指数関数を表す.

この (1.8.15) は  $p = q, w = a, ix + jy + kz = \mathbf{v}, \theta = r = |\mathbf{v}|, \mathbf{n} = \frac{ix+jy+kz}{r} = \frac{\mathbf{v}}{|\mathbf{v}|}$ , とおけば, [12] の p.13 の四元数の指数関数  $\exp q$

$$\exp q = e^a \left( \cos |\mathbf{v}| + \frac{\mathbf{v}}{|\mathbf{v}|} \sin |\mathbf{v}| \right)$$

と同一である.

また,  $w = 0$  とおき,  $\theta = \alpha, \frac{ix+jy+kz}{r} = in_x + jn_y + kn_z = \mathbf{n}$  とすれば, この式は [13] の p.169 の 9-16 式

$$\exp \mathbf{p} = \cos \alpha + \mathbf{n} \sin \alpha$$

と同一である.

続いて四元数の対数関数を定義するが、そのためには四元数の極表示を用いる必要がある。付録 10 で見たように四元数  $p$  は

$$p = |p|e^{\mathbf{n}\theta}, \quad \mathbf{n} = in_x + jn_y + kn_z$$

と極形式で表すことができる。いま

$$p = w + \mathbf{r}, \quad \mathbf{r} = xi + yj + zk$$

とおけば、

$$\begin{aligned} e^{\mathbf{n}\theta} &= \frac{w}{|p|} + \frac{\mathbf{r}}{|p|} \\ \cos \theta + \mathbf{n} \sin \theta &= \frac{w}{|p|} + \frac{\mathbf{r}}{|p|} \end{aligned}$$

となる。

したがって、

$$\cos \theta = \frac{w}{|p|}, \quad \mathbf{n} \sin \theta = \frac{\mathbf{r}}{|p|}$$

が得られる。これを  $w$  と  $\mathbf{r}$  について解けば

$$w = |p| \cos \theta, \quad \mathbf{r} = \mathbf{n}|p| \sin \theta$$

が得られる。極形式表示の  $p$  の対数をとれば、

$$\begin{aligned} \log p &= \log |p| + \log e^{\mathbf{n}\theta} \\ &= \log |p| + \mathbf{n}\theta \\ &= \log |p| + \mathbf{n} \arccos\left(\frac{w}{|p|}\right) \end{aligned}$$

が四元数の対数関数の定義である。ここで  $\theta = \arccos \frac{w}{|p|}$  を用いた。最後の式で  $p = q, w = a, \mathbf{n} = \frac{\mathbf{v}}{|\mathbf{v}|}$  でおきかえれば [12] の p.13 の対数関数の定義

$$\log q = \log |q| + \frac{\mathbf{v}}{|\mathbf{v}|} \arccos \frac{a}{|q|}$$

になる。

四元数の指数関数と対数関数とは互いに逆関数であるので

$$\exp \log p = p$$

が成り立つ。

最後に四元数のべき乗を定義しよう。四元数の指数関数と対数関数の定義を用いれば、四元数  $p$  の  $t$  乗は

$$\begin{aligned} p^t &= \exp(t \log p) \\ &= \exp[t(\log |p| + \mathbf{n}\theta)] \\ &= |p|^t e^{\mathbf{n}t\theta} \end{aligned}$$

で定義できる。

もっとも四元数の極形式表示  $p = |p|e^{\mathbf{n}\theta}$  を用いれば、四元数のべき乗は

$$p^t = |p|^t e^{\mathbf{n}t\theta}$$

と簡単に表すことができる。

## 1.8.12 付録 12 (1.8.14) の導出

$$e^{n\theta} = \cos \theta + \mathbf{n} \sin \theta \quad (1.8.14)$$

はエッセイ「四元数の発見 2」で求めた (24) であるが、記号を少し変えて再度ここに求めておこう [14].

一般の四元数  $p$

$$p = w + \mathbf{r}, \quad \mathbf{r} = ix + jy + kz$$

のベクトル部分  $\mathbf{r} = ix + jy + kz$  を引数とする、Napir 数  $e$  を底にとった指数関数  $e^{ix+jy+kz}$  を考えよう<sup>24</sup>.

これから証明すべき関係を先に与えておけば、

$$e^{ix+jy+kz} = \cos \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} + \frac{ix + jy + kz}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} \sin \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \quad (1.8.16)$$

である.

$e^{ix+jy+kz}$  に対して  $e^{ix}$  の Maclaurin 展開を形式的に用いれば、

$$e^{ix+jy+kz} = 1 + \frac{ix + jy + kz}{1!} + \frac{(ix + jy + kz)^2}{2!} + \frac{(ix + jy + kz)^3}{3!} + \frac{(ix + jy + kz)^4}{4!} + \dots \quad (1.8.17)$$

が得られる. この式の中に現れる  $(ix + jy + kz)^n$  が  $n = 2, 3, 4, \dots$  のときにどうなるか計算すれば

$$\begin{aligned} (ix + jy + kz)^2 &= -(x^2 + y^2 + z^2) \\ (ix + jy + kz)^3 &= -(x^2 + y^2 + z^2)(ix + jy + kz) \\ (ix + jy + kz)^4 &= (x^2 + y^2 + z^2)^2 \\ (ix + jy + kz)^5 &= (x^2 + y^2 + z^2)^2(ix + jy + kz) \\ (ix + jy + kz)^6 &= -(x^2 + y^2 + z^2)^3 \\ (ix + jy + kz)^7 &= -(x^2 + y^2 + z^2)^3(ix + jy + kz) \\ (ix + jy + kz)^8 &= (x^2 + y^2 + z^2)^4 \\ &\dots \end{aligned}$$

が得られる. ここで

$$(ix + jy + kz)^2 = -(x^2 + y^2 + z^2)$$

であることを繰り返し用いた.

それで (1.8.17) の  $(ix + jy + kz)$  の偶数べきの項では因子  $(ix + jy + kz)$  が現れないが、奇数べきの項では因子  $(ix + jy + kz)$  が現れるから、偶数べきの項と奇数べきの項を分けてそれぞれ別々にたしあわせば、

$$\begin{aligned} e^{ix+jy+kz} &= \left[ 1 - \frac{(x^2 + y^2 + z^2)}{2!} + \frac{(x^2 + y^2 + z^2)^2}{4!} - \frac{(x^2 + y^2 + z^2)^3}{6!} + \dots \right] \\ &+ \left[ \frac{ix + jy + kz}{1!} - \frac{(x^2 + y^2 + z^2)(ix + jy + kz)}{3!} + \frac{(x^2 + y^2 + z^2)^2(ix + jy + kz)}{5!} - \frac{(x^2 + y^2 + z^2)^3(ix + jy + kz)}{7!} + \dots \right] \\ &= \cos \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} + \frac{ix + jy + kz}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} \sin \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \end{aligned}$$

いま

$$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

<sup>24</sup>Napir 数とは自然対数の底として知られている定数であり、その近似値は  $e = 2.718281828$  である.

とおけば

$$e^{ix+jy+kz} = \cos r + \frac{ix+jy+kz}{r} \sin r \quad (1.8.18)$$

となる.

$$\frac{ix+jy+kz}{r} = in_x + jn_y + kn_z = \mathbf{n}$$

$$r = \theta$$

と表せば, (1.8.18) は

$$e^{\mathbf{n}\theta} = \cos \theta + \mathbf{n} \sin \theta \quad (1.8.14)$$

と表すことができる.

また (1.8.18) から

$$|e^{ix+jy+kz}| = 1$$

であることは直ちにわかる. すなわち  $e^{ix+jy+kz}$  は大きさ 1 の単位四元数である.

さらに  $x, y, z$  を 3次元の極座標  $r, \phi, \psi$  で

$$x = r \cos \phi$$

$$y = r \sin \phi \cos \psi$$

$$z = r \sin \phi \sin \psi$$

と表せば

$$e^{r(i \cos \phi + j \sin \phi \cos \psi + k \sin \phi \sin \psi)} = \cos r + (i \cos \phi + j \sin \phi \cos \psi + k \sin \phi \sin \psi) \sin r$$

と表される. これはエッセイ「四元数の発見 2」の (26) であった [14].

また

$$n_x = \frac{x}{r} = \cos \phi$$

$$n_y = \frac{y}{r} = \sin \phi \cos \psi$$

$$n_z = \frac{z}{r} = \sin \phi \sin \psi$$

であるから,

$$n_x^2 + n_y^2 + n_z^2 = 1$$

が確かに成り立つ.

(2014. 4. 12)

## 参考文献

- [1] K. Shoemake, Animating Rotation with Quaternion Curves, Computer Graphics, **19**(3), (1985) 245-254
- [2] 大槻俊明, 私信

- [3] [http://marupeke296.com/DXG\\_No57\\_SheareLinearInterWithoutQu.html](http://marupeke296.com/DXG_No57_SheareLinearInterWithoutQu.html)
- [4] M. R. Spiegel, 『数学公式・数表ハンドブック』(オーム社, 1995) 111-112
- [5] S. R. Buss, *3D Computer Graphics: A Mathematical Introduction with Open GL* (Cambridge University Press, 2003) 122-125
- [6] <http://en.wikipedia.org/wiki/Slerp>
- [7] Y. S. Kim, クォータニオンによる座標変換, <http://www.purose.net/~y-kim/>
- [8] F. Dunn and I. Parberry (松田晃一 訳), 『ゲーム 3D 数学』(オーライリー・ジャパン, 2008) 172-176
- [9] 堀源一郎, 『ハミルトンと四元数』(海鳴社, 2007)
- [10] F. Dunn and I. Parberry (松田晃一 訳), 『ゲーム 3D 数学』(オーライリー・ジャパン, 2008) 167-168
- [11] <http://rip94550.wordpress.com/2010/08/02/Quaternions>
- [12] <http://en.wikipedia.org/wiki/Quaternion>
- [13] F. Dunn and I. Parberry (松田晃一 訳), 『ゲーム 3D 数学』(オーライリー・ジャパン, 2008) 169-170
- [14] 矢野 忠, 四元数の発見 2, 数学・物理通信, 第 2 巻, 第 1 号 (2012.3) 14-24

# Bessel 関数と Kepler 方程式

## Bessel Function and Kepler Equation

世戸 憲治<sup>25</sup>  
Kenji SETO<sup>26</sup>

### 2.1 はじめに

Bessel 関数<sup>1),2),3)</sup> というと、誰もが第一に思い浮かべるのは、波動方程式を極座標で解くときに動径成分に出てくる関数というものだろう。2次元波動方程式のときは、整数次の Bessel 関数、3次元のときは半整数次の Bessel 関数が出てくる。Bessel 関数というのは、波動方程式を解くために作られた関数と思われがちだが実際はそうではない。

Friedrich Wilhelm Bessel (1784-1846) が Bessel 関数を考えたのは、当時問題になっていた惑星の運動を記述する Kepler 方程式を解くためであった。ただし、Bessel 関数は Bessel が考えるよりも前から存在した。1724年、Daniel Bernoulli (1700-1782) が Riccati 型の微分方程式を解くために使ったのが初めと言われる。また、同じ Bernoulli が重力下で吊るした鎖の運動を論じたときも 0 次の Bessel 関数が使われている<sup>4)</sup>。その後、Euler, Lagrange, Fourier, Poisson 等により研究され、整数次の Bessel 関数に拡張されたが、この関数にはまだ名前がなかった。1824年、Bessel が Kepler 問題を解決した論文を発表したときに、この関数のそれまでの成果をまとめたために、彼の名を冠する Bessel 関数ということになったらしい。その後もこの関数は Hankel, Lommel, Neumann, Schläfli らによって研究され非整数次の場合まで拡張され、20世紀前半までには特殊関数の中で最も重要な位置を占める関数となった。

この Bessel が解決した Kepler 方程式の導出方法、およびその解法については、通常の力学教科書では扱っていないので、知る人ぞ知るものかもしれないが、一般的にはほとんど知られていないように思われる。ここでは、新しいことはほとんどないが、Kepler 問題の成立過程からその解決までを必要最小限の形で、出来る限り易しく予備知識なしで読めることに焦点を当て、書くことにした。

つぎの第 2.2 節では、惑星運動を解くための準備として、極座標による速度、加速度の表示、また、楕円の極座標による表示について述べる。第 2.3 節では、実際に、惑星運動が楕円軌道になることと、その位置を時間の関数として求めるための Kepler 方程式を導く。第 2.4 節で Bessel 関数の準備をしてから、この Kepler 方程式の厳密解を求める。また、この過程での副産物としての Bessel 関数に関するいくつかの公式について述べる。最後の 2.5 節では、アイソン彗星のような双曲線軌道、あるいは、放物線軌道になる場合の Kepler 方程式について述べる。

---

<sup>25</sup> 北海学園大学名誉教授

<sup>26</sup> seto@pony.ocn.ne.jp

## 2.2 惑星運動を解くための準備

### 2.2.1 速度, 加速度の極座標表示

2次元平面上に静止したデカルト座標系  $(x, y)$  をとり, この平面上で動く質点の運動を考える. この質点の位置ベクトルを  $\mathbf{r}$  とする. 極座標  $(r, \theta)$  を導入したとき, デカルト座標との関係がどうなるかを調べてみよう. 質点が位置  $\mathbf{r}$  にあるときの  $r$  方向,  $\theta$  方向の単位ベクトルを, それぞれ,  $\mathbf{e}_r, \mathbf{e}_\theta$  とする. もちろん, これらは質点が動くにしたがい時間と共に変化するベクトルである. これら  $\mathbf{e}_r, \mathbf{e}_\theta$  をデカルト座標の  $x, y$  方向の単位ベクトル  $\mathbf{i}, \mathbf{j}$  で表わすと,

$$\mathbf{e}_r = \cos \theta \mathbf{i} + \sin \theta \mathbf{j}, \quad \mathbf{e}_\theta = -\sin \theta \mathbf{i} + \cos \theta \mathbf{j} \quad (2.2.1)$$

となる. これらの式を時間  $t$  で微分すると

$$\frac{d\mathbf{e}_r}{dt} = \frac{d\theta}{dt} \mathbf{e}_\theta, \quad \frac{d\mathbf{e}_\theta}{dt} = -\frac{d\theta}{dt} \mathbf{e}_r \quad (2.2.2)$$

となることが容易に証明される.

つぎに, この質点の速度  $d\mathbf{r}/dt$  を極座標で表してみる.  $\mathbf{r} = r\mathbf{e}_r$  と書けることに注意して, (2.2.2) 式を使うと,

$$\frac{d\mathbf{r}}{dt} = \frac{dr}{dt} \mathbf{e}_r + r \frac{d\theta}{dt} \mathbf{e}_\theta \quad (2.2.3)$$

となり, さらに時間で微分して加速度を求めると,

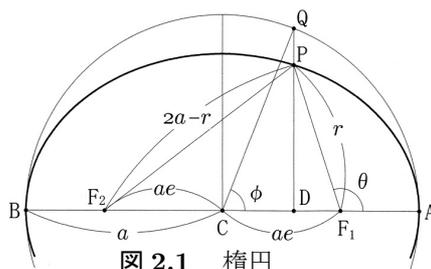
$$\frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2} = \frac{d^2r}{dt^2} \mathbf{e}_r + 2 \frac{dr}{dt} \frac{d\theta}{dt} \mathbf{e}_\theta + r \frac{d^2\theta}{dt^2} \mathbf{e}_\theta - r \left( \frac{d\theta}{dt} \right)^2 \mathbf{e}_r \quad (2.2.4)$$

となるが, これはまとめ直すと

$$\frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2} = \left[ \frac{d^2r}{dt^2} - r \left( \frac{d\theta}{dt} \right)^2 \right] \mathbf{e}_r + \frac{1}{r} \frac{d}{dt} \left( r^2 \frac{d\theta}{dt} \right) \mathbf{e}_\theta \quad (2.2.5)$$

となる.

### 2.2.2 楕円の極座標表示



楕円は2個の焦点  $F_1, F_2$  からの距離の和が一定値になるような点  $P$  の軌跡である. ここでは, 距離の和を  $2a$ , 2個の焦点間の距離を  $2ae$  ( $0 \leq e < 1$ ) とする. 図 2.1 に示すように, 点  $P$  をとったとき,  $F_1P$  の距離を  $r$ ,  $F_1P$  が極座標の基線となす角を  $\theta$  とする. このとき,  $F_2P$  間の距離は  $2a - r$  となるので,  $P$  から基線に下ろした垂線の足を  $D$  とし, 三角形  $F_2DP$  に三平方の定理を適用すると,

$$(2ae + r \cos \theta)^2 + (r \sin \theta)^2 = (2a - r)^2 \quad (2.2.6)$$

となる. これを整理して,

$$r = \frac{\ell}{1 + e \cos \theta}, \quad \ell = a(1 - e^2) \quad (2.2.7)$$

を得る。これが極座標で表した楕円の方程式である。  $e$  は離心率と呼ばれ、また、  $\ell$  は  $\theta = \pi/2$  のときの  $r$  の値であるがこれは半直弦と呼ばれる。  $a$  がこの楕円の長半径となることは明らかであるが、短半径  $b$  は  $b = a\sqrt{1-e^2}$  となるので、半直弦  $\ell$  は  $\ell = b^2/a$  とも書かれる。離心率  $e$  が 0 に近いほど円に近くなり、1 に近いほど細長い楕円になる。

楕円の中心を  $C$  とする。線分  $DP$  を延長し、半径  $a$  の円との交点を  $Q$  とする。このとき  $CQ$  と基線がなす角を  $\phi$  とする。この  $\phi$  は離心近点角と呼ばれる。ちなみに、 $\theta$  は真近点角と呼ばれる。これらの名前は天文学者によって付けられたもので、それぞれに名前の由来があるのであろう。離心近点角  $\phi$  は、図からわかるように、

$$\cos \phi = \frac{ae + r \cos \theta}{a} \quad (2.2.8)$$

である。これに (2.2.7) 式の  $r$  を代入すると

$$\cos \phi = \frac{e + \cos \theta}{1 + e \cos \theta} \quad (2.2.9)$$

となるが、これを逆に解いて、

$$\cos \theta = \frac{\cos \phi - e}{1 - e \cos \phi} \quad (2.2.10)$$

を得る。この式を (2.2.7) 式に戻してやると

$$r = a(1 - e \cos \phi) \quad (2.2.11)$$

と、 $r$  と  $\cos \phi$  の関係式は分数を使わない式で表わされる。

なお後での使用のため、(2.2.10) 式の  $\cos \theta$  から  $\sin \theta$  を求めておくと、

$$\sin \theta = \sqrt{1 - \cos^2 \theta} = \frac{\sqrt{1 - e^2} \sin \phi}{1 - e \cos \phi} \quad (2.2.12)$$

となる。この式は sine の符号が変わる点、すなわち、 $n$  を整数として  $\theta = n\pi$  のところでは、 $\phi$  も  $n\pi$  なので、 $\theta$ 、 $\phi$  を任意の値に拡張しても、符号的に問題は生じない。

## 2.3 惑星の運動

### 2.3.1 楕円軌道の導出

質量  $M$  の太陽の周りを回転する質量  $m$  の惑星の運動方程式は、万有引力定数を  $G$  として、

$$m \frac{d^2 \mathbf{r}}{dt^2} = -G \frac{Mm}{r^2} \mathbf{e}_r \quad (2.3.1)$$

で与えられる。(2.2.5) 式を用いてこの式を  $r$  方向、 $\theta$  方向に分解すると、

$$\frac{d^2 r}{dt^2} - r \left( \frac{d\theta}{dt} \right)^2 = -\frac{GM}{r^2} \quad (2.3.2)$$

および

$$\frac{d}{dt} \left( r^2 \frac{d\theta}{dt} \right) = 0 \quad (2.3.3)$$

となる。まず、(2.3.3) 式から

$$r^2 \frac{d\theta}{dt} = \text{Const.} \equiv h \quad (2.3.4)$$

は定数となるので、これを  $h$  とおく。惑星が太陽の周りに単位時間に掃く面積、すなわち面積速度は  $h/2$  なので、これは面積速度一定の法則と言われる。

本来ならば、これらの方程式から、 $r, \theta$  を時間  $t$  の関数として求めるべきであるが、それは面倒なので後回しにし、 $r$  と  $\theta$  の関係を先に求めてみよう。そのためには、この面積速度一定の式を用いて時間微分を角度  $\theta$  微分に置き換えてやる。具体的には、

$$\frac{dr}{dt} = \frac{d\theta}{dt} \frac{dr}{d\theta} = \frac{h}{r^2} \frac{dr}{d\theta} \quad (2.3.5)$$

時間の2度微分は

$$\frac{d^2 r}{dt^2} = \frac{d}{dt} \left( \frac{h}{r^2} \frac{dr}{d\theta} \right) = \frac{d\theta}{dt} \frac{d}{d\theta} \left( \frac{h}{r^2} \frac{dr}{d\theta} \right) = \frac{h}{r^2} \frac{d}{d\theta} \left( \frac{h}{r^2} \frac{dr}{d\theta} \right) \quad (2.3.6)$$

と変形して、(2.3.2) 式に代入すると、

$$\frac{h}{r^2} \frac{d}{d\theta} \left( \frac{h}{r^2} \frac{dr}{d\theta} \right) - r \left( \frac{h}{r^2} \right)^2 = -\frac{GM}{r^2} \quad (2.3.7)$$

となる。一見したところ難しそうなお式になってしまうが、ここで、長さの次元を持つ  $h^2/GM$  を

$$\ell \equiv \frac{h^2}{GM} \quad (2.3.8)$$

と定義して、少し整理すると

$$\frac{d}{d\theta} \left( \frac{\ell}{r^2} \frac{dr}{d\theta} \right) - \left( \frac{\ell}{r} - 1 \right) = 0 \quad (2.3.9)$$

となる。ここで、左辺の2項目を

$$\frac{\ell}{r} - 1 = \zeta \quad (2.3.10)$$

と変数変換し、この式の微分をとると、

$$-\frac{\ell}{r^2} dr = d\zeta \quad (2.3.11)$$

となるので、 $\zeta$  で表わした (2.3.9) 式は

$$\frac{d^2 \zeta}{d\theta^2} + \zeta = 0 \quad (2.3.12)$$

となる。この方程式の解は三角関数で表わされ、 $e, \delta_0$  を積分定数として、

$$\zeta = e \cos(\theta - \delta_0) \quad (2.3.13)$$

と表わされる。これを元の  $r$  に戻すと、

$$r = \frac{\ell}{1 + e \cos(\theta - \delta_0)} \quad (2.3.14)$$

という解が得られる。これは (2.2.7) 式の極座標における楕円を焦点  $F_1$  の周りに角度で  $\delta_0$  だけ回転したものとなるが、角度  $\theta$  を測るときの基準点を近日点（太陽に最も近い点、図 2.1 の A 点）にとることにすれば、この  $\delta_0$  は常にゼロと置いてかまわない。これで惑星の運動は、太陽に吸い込まれたり、太陽から無限に離れてしまうことなく、太陽の周りを周期的に回転する楕円軌道となることが証明された。

### 2.3.2 Kepler 方程式の導出

つぎに、時間  $t$  との関係を求めてみよう。面積速度一定の (2.3.4) 式を時間  $t$  で積分すると

$$ht = \int_0^\theta r^2 d\theta' \quad (2.3.15)$$

となる。ただし、時間  $t$  は  $\theta$  と同じく近日点から測ったものである。この式に  $\delta_0 = 0$  とした (2.3.14) 式の  $r$  を代入すると、

$$ht = \int_0^\theta \frac{\ell^2}{(1 + e \cos \theta')^2} d\theta' \quad (2.3.16)$$

となる。この積分は、このままでも実行は可能であるが、大変面倒な式になってしまう。これをスマートに実行するには、(2.3.15)式において、真近点角  $\theta$  から離心近点角  $\phi$  に変換してしまうことである。(2.2.10)式の微分をとると

$$\sin \theta d\theta = \frac{(1-e^2) \sin \phi}{(1-e \cos \phi)^2} d\phi \quad (2.3.17)$$

となるが、これに、(2.2.12)式の  $\sin \theta$  を代入すると

$$d\theta = \frac{\sqrt{1-e^2}}{1-e \cos \phi} d\phi \quad (2.3.18)$$

となる。この式と、 $r$  を  $\phi$  で表わした (2.2.11) 式を (2.3.15) 式に代入すると、

$$ht = a^2 \sqrt{1-e^2} \int_0^\phi (1-e \cos \phi') d\phi' \quad (2.3.19)$$

と分数を使わない形になる。これは簡単に積分できて、

$$ht = a^2 \sqrt{1-e^2} (\phi - e \sin \phi) \quad (2.3.20)$$

となる。 $a$  は楕円の長半径、短半径  $b$  は  $b = a\sqrt{1-e^2}$  なので、楕円の面積  $S$  は  $S = \pi ab = \pi a^2 \sqrt{1-e^2}$ 、これを面積速度  $h/2$  で割ったものが周期  $T$  なので、

$$T = \frac{2\pi a^2 \sqrt{1-e^2}}{h} \quad (2.3.21)$$

となり、(2.3.20) 式を周期  $T$  を用いて書き直すと、

$$\phi - e \sin \phi = \frac{2\pi t}{T} \quad (2.3.22)$$

となる。これが Kepler 方程式と呼ばれるものである。ただし、Kepler 自身がこの方程式の導出方法を知っていたわけではない。Johannes Kepler(1571-1630) は Sir Isaac Newton(1642-1727) より前の人だからである。Kepler は Tycho Brahe (1546-1601) が残した膨大な観測データを整理していて、この方程式を経験的に見つけたのであろう。あるいは、もっと疑ってかかれれば、Kepler 自身が本当にこの Kepler 方程式を知っていたかという疑問も湧いてくる。実際に、Kepler 方程式を Newton 力学に従って導いたのは Joseph-Louis Lagrange(1736-1813) で、Kepler 死後 140 年も経った 1770 年のことである。

## 2.4 方程式の厳密解

(2.3.22) 式によって時間  $t$  と離心近点角  $\phi$  が結び付けられるが、この式から  $\phi$  を求めようとしても超越方程式になっているので簡単ではない。この問題を解決したのが Bessel で、1817 年のことである。

### 2.4.1 Bessel 関数の準備

この方程式を解く前に Bessel 関数に関する基礎知識が必要である。Bessel 関数の母関数と言われる  $\exp[(z/2)(t-1/t)]$  を 2 個の積に分けて Taylor 展開すると

$$\exp\left[\frac{z}{2}\left(t - \frac{1}{t}\right)\right] = \left[\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \left(\frac{zt}{2}\right)^k\right] \left[\sum_{\ell=0}^{\infty} \frac{1}{\ell!} \left(-\frac{z}{2t}\right)^\ell\right] \quad (2.4.1)$$

となるが、この括弧をはずして  $t$  の幂でそろえる、すなわち、Laurent 展開の形にすると

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \left[ \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{m!(n+m)!} \left(\frac{z}{2}\right)^{n+2m} \right] t^n + \sum_{n=1}^{\infty} \left[ \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n+m}}{m!(n+m)!} \left(\frac{z}{2}\right)^{n+2m} \right] t^{-n} \quad (2.4.2)$$

となる。この式の1項目の  $t^n$  に付く係数は非負整数  $n$  に対する  $n$  次の Bessel 関数の定義

$$J_n(z) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{m!(n+m)!} \left(\frac{z}{2}\right)^{n+2m} \quad (2.4.3)$$

そのものである。また、この定義を負整数の  $n$  に拡張すると、負整数の階乗は無限大として、

$$\begin{aligned} J_{-n}(z) &= \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{m!(-n+m)!} \left(\frac{z}{2}\right)^{-n+2m} = \sum_{m=n}^{\infty} \frac{(-1)^m}{m!(-n+m)!} \left(\frac{z}{2}\right)^{-n+2m} \\ &= \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n+m}}{(n+m)!m!} \left(\frac{z}{2}\right)^{n+2m} = (-1)^n J_n(z) \end{aligned} \quad (2.4.4)$$

となるので、結果としてこの展開式は

$$\exp\left[\frac{z}{2}\left(t - \frac{1}{t}\right)\right] = \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(z)t^n \quad (2.4.5)$$

となる。これが Bessel 関数の母関数表示と言われるものである。

つぎに、この (2.4.5) 式の両辺を  $t^{n+1}$  で割り、複素  $t$  平面の原点周りに1周する積分を考える。Cauchy の積分定理より、右辺は  $2\pi i J_n(z)$  となり、

$$2\pi i J_n(z) = \oint \frac{1}{t^{n+1}} \exp\left[\frac{z}{2}\left(t - \frac{1}{t}\right)\right] dt \quad (2.4.6)$$

なる結果を得る。この右辺の積分で、 $t$  から  $\phi$  に  $t = e^{i\phi}$  と積分変数を変換すると<sup>27</sup>

$$J_n(z) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{-i(n\phi - z \sin \phi)} d\phi \quad (2.4.7)$$

となるが、この積分区間を  $[-\pi, 0]$  と  $[0, \pi]$  に分割し、 $[-\pi, 0]$  の方の積分で  $\phi$  の符号を変えると

$$J_n(z) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \cos(n\phi - z \sin \phi) d\phi \quad (2.4.8)$$

という式を得る。この式は Bessel によって見出されたもので、Bessel の積分表示式と呼ばれる。この式の中には、 $\phi$  と  $\sin \phi$  の線形結合が含まれており、すでに Kepler 方程式と関係がありそうな雰囲気漂わせている。

## 2.4.2 Kepler 方程式の解法

以下では、Kepler 方程式 (2.3.22) の右辺を無次元時間  $\tau$  として、

$$\tau \equiv \frac{2\pi t}{T} \quad (2.4.9)$$

と定義し、この式を

$$\phi - e \sin \phi = \tau \quad (2.4.10)$$

と書いておく。この方程式から、 $n$  を整数として  $\tau = n\pi$  のとき  $\phi$  も  $n\pi$  となること、また、 $\phi, \tau$  の符号を同時に替えても方程式は不変であることから、 $\phi$  は  $\tau$  の奇関数となること、さらに、 $\phi \rightarrow \phi + 2\pi, \tau \rightarrow \tau + 2\pi$  と平行移動させても方程式は不変であることから、 $\phi - \tau$  は周期  $2\pi$  の周期関数となることがわかる。そこで、 $\phi - \tau$  を Fourier-sine 級数で展開し、

$$\phi - \tau = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin(n\tau) \quad (2.4.11)$$

<sup>27</sup>記号  $e$  が重複してしまったが、自然対数の底を  $e$ 、離心率の方を  $e$  と区別することにする。

と置く．両辺に  $\sin(m\tau)$  を掛けて  $\tau$  積分をする．sine 関数の直交性

$$\int_0^\pi \sin(n\tau) \sin(m\tau) d\tau = \frac{\pi}{2} \delta_{n,m} \quad (2.4.12)$$

を使うと，係数  $A_n$  が

$$A_n = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi (\phi - \tau) \sin(n\tau) d\tau \quad (2.4.13)$$

と積分で表わされる．ここで，部分積分を施すと， $\tau = 0, \pi$  で  $\phi - \tau$  がゼロとなることに注意して，

$$A_n = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi \frac{\cos(n\tau)}{n} \left( \frac{d\phi}{d\tau} - 1 \right) d\tau = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi \frac{\cos(n\tau)}{n} \frac{d\phi}{d\tau} d\tau \quad (2.4.14)$$

となり，この最後の積分で Kepler 方程式 (2.4.10) を用いて積分変数を  $\tau$  から  $\phi$  に変えると，

$$A_n = \frac{2}{\pi n} \int_0^\pi \cos[n(\phi - e \sin \phi)] d\phi \quad (2.4.15)$$

となる．これは (2.4.8) 式で用意した Bessel の積分表示式と同じ型のもので，結果として，

$$A_n = \frac{2}{n} J_n(ne) \quad (2.4.16)$$

を得る．以上の結果から， $\phi$  が

$$\phi = \tau + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n} J_n(ne) \sin(n\tau) \quad (2.4.17)$$

と Bessel 関数を係数とする三角級数の形で求められる．

$\phi$  が時間の関数として求められたので  $\cos \phi$  は求まった  $\phi$  を代入すればよいのだが，もっと，気の利いた方法として，

$$\cos \phi = B_0 + \sum_{n=1}^{\infty} B_n \cos(n\tau) \quad (2.4.18)$$

と Fourier-cosine 級数に展開して求めてみる．先に  $B_0$  を求めるために，この式の両辺を  $\tau$  で積分してから，部分積分をすると，

$$\pi B_0 = \int_0^\pi \cos \phi d\tau = \tau \cos \phi \Big|_0^\pi + \int_0^\pi \tau \sin \phi \frac{d\phi}{d\tau} d\tau \quad (2.4.19)$$

となり， $\tau = \pi$  のとき  $\phi$  も  $\pi$ ，また，2 項目に関しては，Kepler 方程式を利用して， $\tau$  積分を  $\phi$  積分に変換すると，

$$\pi B_0 = -\pi + \int_0^\pi (\phi - e \sin \phi) \sin \phi d\phi \quad (2.4.20)$$

この積分を実行すると

$$B_0 = -\frac{e}{2} \quad (2.4.21)$$

と決まる． $n$  が 1 以上の  $B_n$  を決めるには，(2.4.18) の両辺に  $\cos(m\tau)$  を掛け，cosine 関数の直交性

$$\int_0^\pi \cos(n\tau) d\tau = 0, \quad \int_0^\pi \cos(n\tau) \cos(m\tau) d\tau = \frac{\pi}{2} \delta_{n,m}, \quad n, m \geq 1 \quad (2.4.22)$$

を使うと，

$$\frac{\pi}{2} B_n = \int_0^\pi \cos(n\tau) \cos \phi d\tau \quad (2.4.23)$$

後は，前と同じく部分積分をし，Kepler 方程式を用いて  $\tau$  を消去し， $\phi$  積分に変える．三角関数の積和公式を用いて 2 項に分け，Bessel の積分表示式を用いると，結果は

$$B_n = \frac{1}{n} [J_{n-1}(ne) - J_{n+1}(ne)] \quad (2.4.24)$$

と求められる。したがって、 $\cos \phi$  は

$$\cos \phi = -\frac{e}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} [J_{n-1}(ne) - J_{n+1}(ne)] \cos(n\tau) \quad (2.4.25)$$

と求められる。この結果を (2.2.11) 式に代入すると動径成分  $r$  が時間の関数として、

$$r = a \left(1 + \frac{e^2}{2}\right) - ae \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} [J_{n-1}(ne) - J_{n+1}(ne)] \cos(n\tau) \quad (2.4.26)$$

と求められたことになる。

真近点角  $\theta$  の余弦  $\cos \theta$  は同じように求められるだろうか。 (2.2.10) 式を

$$\cos \theta = -\frac{1}{e} + \left(\frac{1-e^2}{e}\right) \frac{1}{1-e \cos \phi} \quad (2.4.27)$$

と変形しておく。この2項目を求めるために、Kepler 方程式 (2.4.10) を  $\tau$  で微分すると、

$$\frac{d\phi}{d\tau} = \frac{1}{1-e \cos \phi} \quad (2.4.28)$$

となり、一方、これは解である (2.4.17) 式を  $\tau$  で微分したものに等しいので、

$$\frac{1}{1-e \cos \phi} = 1 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} J_n(ne) \cos(n\tau) \quad (2.4.29)$$

となる。これを (2.4.27) 式に代入すると、

$$\cos \theta = -e + \frac{2(1-e^2)}{e} \sum_{n=1}^{\infty} J_n(ne) \cos(n\tau) \quad (2.4.30)$$

という結果を得る。ただし、この式は (2.4.17) (2.4.25) 式に比べ収束性が悪い。

### 2.4.3 Bessel 関数に関する余計な公式

ついでながら、(2.4.29) 式で、 $\tau = 0$  のときは  $\phi$  も 0 なので、Bessel 関数の公式

$$1 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} J_n(ne) = \frac{1}{1-e} \quad (2.4.31)$$

を得る。同様に、(2.4.25) 式で、 $\tau = 0$  とすると、公式

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} [J_{n-1}(ne) - J_{n+1}(ne)] = 1 + \frac{e}{2} \quad (2.4.32)$$

が得られる。さらに、Bessel 関数の微分公式

$$J_{n-1}(z) - J_{n+1}(z) = 2 \frac{d}{dz} J_n(z) \quad (2.4.33)$$

を用いてこの式を  $e$  で積分すると

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n^2} J_n(ne) = e + \frac{e^2}{4} \quad (2.4.34)$$

を得る。(2.4.31) (2.4.32) 式は、公式集では Kapteyn 展開の式として載っている<sup>5),6)</sup>。(2.4.34) 式も含めこれら3式については、ちょっと怪しい気もしたので、 $n$  の和を 30 までとることにして数値的に調べたところ、 $e$  の値が 1 に近づくと収束性は悪くなるが、 $|e| < 1$  の範囲で両辺の値は良く一致している。この結果から間違いなく本物で、疑うこともなかったのであるが、しかし、 $e > 1$  ではまったく一致しない。これは初めから楕円軌道を仮定しているため、当然のことであろう。つまり、これらの式では  $e < 1$  の領域から  $1 < e$  の領域に解析接続ができないようになっている。しかし、こんな式は何の役に立つのだろうか。

## 2.5 非周期的な軌道の場合

### 2.5.1 離心率 $e$ が 1 より大の場合

この原稿を書いている 2013 年 11 月の時点で、アイソン彗星のことが話題になった。この彗星は離心率が 1 より大きく双曲線軌道を動いているので、太陽に接近した後は無限の彼方に遠ざかってしまうことが分かっていた。しかし残念なことに、肉眼でも大きく見えるはずだったこの彗星は、太陽に近づきすぎたため 11 月 29 日の時点で崩壊してしまった。

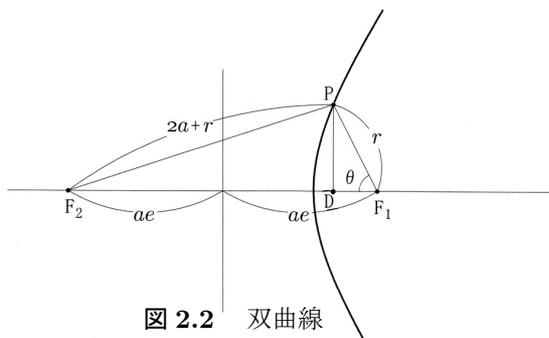


図 2.2 双曲線

ここで、離心率  $e$  が 1 より大きく双曲線軌道を描く場合を扱ってみる。双曲線は 2 個の焦点  $F_1, F_2$  からの距離の差が一定になるような点  $P$  の軌跡として定義される。図 2.2 に示すように、2 個の焦点間の距離を  $2ae (e > 1)$  とし、距離  $F_2P$  から  $F_1P$  を引いた値を  $2a$  とする。したがって、距離  $F_1P$  を  $r$  とすると距離  $F_2P$  は  $2a + r$  となる。また、 $F_1P$  が基線となす角を  $\theta$  とする。ただし、ここでの  $\theta$  の取り方は図 2.1 のものとは逆であることに注意する。この方が、楕円のとき扱った式との類推がしやすいからである。ここで、点  $P$  から基線に下ろした垂線の足を  $D$  とし、三角形  $F_2DP$  に三平方の定理を適用すると

$$(2ae - r \cos \theta)^2 + (r \sin \theta)^2 = (2a + r)^2 \quad (2.5.1)$$

となる。これを整理して、

$$r = \frac{\ell}{1 + e \cos \theta}, \quad \ell = a(e^2 - 1) \quad (2.5.2)$$

を得る。これが極座標で表した双曲線の式である。この式で、 $\pi/2$  から  $\pi$  の間で分母がゼロとなる  $\theta$  を  $\theta_0$ 、すなわち、

$$\cos \theta_0 = -1/e \quad (2.5.3)$$

としたとき、 $\theta$  の動く範囲は  $-\theta_0 < \theta < \theta_0$  である。

つぎに、楕円のときの離心近点角  $\phi$  に相当するものを導入するわけだが、この場合は周期運動ではないので、幾何学的な意味付けをすることは難しい。そこで強引に双曲線関数を用いて (2.2.9) 式に相当する変数変換として、

$$\cosh \phi = \frac{\cos \theta + e}{1 + e \cos \theta} \quad (2.5.4)$$

を導入する。この式で  $\theta$  が  $(-\theta_0, \theta_0)$  の範囲を動くとき、 $\phi$  は  $(-\infty, \infty)$  の範囲を動く。また、この式を逆に解くと、

$$\cos \theta = \frac{\cosh \phi - e}{1 - e \cosh \phi} \quad (2.5.5)$$

となり、これを (2.5.2) 式に代入すると

$$r = a(e \cosh \phi - 1) \quad (2.5.6)$$

を得る。これが (2.2.11) 式に相当する式である。さらに (2.5.5) 式の微分をとると、

$$\sin \theta d\theta = \frac{(e^2 - 1) \sinh \phi}{(1 - e \cosh \phi)^2} d\phi \quad (2.5.7)$$

となり, (2.5.5) 式から  $\sin \theta$  を求めると,

$$\sin \theta = \sqrt{1 - \cos^2 \theta} = \frac{\sqrt{e^2 - 1} \sinh \phi}{e \cosh \phi - 1} \quad (2.5.8)$$

となるので, (2.5.7) 式は

$$d\theta = \frac{\sqrt{e^2 - 1}}{e \cosh \phi - 1} d\phi \quad (2.5.9)$$

と変形される. ここで, 面積速度一定の (2.3.4) 式に, この式と (2.5.6) 式の  $r$  を代入すると,

$$a^2 \sqrt{e^2 - 1} (e \cosh \phi - 1) d\phi = h dt \quad (2.5.10)$$

となり, これは容易に積分でき,

$$e \sinh \phi - \phi = \tau \quad (2.5.11)$$

という式を得る. ただし, ここで, 無次元時間  $\tau$  を

$$\tau = \frac{ht}{a^2 \sqrt{e^2 - 1}} \quad (2.5.12)$$

と定義した. この (2.5.11) 式が双曲線軌道をとる場合の Kepler 方程式である. この方程式を解くことは,  $0 \leq e < 1$  の楕円のときの解を  $1 < e$  に解析接続するわけにはいかないのが, 簡単ではない. そのうえ,  $\tau \rightarrow \infty$  で  $\phi$  も無限大になってしまうので  $\phi$  そのものを変換する方法は考えられない. この方程式から  $\phi$  は  $\tau$  の奇関数として求められるので,  $\tau \geq 0$  の範囲での解が求められるとよい. そこで,  $e^{-\phi}$  を Fourier-cosine 変換することにして<sup>28</sup>,

$$e^{-\phi} = \int_0^\infty K(k) \cos(k\tau) dk \quad (2.5.13)$$

とおく. 係数  $K(k)$  は逆変換

$$K(k) = \frac{2}{\pi} \int_0^\infty e^{-\phi} \cos(k\tau) d\tau \quad (2.5.14)$$

与えられる. ここで, 部分積分をすると

$$K(k) = \frac{2}{\pi k} \int_0^\infty e^{-\phi} \sin(k\tau) \frac{d\phi}{d\tau} d\tau \quad (2.5.15)$$

となり, Kepler 方程式を用いて  $\tau$  積分から  $\phi$  積分に変換すると

$$K(k) = \frac{2}{\pi k} \int_0^\infty e^{-\phi} \sin [k(e \sinh \phi - \phi)] d\phi \quad (2.5.16)$$

となる. これを (2.5.13) 式に代入すると

$$e^{-\phi} = \frac{2}{\pi} \int_0^\infty \frac{1}{k} \left[ \int_0^\infty e^{-\phi'} \sin [k(e \sinh \phi' - \phi')] d\phi' \right] \cos(k\tau) dk \quad (2.5.17)$$

と一応の解は求められる. しかし, これが解と言われても, これは2重の積分を含んでおり, 非常に形式的なものと言わざるを得ない. この  $\phi'$  積分が Bessel 関数で表わされることを期待したが, この種の公式は存在しないようである. なお,  $\phi'$  と  $k$  積分の順序を入れ替えると,  $k$  積分は実行可能であるが, この方法をとると元の左辺の式に戻ってしまう.

<sup>28</sup>ここでまた, 記号  $e$  が重複してしまうので, 自然対数の底を  $e$ , 離心率を  $e$  と区別することにする.

## 2.5.2 離心率 $e$ が 1 の場合

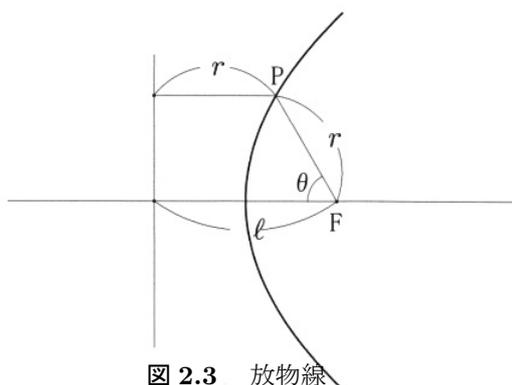


図 2.3 放物線

ここまで来たついでに Bessel 関数とは離れてしまうが、離心率  $e$  が 1 で放物線を描く場合についても簡単に述べておこう。放物線は、準線とそこから距離  $\ell$  だけ離れた焦点  $F$  を設定し、 $F$  からの距離と準線からの距離が等しくなる点  $P$  の軌跡として定義される。FP の距離を  $r$  とし、焦点  $F$  から準線に下ろした垂線と  $FP$  がなす角を  $\theta$  とすると、図 2.3 から明らかなように、放物線の方程式は

$$r = \frac{\ell}{1 + \cos \theta}, \quad -\pi < \theta < \pi \quad (2.5.18)$$

となる。一方で、これは力学的に解かれた (2.3.14) 式で  $e = 1$ ,  $\delta_0 = 0$  としたものに等しい。

面積速度一定の (2.3.4) 式にこの  $r$  を代入し、時間  $t$  で積分すると、

$$ht = \int_0^\theta \frac{\ell^2}{(1 + \cos \theta')^2} d\theta' \quad (2.5.19)$$

となる。ただし、時間  $t$  は焦点  $F$  に一番近い近日点から測ったものとする。この積分はそのまま実行するよりも、前もって、変数変換

$$z = \tan(\theta/2) \quad (2.5.20)$$

をしておく方が分かりよい。この両辺の微分をとると、

$$d\theta = \frac{2}{1 + z^2} dz \quad (2.5.21)$$

となり、また、(2.5.18) 式の  $r$  は三角関数の倍角公式を使うと

$$r = \frac{\ell}{2}(1 + z^2) \quad (2.5.22)$$

となるので、面積速度一定の式は

$$\frac{\ell^2}{2}(1 + z^2) \frac{dz}{dt} = h \quad (2.5.23)$$

となる。これは容易に積分でき、

$$\frac{\ell^2}{2} \left( z + \frac{1}{3} z^3 \right) = ht \quad (2.5.24)$$

となる。これを少し変形し、

$$z^3 + 3z = 2\tau \quad (2.5.25)$$

とする。ここに、無次元時間  $\tau$  を

$$\tau = \frac{3h}{\ell^2} t \quad (2.5.26)$$

と定義した. この (2.5.25) 式が放物線軌道をとる場合の Kepler 方程式である. この 3 次方程式は Cardano の解法に従って,

$$z = (\sqrt{\tau^2 + 1} + \tau)^{1/3} - (\sqrt{\tau^2 + 1} - \tau)^{1/3} \quad (2.5.27)$$

と解くことができる. これを (2.5.22) 式の  $r$  に代入すると

$$r = \frac{\ell}{2} \left[ (\sqrt{\tau^2 + 1} + \tau)^{2/3} + (\sqrt{\tau^2 + 1} - \tau)^{2/3} - 1 \right] \quad (2.5.28)$$

と,  $r$  が時間の関数として求められる.

## 2.6 おわりに

ここで扱った Kepler 方程式は, 世界で初めて厳密解が求められた超越方程式である. この結果にたどり着く過程, すなわち, 真近点角  $\theta$  から離心近点角  $\phi$  へのすり替えは, 見事なまでに技巧的と言わざるを得ないが, これは Kepler に始まる歴史的背景があつてのことだろう. しかし, よく考えてみると超越方程式の難しさを Bessel 関数に閉じ込めただけなのかもしれない. これが厳密解と言われてもこの式に従って  $\phi$  を求める人はいないだろう. Bessel 関数の値を求めるだけでも大変であり, その上, 級数の和を取らなければならない. 数値的に求めるのであれば, Kepler 方程式から直接, 逐次近似法で求める方がはるかに手っ取り早いからである.

では, 厳密解を求める意義はどこにあるのだろうか. 最近, コンピュータソフトが発達したおかげで Bessel 関数などの特殊関数はいっさい知らなくても数値的には事足りる時代になってしまった. もはや特殊関数を使って議論する時代は終わってしまい, 懐古主義者だけが, いとおしみながら弄んでいるだけなのかもしれない. しかし, 「=」で結ばれる式と「≐」で結ばれる式とでは美しさがまるで違う. いまとなつては, 「特殊関数」というのは, 一聴に値する古典の名曲, 一見に値する古典の名画と同類の存在になってしまったのだろうか?

### 謝辞

この稿を書くにあたり, 京都大学名誉教授の中西襄先生にご精読いただきコメントをいただきました. ここに謹んで感謝いたします.

### 参考文献

- 1) G.N.Watson, "A Treatise of the Bessel Functions", 2nd ed. Cambridge Univ. Press. (1966).
- 2) 寺澤寛一, 「自然科学者のための数学概論」, 岩波書店 (1954).
- 3) 犬井鉄郎, 「特殊関数」, 岩波全書, (1962).
- 4) 中西襄, 世戸憲治, 「多重振り子と鎖振り子」, 数学・物理通信 3 巻 1 号, (2013.3) 2-8.
- 5) A. Erdéli et.al., "Higher Transcendental Functions", Vol. 2, Bateman Manuscript Project, McGraw-Hill Book Co. Inc. (1953) p.103.
- 6) 森口繁一 他, 「数学公式 3」, 岩波全書, (1960), pp. 213-214.

## 編集後記

まだはっきりしたことは言えないが、編集者（矢野）の健康の問題が生じてきた。

人間などというものは常に自分は無限に生きていけるかのような幻想をもっているが、それはまったく幻想にすぎない。

共同編集者の新関さんもいるのだが、彼はここ数年持病をもっており、身体事情のために献身的にこの『数学・物理通信』の編集の作業をできない状態である。

編集者の二人ともに健康上の問題が生じるということになれば、このサーキュラーの発行に黄信号が灯る。

そういう事情があるから、すでに投稿を頂いた原稿はできるだけ早い段階でそれらを発行したいという編集者としての希望をもっている。

編集人の健康の問題が出て来てもご投稿を躊躇される必要はないし、むしろ投稿を勧めたい。だが、投稿頂いた原稿がすべてこの『数学・物理通信』に掲載できるかどうかは疑問符がついてしまったという状況である。

まあ、こういうことは常にあることなので、皆様が気にされる必要はないが、そういう状況が生じるかもしれないことをあらかじめご承知いただければ幸いである。

今号はページ数が30ページを越えてしまった。越えたからいけないということはないが、毎号30ページを越えないようにしたいと思っている。（2014.4.16）

（矢野 忠）