

数学・物理通信

4卷6号 2014年9月

編集 新関章三・矢野 忠

2014年9月10日

目次

Whittaker 関数と Aharonov-Bohm 効果	3
1.1 はじめに	3
1.2 方程式の導入	4
1.3 モデル 1	5
1.4 モデル 2	6
1.5 数値計算例	7
1.5.1 Whittaker 関数を見る	7
1.5.2 「モデル 1」の固有値・固有関数	9
1.5.3 「モデル 2」の固有値・固有関数	10
1.6 おわりに	11
Whittaker 関数と Aharonov-Bohm 効果 (2)	12
2.1 はじめに	12
2.2 「モデル 1」の場合	13
2.2.1 解の構成	13
2.2.2 波動関数の規格化	13
2.3 「モデル 2」の場合	14
2.3.1 解の構成	14
2.3.2 波動関数の規格化	15
2.4 おわりに	16
Euler の公式の導出いろいろ	18
3.1 はじめに	18
3.2 Taylor 展開を用いた導出	18
3.3 微分方程式を用いた導出—その 1	19
3.4 微分方程式を用いた導出—その 2	20
3.5 de Moivre の公式を用いた導出	22
3.6 新関の導出	22
3.7 Euler の導出	24
3.8 Euler の発見法的な導出	26
3.9 おわりに	27
[付録 1] Euler の公式から導ける関係	28
[付録 2] Maclaurin 展開	28
[付録 3] 微分方程式 $\frac{dA}{dx} = iA$ の解	31
[付録 4] 微分方程式 $y'' + y = 0$ の解	31
[付録 5] 都浦井の導出	32
編集後記	35

Contents

1. Kenji SETO: Whittaker Function and Aharonov-Bohm Effect
2. Kenji SETO: Whittaker Function and Aharonov-Bohm Effect (2)
3. Tadashi YANO: Various Derivations of Euler's Formula
4. Tadashi YANO: Editorial Comments

Whittaker 関数と Aharonov-Bohm 効果

Whittaker Function and Aharonov-Bohm Effect

世戸 憲治¹
Kenji SETO²

1.1 はじめに

大貫義郎先生が書かれた本「アハラノフ - ボーム効果」[物理学最前線 9] (共立出版) では、電子散乱における Aharonov-Bohm 効果について解説しているが、そこでは、極限的に太さをゼロとした無限に長いソレノイドが用いられている。現著者はこのソレノイドの太さを有限にした場合について、前回の論文「Bessel 関数と Aharonov-Bohm 効果」(『数学・物理通信』4 巻 5 号) で扱ってきた。この大貫先生の本では電子散乱の他に、同じ太さゼロの無限に長いソレノイドを用いた場合の束縛状態にある電子の問題を Laguerre 多項式を用いて扱っている。今回の論文ではこの束縛電子の問題を太さ有限のソレノイドにするとどうなるかを扱ってみた。ソレノイドの太さを有限にしたときは、Laguerre 多項式だけで記述することは不可能で、どうしても第 2 種 Laguerre 多項式 (関数) なるものが必要になる。しかし、このようなものはいかなる数学公式集にも載っていない。ここでは、Laguerre 多項式を拡張した Whittaker 関数を用いて解析することにした。一応の結果はでたが、電子のエネルギーを求めるための固有値方程式はかなり煩雑なものになってしまった。しかし、量子力学の一つの演習問題としてそれなりの価値はあるものと考えられる。

Whittaker 関数は物理ではめったに使われない関数なので、ここで必要となる分だけを「数学公式 3」(岩波全書) pp.71-74 から抜粋しておく。この関数 $M_{\lambda,\nu}(z)$ は³

$$M_{\lambda,\nu}(z) = e^{-\frac{1}{2}z} z^{\nu+\frac{1}{2}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Gamma(2\nu+1)\Gamma(-\lambda+\nu+n+\frac{1}{2})}{\Gamma(2\nu+n+1)\Gamma(-\lambda+\nu+\frac{1}{2})} \frac{z^n}{n!} \quad (1.1.1)$$

と定義され、Whittaker の微分方程式

$$\left[\frac{d^2}{dz^2} - \frac{1}{4} + \frac{\lambda}{z} - \frac{\nu^2 - \frac{1}{4}}{z^2} \right] M_{\lambda,\nu}(z) = 0 \quad (1.1.2)$$

を満たす。この方程式からわかるように、もう一つの独立解は $M_{\lambda,-\nu}(z)$ 、あるいはこれら 2 つの関数を線形結合した

$$W_{\lambda,\nu}(z) = \frac{\Gamma(-2\nu)}{\Gamma(-\lambda-\nu+\frac{1}{2})} M_{\lambda,\nu}(z) + \frac{\Gamma(2\nu)}{\Gamma(-\lambda+\nu+\frac{1}{2})} M_{\lambda,-\nu}(z) \quad (1.1.3)$$

¹ 北海学園大学名誉教授

² seto@pony.ocn.ne.jp

³ 「数学公式 3」ではこの関数は $M_{\kappa,\mu}(z)$ と書かれているが、ここでは他の変数との混同を避けるため $M_{\lambda,\nu}(z)$ と書くことにする。

である。ただし、 2ν が整数のとき、この $W_{\lambda,\nu}(z)$ の定義は無意味になるが、 ν に関し極限值をとることで定義することができる。しかし、この点に関しては、ここでは深入りしないことにするので、詳しくは「数学公式3」を参照されたい。

これら関数の変数 z が正で十分大きいときの漸近形は

$$M_{\lambda,\nu}(z) \approx \frac{\Gamma(2\nu+1)}{\Gamma(-\lambda+\nu+\frac{1}{2})} e^{\frac{1}{2}z} z^{-\lambda}, \quad W_{\lambda,\nu}(z) \approx e^{-\frac{1}{2}z} z^\lambda \quad (1.1.4)$$

となる。この式から $W_{\lambda,\nu}(z)$ は、 $z \rightarrow \infty$ でゼロに収束するように $M_{\lambda,\nu}(z)$ と $M_{\lambda,-\nu}(z)$ を組み合わせたものであることがわかる。また、 n を非負整数とした場合、 $M_{n+\nu+\frac{1}{2},\nu}(z)$ は Laguerre 多項式で

$$M_{n+\nu+\frac{1}{2},\nu}(z) = \frac{n! \Gamma(2\nu+1)}{\Gamma(2\nu+n+1)} e^{-\frac{1}{2}z} z^{\nu+\frac{1}{2}} L_n^{(2\nu)}(z) \quad (1.1.5)$$

と表される。

1.2 方程式の導入

有限の半径 r_0 の無限に長いソレノイドを考え、このソレノイドを大きさ Φ の磁束が貫いているものとする。デカルト座標 (x, y, z) の z 軸がソレノイドの中心軸と重なるようにとり、ソレノイドからの距離 r を

$$r = \sqrt{x^2 + y^2} \quad (1.2.1)$$

とする。このとき、点 \mathbf{x} でのベクトルポテンシャル $\mathbf{A}(\mathbf{x})$ は

$$\mathbf{A}(\mathbf{x}) = \begin{cases} \left(-\frac{y\Phi}{2\pi r^2}, \frac{x\Phi}{2\pi r^2}, 0 \right), & r \geq r_0 \\ \left(-\frac{y\Phi}{2\pi r_0^2}, \frac{x\Phi}{2\pi r_0^2}, 0 \right), & r < r_0 \end{cases} \quad (1.2.2)$$

で与えられ、これから磁束密度 $\mathbf{B}(\mathbf{x})$ は

$$\mathbf{B}(\mathbf{x}) = \nabla \times \mathbf{A}(\mathbf{x}) = \begin{cases} (0, 0, 0), & r \geq r_0 \\ \left(0, 0, \frac{\Phi}{\pi r_0^2} \right), & r < r_0 \end{cases} \quad (1.2.3)$$

と、ソレノイドの外側ではベクトルポテンシャルは存在するが磁束密度はゼロとなる。したがって、古典的に考えれば、ソレノイドの外側に存在する電子には何の影響も及ぼさないが、量子論ではそうはいかない。

ここでは、質量 μ 、電荷 e の電子がこのソレノイドの外側に存在し、さらに r の関数で与えられるスカラーポテンシャル $V(r)$ の影響を受けるときの問題を、時間に依存しない場合の Schrödinger 方程式

$$H\Psi = E\Psi \quad (1.2.4)$$

を用いて解析していく。ここに、Hamiltonian H は、

$$H = -\frac{\hbar^2}{2\mu} \left(\nabla - \frac{ie}{c\hbar} \mathbf{A} \right)^2 + V \quad (1.2.5)$$

で与えられる。 c は光速である。この Hamiltonian を (1.2.2) 式の \mathbf{A} を用いて、2次元の極座標 (r, θ) に変換すると、

$$H = -\frac{\hbar^2}{2\mu} \left[\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \left(\frac{\partial}{\partial \theta} + i\alpha \right)^2 \right] + V(r) \quad (1.2.6)$$

となる。ここに、無次元定数 α を

$$\alpha = -\frac{e\Phi}{2\pi\hbar c} \quad (1.2.7)$$

と定義した。これで、ベクトルポテンシャルの効果は1個のパラメータ α に集約されたことになる。また、このときの Schrödinger 方程式 (1.2.4) は

$$\left[\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \left(\frac{\partial}{\partial \theta} + i\alpha \right)^2 + \frac{2\mu}{\hbar^2} (E - V) \right] \Psi = 0 \quad (1.2.8)$$

となる。ここで一つ注意が必要である。実は、ベクトルポテンシャルから派生するパラメータ α を消去してしまうことが可能である。実際、波動関数に位相変換 $\Psi \rightarrow e^{-i\alpha\theta}\Psi$ を施すとこのパラメータは見かけ上消えてしまうが、その代わりに、 α が整数でない限り波動関数は多価関数になってしまう。逆の言い方をすると、 α が整数の場合は、波動関数の一価性を保ちながらベクトルポテンシャルの影響を完全に消し去ることができる。したがって以下では、 α は整数ではないものとし、 α の Gauss 記号を取ったものを $n = [\alpha]$ とし、変換

$$\Psi \rightarrow e^{-in\theta}\Psi, \quad \alpha \rightarrow n + \alpha \quad (1.2.9)$$

を施す。この新しい α の範囲は $0 < \alpha < 1$ となる。以後、 Ψ, α はこの変換を施したものとする。

1.3 モデル 1

ここでは、スカラーポテンシャルとして、

$$V(r) = \frac{k}{2}r^2, \quad k > 0 \quad (1.3.1)$$

の場合を考える。もし、これが1次元のときは、調和振動子の問題で、Hermite の多項式を用いて解けるものであるが、ここでは2次元であり、さらにベクトルポテンシャルも入っているのでそう簡単ではない。

方程式 (1.2.8) において、整数 m を用いて変数分離し、

$$\Psi = \frac{\chi(r)}{r} e^{im\theta} \quad (1.3.2)$$

とおくと、方程式は

$$\left[\frac{d^2}{dr^2} - \frac{1}{r} \frac{d}{dr} - \frac{|m + \alpha|^2 - 1}{r^2} + \frac{2\mu}{\hbar^2} \left(E - \frac{k}{2}r^2 \right) \right] \chi = 0 \quad (1.3.3)$$

となり、さらに独立変数を

$$\xi = \frac{\sqrt{\mu k}}{\hbar} r^2 \quad (1.3.4)$$

に変えると、

$$\left[\frac{d^2}{d\xi^2} - \frac{1}{4} + \frac{\lambda}{\xi} - \frac{\nu^2 - \frac{1}{4}}{\xi^2} \right] \chi = 0 \quad (1.3.5)$$

となる。ここに、 λ, ν を

$$\lambda = \frac{1}{2\hbar} \sqrt{\frac{\mu}{k}} E, \quad \nu = \frac{1}{2} |m + \alpha| \quad (1.3.6)$$

と定義した。これは第1節で述べた Whittaker の微分方程式で、解は Whittaker 関数 $M_{\lambda, \nu}(\xi)$ あるいは $W_{\lambda, \nu}(\xi)$ を用いて表わされる。ここでは束縛電子の問題を扱っているので、波動関数は $r \rightarrow \infty$ でゼロとならなければならない。Whittaker 関数に関する (1.1.4) 式の漸近形から判断すると、この条件に適合するのは $W_{\lambda, \nu}(\xi)$ の方である。ここでは波動関数の規格化は考慮しないので、定数係数を除いて、 χ は

$$\chi = W_{\lambda, \nu}(\xi) = \frac{\Gamma(-2\nu)}{\Gamma(-\lambda - \nu + \frac{1}{2})} M_{\lambda, \nu}(\xi) + \frac{\Gamma(2\nu)}{\Gamma(-\lambda + \nu + \frac{1}{2})} M_{\lambda, -\nu}(\xi) \quad (1.3.7)$$

と与えられる。なお、この $W_{\lambda,\nu}(\xi)$ がこの第2式で表されるためには (1.1.3) 式のところで述べたように 2ν が整数ではないことが条件になるが、この場合は $2\nu = |m + \alpha|$ で、 m は整数、 α の範囲は $0 < \alpha < 1$ なので、条件を満たすことになる。

つぎに、ソレノイドのところにおける境界条件として、電子はその内部に侵入できないようになっているものとする。そのとき、波動関数は、その半径 r_0 のところでゼロでなければならず、

$$W_{\lambda,\nu}(\xi_0) = 0, \quad \xi_0 = \frac{\sqrt{\mu k}}{\hbar} r_0^2 \quad (1.3.8)$$

が要請される。あるいは、(1.3.7) の第2式を用いると、

$$\frac{\Gamma(-2\nu)}{\Gamma(-\lambda - \nu + \frac{1}{2})} M_{\lambda,\nu}(\xi_0) + \frac{\Gamma(2\nu)}{\Gamma(-\lambda + \nu + \frac{1}{2})} M_{\lambda,-\nu}(\xi_0) = 0 \quad (1.3.9)$$

と表される。これがエネルギー E を決めるための固有値方程式である。もちろん、この方程式をそのままの形で解析的に解くことは不可能であろう。第5節でこの数値計算をした結果を示す。

ソレノイドの太さを極限的にゼロとした $r_0 \rightarrow 0$ の場合は解析的に解くことが可能である。そのときは (1.1.1) 式から、 $\xi_0 \rightarrow 0$ の極限で、 $M_{\lambda,\nu}(\xi_0)/M_{\lambda,-\nu}(\xi_0) \rightarrow 0$ となるので、方程式 (1.3.9) が成り立つためにはガンマ関数 $\Gamma(-\lambda + \nu + \frac{1}{2})$ が極の位置にあるとよい。これから、

$$-\lambda + \nu + \frac{1}{2} = -n, \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (1.3.10)$$

となり、(1.3.6) 式より、エネルギー E は

$$E_{n,m} = \hbar \sqrt{\frac{k}{\mu}} (2n + |m + \alpha| + 1), \quad n = 0, 1, 2, \dots, \quad m = \text{integer} \quad (1.3.11)$$

と求められる。また、このときの波動関数は、(1.3.7) の第2式2項目が消えるので、定数係数を除いて、 $\chi = M_{\lambda,\nu}(\xi) = M_{n+\nu+\frac{1}{2},\nu}(\xi)$ となり、さらに、(1.3.2) (1.1.5) 式を用いると、

$$\Psi_{n,m}(r, \theta) = r^{|m+\alpha|} e^{-\frac{1}{2}\xi} L_n^{(|m+\alpha|)}(\xi) e^{im\theta}, \quad \xi = \frac{\sqrt{\mu k}}{\hbar} r^2 \quad (1.3.12)$$

と Laguerre 多項式を用いて表わされる⁴。

1.4 モデル2

ここではスカラーポテンシャルを

$$V(r) = -\frac{\kappa}{r}, \quad \kappa > 0 \quad (1.4.1)$$

とした場合を考える。以下、変数名として前節と同じ χ, ξ, λ, ν を用いるが混同する怖れはないものとする。方程式 (1.2.8) において、整数 m を用いて変数分離し、

$$\Psi = \frac{\chi(r)}{\sqrt{r}} e^{im\theta} \quad (1.4.2)$$

とおくと、

$$\left[\frac{d^2}{dr^2} - \frac{|m + \alpha|^2 - \frac{1}{4}}{r^2} + \frac{2\mu}{\hbar^2} \left(E + \frac{\kappa}{r} \right) \right] \chi = 0 \quad (1.4.3)$$

となる。ここでは、電子の束縛状態のみを考えることにし $E < 0$ と仮定し、さらに、独立変数を

$$\xi = \frac{2\sqrt{2\mu|E|}}{\hbar} r \quad (1.4.4)$$

⁴(1.3.11) 式のエネルギー、および (1.3.12) 式の波動関数は大貫先生の本にあるものと一致するが、先生の本にある x (ここでの ξ) の式は無次元数になっておらず明らかに間違いである。

と置き換えると、方程式は

$$\left[\frac{d^2}{d\xi^2} - \frac{1}{4} + \frac{\lambda}{\xi} - \frac{\nu^2 - \frac{1}{4}}{\xi^2} \right] \chi = 0 \quad (1.4.5)$$

となる。ここに、 λ, ν は

$$\lambda = \frac{\kappa}{\hbar} \sqrt{\frac{\mu}{2|E|}}, \quad \nu = |m + \alpha| \quad (1.4.6)$$

と定義する。この解は、前節同様、Whittaker 関数を用いて $\chi = W_{\lambda, \nu}(\xi)$ と表わされるわけだが、この場合は ξ にもエネルギー E が含まれるため、このままの形では分かり難いものになってしまう。ここではこの事情を明示するために、独立変数を ξ から ζ に

$$\lambda\xi = \frac{2\mu\kappa}{\hbar^2} r \equiv \zeta \quad (1.4.7)$$

を用いて変換し、(1.4.5) 式の解を

$$\chi = W_{\lambda, \nu}(\zeta/\lambda) \quad (1.4.8)$$

と表しておく。もう一つ注意すべき点として、この場合は $\alpha = 1/2$ のときに 2ν が整数となってしまうので、(1.1.3) 式のところで述べた条件が成立しなくなる。したがってこの場合は、 $\alpha = 1/2$ を除外しておく。

ここで、 $r = r_0$ でこの χ がゼロとなる条件を付加すると、固有値方程式

$$W_{\lambda, \nu}(\zeta_0/\lambda) = 0, \quad \zeta_0 = \frac{2\mu\kappa}{\hbar^2} r_0 \quad (1.4.9)$$

が得られる。この式から ζ_0 を与えたとき固有値 λ の値が離散的に決まる。

また、 $r_0 \rightarrow 0$ の極限では (1.3.10) 式がそのまま成立し、この場合のエネルギーは (1.4.6) 式を用いて、

$$E_{n,m} = -\frac{\mu\kappa^2}{2\hbar^2} \frac{1}{(n + |m + \alpha| + \frac{1}{2})^2}, \quad n = 0, 1, 2, \dots, \quad m = \text{integer} \quad (1.4.10)$$

と求められる。さらに前節同様にして、この場合の波動関数を (1.4.8) (1.4.2) (1.1.5) 式から求めると、定数係数を除いて、

$$\Psi_{n,m}(r, \theta) = r^{|m+\alpha|} e^{-\zeta/(2\lambda_{n,m})} L_n^{(2|m+\alpha|)}(\zeta/\lambda_{n,m}) e^{im\theta}, \quad \zeta = \frac{2\mu\kappa}{\hbar^2} r, \quad \lambda_{n,m} = \frac{\kappa}{\hbar} \sqrt{\frac{\mu}{2|E_{n,m}|}} \quad (1.4.11)$$

と Laguerre 多項式を用いて表わされる⁵。

1.5 数値計算例

1.5.1 Whittaker 関数を見る

ここでは、「モデル1」「モデル2」における固有値方程式 (1.3.8), (1.4.9) を数値計算した例を挙げるが、その前に、 $\nu = \pm 1/4$ に固定したときの Whittaker 関数 $M_{\lambda, \pm 1/4}(z)$ のグラフを示しておく。以下の図1($\nu = 1/4$)、図2($\nu = -1/4$) は右方向に z 軸、右斜め下方向に λ 軸、上方向に関数値をとり、3次元的に描いたものである。

⁵エネルギーの式 (1.4.10) は大貫先生の本と一致するが、先生の本にある ρ (ここでの $\zeta/\lambda_{n,m}$) の式は無次元数になっておらず明らかに間違いである。また、先生の本では、波動関数の Laguerre 多項式の上付添え字のところでファクター 2 が抜けている。

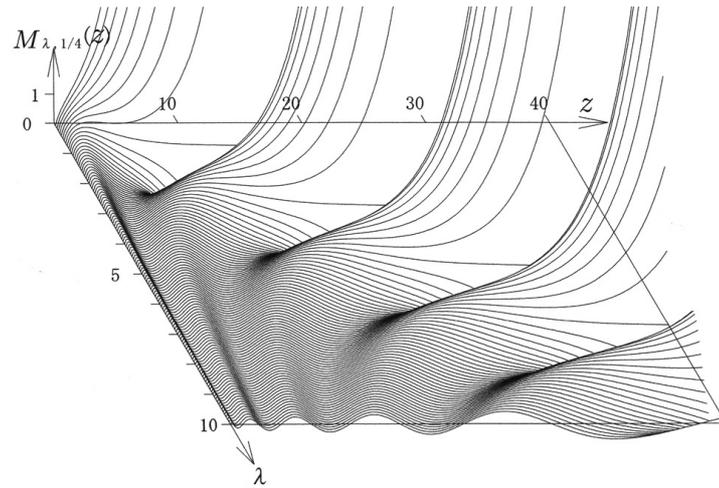


図 1 $M_{\lambda, 1/4}(z)$

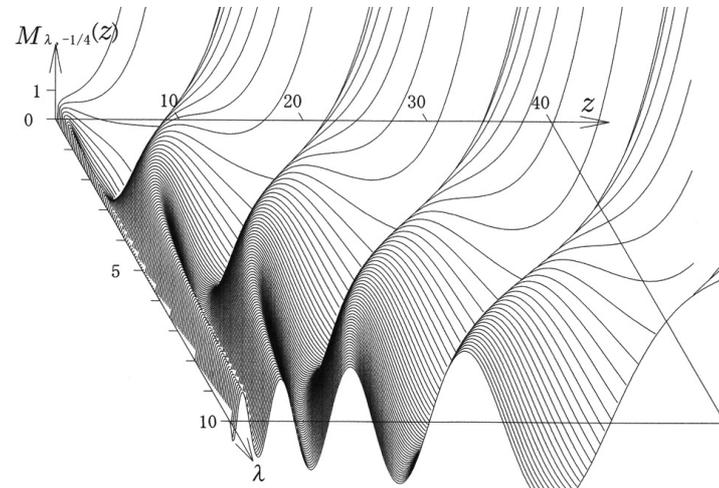
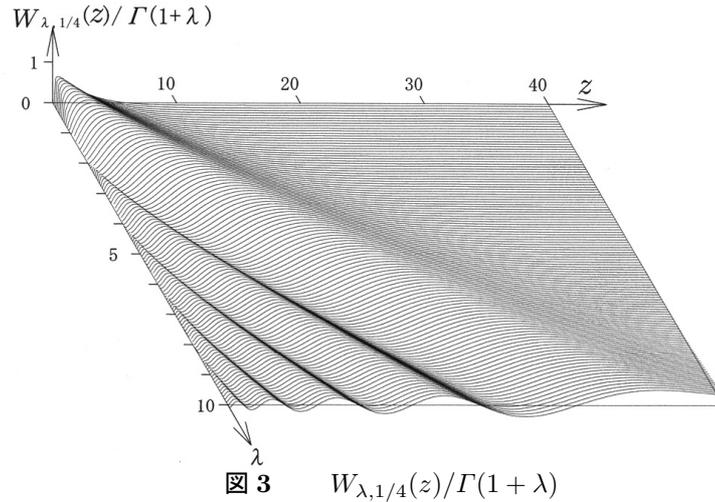


図 2 $M_{\lambda, -1/4}(z)$

見てわかるとおり、これほど暴れまわる関数を制御するのは難しいのだが、これは (1.1.4) 式の漸近形でわかるとおり指数関数 $e^{\frac{1}{2}z}$ を含むため、 λ の値に従って正負の発散を繰り返す。ただし、ここではグラフの見やすさから陰線処理をしているため、負の発散は正の発散の影になり描かれていないことに注意する。この正負の発散の境目に (1.3.10) 式を満たすところがあって、そこでは発散せずに Laguerre 多項式で表されるところが存在する。これら 2 つの暴れまわる関数 $M_{\lambda, \nu}(z)$, $M_{\lambda, -\nu}(z)$ を組み合わせて $z \rightarrow \infty$ でゼロに収束させたものが関数 $W_{\lambda, \nu}(z)$ である。以下に、 $\nu = 1/4$ の場合の関数 $W_{\lambda, 1/4}(z)$ のグラフを示すが、この関数は z 方向には確かに発散しないが、そのかわり、 λ の値が大きくなるにつれその関数値はガンマ関数的に大きくなってしまいこのままの形でグラフにすると大変見づらいものになってしまう。そこで、この関数を $\Gamma(1 + \lambda)$ で割ることにし、 $W_{\lambda, 1/4}(z)/\Gamma(1 + \lambda)$ を描いたのが図 3 である。



1.5.2 「モデル 1」の固有値・固有関数

第 3 節で扱った「モデル 1」における固有値方程式 (1.3.8) を数値的に解くが、ここでは一例として、

$$m = 0, \quad \alpha = \frac{1}{2}, \quad \text{したがって,} \quad \nu = \frac{1}{4} \quad (1.5.1)$$

という特別な場合を扱ってみる。この方程式で ξ_0 を与えるとそれに対応する固有値 λ が離散的に決まり、さらにその値に応じて (1.3.6) 式からエネルギー E が決まる。

さらにここで、 $\xi_0 = 1$ という特別な値のときに、この方程式を数値的に少数点以下 3 桁まで解いてみると、初めの 10 個は、

$$\lambda_n = 1.518, 2.801, 4.013, 5.189, 6.343, 7.482, 8.609, 9.727, 10.838, 11.942 \quad (1.5.2)$$

と求められる。この数値を見ると初めの λ_1 と λ_2 の差は 1.283 であるが、隣同士の差は徐々に 1 に近づいていくのがわかる。また、(1.3.6) 式から最小のエネルギー E_1 を求めると $E_1 = 2\hbar\sqrt{k/\mu}\lambda_1$ となるが、この値はスカラーポテンシャルの最小値 $(k/2)r_0^2$ より大きくなければいけない。いまの場合は、 $\xi_0 = (\sqrt{\mu k}/\hbar)r_0^2 = 1$ としているので、この条件は $\lambda_1 > 1/4$ となり十分に満たしていることがわかる。

ここで、これら固有値 λ_n に属する固有関数 χ_n がどうなるかを見てみよう。前に述べたように、(1.3.7) 式の χ のままでは λ が大きくなったときに発散が起こるので、ここではこれを $\Gamma(1+\lambda_n)$ で割った $W_{\lambda_n, 1/4}(\xi)/\Gamma(1+\lambda_n)$ を、規格化されたものではないが、固有関数と呼ぶことにする。図 4 に、この固有関数のグラフを初めの 5 個だけ描いてみた。ここで横軸は ξ 、また、 n はモード番号である。この場合は $\xi_0 = 1$ としているので、固有関数の定義域は $\xi \geq 1$ となることに注意する。どの固有関数もモード番号と同じ数のゼロ点を持つことがわかる。

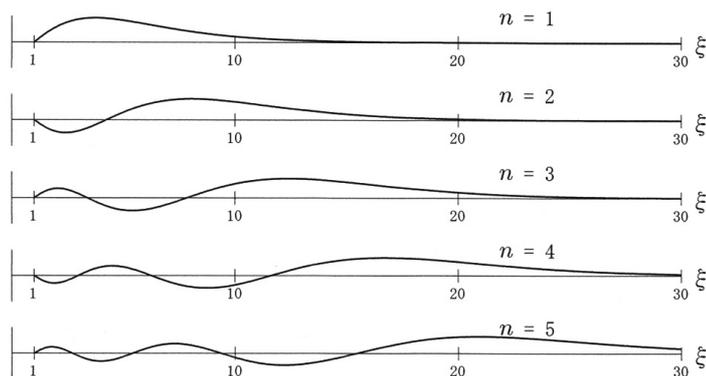


図4 「モデル1」の固有関数

ここでは、 $\xi_0 = 1$ とした場合に限って数値解析を試みたが、この値を小さくしてゼロに近づけていくと(1.3.10)式で決まる値に近づいていく。また、逆にこの値を大きくしていくと固有値 λ_n の値も大きくなっていく。ちなみに、 $\xi_0 = 10$ とした場合は $\lambda_1 = 4.693$ となる。

1.5.3 「モデル2」の固有値・固有関数

第4節で扱った「モデル2」についても同じように数値解析をすることが可能である。ここでは、

$$m = 0, \quad \alpha = \frac{1}{4}, \quad \text{したがって, } \nu = \frac{1}{4}, \quad \zeta_0 = 1 \quad (1.5.3)$$

という特別な場合について固有値方程式(1.4.9)を数値的に解いてみると、初めの10個は、

$$\lambda_n = 1.378, 2.383, 3.385, 4.385, 5.386, 6.386, 7.386, 8.386, 9.386, 10.386 \quad (1.5.4)$$

と求められる。これを見るとこの階差数列は前のものより早く1に近づいていくことがわかる。

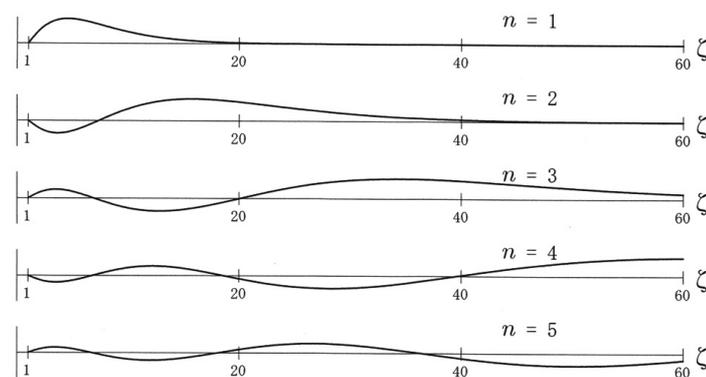


図5 「モデル2」の固有関数

この場合の固有関数を初めの5個だけ図5に示す。ここで、縦軸は $W_{\lambda_n, 1/4}(\zeta/\lambda_n)/\Gamma(1+\lambda_n)$ 、横軸は ζ であるが、この場合はモード番号の増加と共にグラフが横方向に伸びてしまうため、横軸のスケールは前のものの2倍にしてある。この場合もそれぞれの固有関数はそのモード番号と同じ個数のゼロ点を持つ。なお、ここでは $\zeta_0 = 1$ の場合のみを示したが、「モデル1」の場合と同様この場合も、 ζ_0 の値を小さくしていくと、固有値 λ_n は(1.3.10)式で決まる値に近づいていく。

1.6 おわりに

Whittaker 関数を初めて使ってみた。Bessel 関数と似た点もあるが、添え字が 2 個に増えたことで、この関数の全容を理解することはなかなか難しい。ここでは、 $\nu = \pm 1/4$ の場合に限って調べただけで、パラメータの他の値のときどうなるかはよくわからない。「はじめに」のところで述べたように、この関数は物理ではまず使われないものなので、その意味でも正に特殊な特殊関数なのだろう。

この解析を通じて一つだけ不思議な点がある。最初のところで述べたように 2ν が整数のとき $W_{\lambda,\nu}(z)$ は (1.1.3) 式では定義されなくなる。したがって、(1.3.6) あるいは (1.4.6) 式から Aharonov-Bohm 効果が起こらない $\alpha = 0$ の場合は 2ν が整数になってしまい、ここで展開した方法がまったく使えなくなるということである。逆の言い方をすると、Aharonov-Bohm 効果が存在したために解けたわけで、存在しなかったら解けないわけではないだろうが、より難しいことになってしまうということである。

謝辞

今回の原稿も京都大学名誉教授の中西襄先生にお目通しいただき、大変有意義なご指摘をいただきました。ここに謹んで感謝いたします。

Whittaker 関数と Aharonov-Bohm 効果 (2)

Whittaker Function and Aharonov-Bohm Effect (2)

世戸 憲治⁶
Kenji SETO⁷

2.1 はじめに

前論文「Whittaker 関数と Aharonov-Bohm 効果」(「数学・物理通信」今号)で, 有限の半径を持つ無限に長いソレノイドのまわりにベクトルポテンシャルおよびスカラーポテンシャルが存在する場合の束縛電子の問題を Whittaker 関数を用いて解析した. そこでは波動関数の規格化をしていなかったため, 今回はこの規格化の問題を含めできるだけ簡潔な形で解を再構成することに重点をおいて書き直すことにした.

Whittaker 関数 $M_{\lambda,\nu}(z)$ は

$$M_{\lambda,\nu}(z) = e^{-\frac{1}{2}z} z^{\nu+\frac{1}{2}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Gamma(2\nu+1)\Gamma(-\lambda+\nu+n+\frac{1}{2})}{\Gamma(2\nu+n+1)\Gamma(-\lambda+\nu+\frac{1}{2})} \frac{z^n}{n!} \quad (2.1.1)$$

と定義され, Whittaker の微分方程式

$$\left[\frac{d^2}{dz^2} - \frac{1}{4} + \frac{\lambda}{z} - \frac{\nu^2 - \frac{1}{4}}{z^2} \right] M_{\lambda,\nu}(z) = 0 \quad (2.1.2)$$

を満たす. この方程式からわかるように, もう一つの独立解は $M_{\lambda,-\nu}(z)$, あるいはこれら 2 つの関数を線形結合した

$$W_{\lambda,\nu}(z) = \frac{\Gamma(-2\nu)}{\Gamma(-\lambda-\nu+\frac{1}{2})} M_{\lambda,\nu}(z) + \frac{\Gamma(2\nu)}{\Gamma(-\lambda+\nu+\frac{1}{2})} M_{\lambda,-\nu}(z) \quad (2.1.3)$$

である. ただし, 2ν が整数のとき, この $W_{\lambda,\nu}(z)$ の定義は無意味になるが, ν に関し極限值をとることで定義し直すことができる. しかし, この点に関しては, ここでは深入りしないことにする.

この関数 $W_{\lambda,\nu}(z)$ の z が正で十分大きいときの漸近形は

$$W_{\lambda,\nu}(z) \approx e^{-\frac{1}{2}z} z^{\nu} \quad (2.1.4)$$

となり, $z \rightarrow \infty$ でゼロに収束する.

解くべき方程式は前回の論文で示したように, 2次元の極座標 (r, θ) を用いて,

$$\left[\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \left(\frac{\partial}{\partial \theta} + i\alpha \right)^2 + \frac{2\mu}{\hbar^2} (E - V) \right] \Psi = 0 \quad (2.1.5)$$

と書かれる. ここに α はベクトルポテンシャルから生じるパラメータで $0 < \alpha < 1$ の範囲にある. また, μ , E は電子の質量とエネルギー, V はスカラーポテンシャルである.

⁶ 北海学園大学名誉教授

⁷ seto@pony.ocn.ne.jp

2.2 「モデル1」の場合

2.2.1 解の構成

ここでは、スカラーポテンシャルとして、

$$V(r) = \frac{k}{2}r^2, \quad k > 0 \quad (2.2.1)$$

の場合を考える。これを方程式 (2.1.5) に代入すると

$$\left[\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \left(\frac{\partial}{\partial \theta} + i\alpha \right)^2 + \frac{2\mu}{\hbar^2} \left(E - \frac{k}{2}r^2 \right) \right] \Psi = 0 \quad (2.2.2)$$

となるが、ここで、独立変数 r とエネルギー E を無次元化して

$$\left(\frac{\mu k}{\hbar^2} \right)^{1/4} r \rightarrow r, \quad \frac{1}{2\hbar} \sqrt{\frac{\mu}{k}} E = \lambda \quad (2.2.3)$$

と置き直すことにする。このとき、方程式は

$$\left[\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \left(\frac{\partial}{\partial \theta} + i\alpha \right)^2 + 4\lambda - r^2 \right] \Psi = 0 \quad (2.2.4)$$

となる。ここで、波動関数 Ψ を、整数 m を用いて

$$\Psi = \frac{\chi(r)}{r} e^{im\theta} \quad (2.2.5)$$

と変数分離し、さらに、独立変数を

$$\xi = r^2 \quad (2.2.6)$$

と置き直すことにすると、方程式は

$$\left[\frac{d^2}{d\xi^2} - \frac{1}{4} + \frac{\lambda}{\xi} - \frac{\nu^2 - \frac{1}{4}}{\xi^2} \right] \chi = 0 \quad (2.2.7)$$

となる。ここに、 ν を

$$\nu = \frac{1}{2} |m + \alpha| \quad (2.2.8)$$

と定義した。この解の $r \rightarrow \infty$ でゼロに収束する解は Whittaker 関数 $W_{\lambda, \nu}(\xi)$ を用いて表わされ、

$$\chi = W_{\lambda, \nu}(\xi) \quad (2.2.9)$$

と求められる。ここで、ソレノイドの半径 $r = r_0$ のところで波動関数がゼロとなることを要請すると、

$$W_{\lambda, \nu}(\xi_0) = 0, \quad \xi_0 = r_0^2 \quad (2.2.10)$$

となる。これが固有値方程式で、 ν, ξ_0 を与えるとこれから λ が離散的に求まり、これを小さい方から、固有値 $\lambda_n, n = 1, 2, \dots$ とおく。 λ_n が求まると (2.2.3) 式からエネルギー E が求められる。

2.2.2 波動関数の規格化

2個の固有値 $\lambda_n, \lambda_{n'}$ に属する固有関数 $W_{\lambda_n, \nu}(\xi), W_{\lambda_{n'}, \nu}(\xi)$ が満たす方程式は

$$\begin{aligned} \left[\frac{d^2}{d\xi^2} - \frac{1}{4} + \frac{\lambda_n}{\xi} - \frac{\nu^2 - \frac{1}{4}}{\xi^2} \right] W_{\lambda_n, \nu}(\xi) &= 0 \\ \left[\frac{d^2}{d\xi^2} - \frac{1}{4} + \frac{\lambda_{n'}}{\xi} - \frac{\nu^2 - \frac{1}{4}}{\xi^2} \right] W_{\lambda_{n'}, \nu}(\xi) &= 0 \end{aligned} \quad (2.2.11)$$

となる。この第1式に $W_{\lambda_n, \nu}(\xi)$ を掛け、第2式に $W_{\lambda_{n'}, \nu}(\xi)$ を掛けて、辺々を引き算すると

$$\frac{d}{d\xi} \left[W_{\lambda_n, \nu}(\xi) \frac{dW_{\lambda_{n'}, \nu}(\xi)}{d\xi} - W_{\lambda_{n'}, \nu}(\xi) \frac{dW_{\lambda_n, \nu}(\xi)}{d\xi} \right] = \frac{\lambda_n - \lambda_{n'}}{\xi} W_{\lambda_n, \nu}(\xi) W_{\lambda_{n'}, \nu}(\xi) \quad (2.2.12)$$

となるが、この式の両辺を ξ で ξ_0 から無限大まで積分すると

$$\int_{\xi_0}^{\infty} W_{\lambda_n, \nu}(\xi) W_{\lambda_{n'}, \nu}(\xi) \frac{1}{\xi} d\xi = \frac{1}{\lambda_n - \lambda_{n'}} \left[W_{\lambda_n, \nu}(\xi) \frac{dW_{\lambda_{n'}, \nu}(\xi)}{d\xi} - W_{\lambda_{n'}, \nu}(\xi) \frac{dW_{\lambda_n, \nu}(\xi)}{d\xi} \right]_{\xi_0}^{\infty} \quad (2.2.13)$$

となる。ここで、Whittaker 関数の微分公式

$$\frac{dW_{\lambda, \nu}(z)}{dz} = \left(\frac{1}{2} - \frac{\lambda}{z} \right) W_{\lambda, \nu}(z) - \frac{1}{z} W_{\lambda+1, \nu}(z) \quad (2.2.14)$$

を用いて (2.2.13) 式の右辺を変形すると

$$\begin{aligned} & \int_{\xi_0}^{\infty} W_{\lambda_n, \nu}(\xi) W_{\lambda_{n'}, \nu}(\xi) \frac{1}{\xi} d\xi \\ &= \left[\frac{1}{\xi} W_{\lambda_n, \nu}(\xi) W_{\lambda_{n'}, \nu}(\xi) \right]_{\xi_0}^{\infty} + \frac{1}{\lambda_n - \lambda_{n'}} \left[\frac{1}{\xi} \left(W_{\lambda_n+1, \nu}(\xi) W_{\lambda_{n'}, \nu}(\xi) - W_{\lambda_{n'}+1, \nu}(\xi) W_{\lambda_n, \nu}(\xi) \right) \right]_{\xi_0}^{\infty} \end{aligned} \quad (2.2.15)$$

となる。ここで、Whittaker 関数の ξ が十分大きいときの漸近形 (2.1.4) 式を用いるとこの積分式の右辺は、 $\xi \rightarrow \infty$ でゼロになることがわかる。また、 $\xi = \xi_0$ では $\lambda_n, \lambda_{n'}$ が固有値、すなわち方程式 (2.2.10) の解であることから、 $W_{\lambda_n, \nu}(\xi_0) = W_{\lambda_{n'}, \nu}(\xi_0) = 0$ となるので右辺1項目は常にゼロ、また、2項目に関しては、 $\lambda_n, \lambda_{n'}$ が異なるときはゼロとなり、固有関数の直交性がでる。また、 $\lambda_n, \lambda_{n'}$ が同じ固有値になるときは、(2.2.15) 式2項目が $0/0$ の不定形になるので、先に λ_n を固有値にしておき、そのあとで、 $\lambda_{n'} \rightarrow \lambda_n$ の極限をとることでこの積分を定義する。この結果をまとめると、直交性の式

$$\int_{\xi_0}^{\infty} W_{\lambda_n, \nu}(\xi) W_{\lambda_{n'}, \nu}(\xi) \frac{1}{\xi} d\xi = 2N_n^2 \delta_{n, n'} \quad (2.2.16)$$

を得る。ここに $2N_n^2$ は規格化定数で、

$$2N_n^2 = \frac{1}{\xi_0} W_{\lambda_n+1, \nu}(\xi_0) \left[\frac{\partial W_{\lambda, \nu}(\xi_0)}{\partial \lambda} \right]_{\lambda=\lambda_n} \quad (2.2.17)$$

と定義される。ここで $2N_n^2$ と2を付けて定義したのは後の形をきれいにするためである。また、ここでの λ 微分は、 λ がガンマ関数の中に含まれるためディ・ガンマ関数 $\psi(z)$ を用いると実行可能ではあるが、冗長な式になることと、実用上有効な式とは考えられないので、ここでは省略することにする。

以上のことをまとめると、 $d\xi/\xi = 2dr/r$ を用いて r で表した規格化された波動関数は

$$\Psi_{n, m}(r, \theta) = \frac{W_{\lambda_n, |m+\alpha|/2}(r^2) e^{im\theta}}{N_n r \sqrt{2\pi}} \quad (2.2.18)$$

と表され、この波動関数の直交性の式は

$$\int_{r_0}^{\infty} r dr \int_0^{2\pi} d\theta [\Psi_{n, m}(r, \theta)]^* \Psi_{n', m'}(r, \theta) = \delta_{n, n'} \delta_{m, m'} \quad (2.2.19)$$

となる。

2.3 「モデル2」の場合

2.3.1 解の構成

ここではスカラーポテンシャルを

$$V(r) = -\frac{\kappa}{r}, \quad \kappa > 0 \quad (2.3.1)$$

とした場合を考える．以下，変数名として前節と同じ χ, ξ, λ, ν を用いるが混同する怖れはないものとする．このとき方程式 (2.1.5) は，

$$\left[\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \left(\frac{\partial}{\partial \theta} + i\alpha \right)^2 + \frac{2\mu}{\hbar^2} \left(E + \frac{\kappa}{r} \right) \right] \Psi = 0 \quad (2.3.2)$$

となる．ここでは，電子の束縛状態のみを考えることにし $E < 0$ と仮定し，独立変数 r とエネルギー E を無次元化し，

$$\frac{2\mu\kappa}{\hbar^2} r \rightarrow r, \quad \frac{\kappa}{\hbar} \sqrt{\frac{\mu}{2|E|}} = \lambda \quad (2.3.3)$$

と置き換えることにする．この変換で方程式 (2.3.2) は

$$\left[\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \left(\frac{\partial}{\partial \theta} + i\alpha \right)^2 - \frac{1}{4\lambda^2} + \frac{1}{r} \right] \Psi = 0 \quad (2.3.4)$$

となる．ここで波動関数 Ψ を，整数 m を用いて変数分離し，

$$\Psi = \frac{\chi(r)}{\sqrt{r}} e^{im\theta} \quad (2.3.5)$$

と置くと方程式は

$$\left[\frac{d^2}{dr^2} - \frac{1}{4\lambda^2} + \frac{1}{r} - \frac{\nu^2 - \frac{1}{4}}{r^2} \right] \chi = 0 \quad (2.3.6)$$

となる．ここに， ν は

$$\nu = |m + \alpha| \quad (2.3.7)$$

と定義する．さらに独立変数を

$$\xi = \frac{r}{\lambda} \quad (2.3.8)$$

と置き換えると，方程式は

$$\left[\frac{d^2}{d\xi^2} - \frac{1}{4} + \frac{\lambda}{\xi} - \frac{\nu^2 - \frac{1}{4}}{\xi^2} \right] \chi = 0 \quad (2.3.9)$$

となり，この方程式の $r \rightarrow \infty$ でゼロに収束する解は Whittaker 関数の $W_{\lambda, \nu}(\xi)$ であり，

$$\chi = W_{\lambda, \nu}(\xi) \quad (2.3.10)$$

と解かれる．ここで，電子は半径 r_0 のソレノイドの内部には侵入できないものとして， $r = r_0$ のところで，波動関数はゼロになるという条件

$$W_{\lambda, \nu}(\xi_0) = 0, \quad \xi_0 = \frac{r_0}{\lambda} \quad (2.3.11)$$

を付加する．これがこの場合の固有値方程式である．この方程式で r_0 と ν を与えると λ が離散的に決まるので，これを小さい方から，固有値 $\lambda_n, n = 1, 2, \dots$ とする．

2.3.2 波動関数の規格化

この場合は (2.3.10) 式の解 $\chi = W_{\lambda, \nu}(\xi)$ の変数である ξ の中にも λ が含まれるので，波動関数の規格化を問題とするときは，(2.3.9) 式よりも， λ 依存性が明示された (2.3.6) 式に戻って処理する方が便利である．2 個の固有値 $\lambda_n, \lambda_{n'}$ に属する固有関数 $W_{\lambda_n, \nu}(r/\lambda_n), W_{\lambda_{n'}, \nu}(r/\lambda_{n'})$ が満たす方程式は (2.3.6) 式より，

$$\begin{aligned} \left[\frac{d^2}{dr^2} - \frac{1}{4\lambda_n^2} + \frac{1}{r} - \frac{\nu^2 - \frac{1}{4}}{r^2} \right] W_{\lambda_n, \nu}(r/\lambda_n) &= 0 \\ \left[\frac{d^2}{dr^2} - \frac{1}{4\lambda_{n'}^2} + \frac{1}{r} - \frac{\nu^2 - \frac{1}{4}}{r^2} \right] W_{\lambda_{n'}, \nu}(r/\lambda_{n'}) &= 0 \end{aligned} \quad (2.3.12)$$

となり，この第1式に $W_{\lambda_n, \nu}(r/\lambda_n)$ を掛け，第2式に $W_{\lambda_n, \nu}(r/\lambda_n)$ を掛けて辺々を引き算すると

$$\frac{d}{dr} \left[W_{\lambda_n, \nu}(r/\lambda_n) \frac{dW_{\lambda_n', \nu}(r/\lambda_n')}{dr} - W_{\lambda_n', \nu}(r/\lambda_n') \frac{dW_{\lambda_n, \nu}(r/\lambda_n)}{dr} \right] = \frac{\lambda_n^2 - \lambda_n'^2}{4\lambda_n^2 \lambda_n'^2} W_{\lambda_n, \nu}(r/\lambda_n) W_{\lambda_n', \nu}(r/\lambda_n') \quad (2.3.13)$$

となる．この両辺を r で積分すると，

$$\int_{r_0}^{\infty} W_{\lambda_n, \nu}(r/\lambda_n) W_{\lambda_n', \nu}(r/\lambda_n') dr = \frac{4\lambda_n^2 \lambda_n'^2}{\lambda_n^2 - \lambda_n'^2} \left[W_{\lambda_n, \nu}(r/\lambda_n) \frac{dW_{\lambda_n', \nu}(r/\lambda_n')}{dr} - W_{\lambda_n', \nu}(r/\lambda_n') \frac{dW_{\lambda_n, \nu}(r/\lambda_n)}{dr} \right]_{r_0}^{\infty} \quad (2.3.14)$$

となるが，この右辺で (2.2.14) の微分公式を使うと，

$$\begin{aligned} \int_{r_0}^{\infty} W_{\lambda_n, \nu}(r/\lambda_n) W_{\lambda_n', \nu}(r/\lambda_n') dr &= \frac{4\lambda_n^2 \lambda_n'^2}{\lambda_n + \lambda_n'} \left[\left(\frac{1}{2\lambda_n \lambda_n'} + \frac{1}{r} \right) W_{\lambda_n, \nu}(r/\lambda_n) W_{\lambda_n', \nu}(r/\lambda_n') \right]_{r_0}^{\infty} \\ &+ \frac{4\lambda_n^2 \lambda_n'^2}{\lambda_n^2 - \lambda_n'^2} \left[\frac{1}{r} \left(W_{\lambda_n', \nu}(r/\lambda_n') W_{\lambda_n+1, \nu}(r/\lambda_n) - W_{\lambda_n, \nu}(r/\lambda_n) W_{\lambda_n'+1, \nu}(r/\lambda_n') \right) \right]_{r_0}^{\infty} \end{aligned} \quad (2.3.15)$$

となる．ここで，Whittaker 関数の漸近形 (2.1.4) 式から， $r \rightarrow \infty$ ではこの右辺はすべてゼロになること，および，固有値方程式 (2.3.11) から $W_{\lambda_n, \nu}(r_0/\lambda_n) = W_{\lambda_n', \nu}(r_0/\lambda_n') = 0$ を使うと， $\lambda_n \neq \lambda_n'$ である限り右辺はゼロとなり固有関数の直交性が導かれる． $\lambda_n = \lambda_n'$ となるときは，右辺2項目が $0/0$ の不定形となるため，先に λ_n を固有値としておき，その後， $\lambda_n' \rightarrow \lambda_n$ の極限をとる．これをまとめると，固有関数の直交性の式

$$\int_{r_0}^{\infty} W_{\lambda_n, \nu}(r/\lambda_n) W_{\lambda_n', \nu}(r/\lambda_n') dr = N_n^2 \delta_{n, n'} \quad (2.3.16)$$

を得る．ここに，規格化定数 N_n^2 を

$$N_n^2 = \frac{2\lambda_n^3}{r_0} W_{\lambda_n+1, \nu}(r_0/\lambda_n) \left[\frac{\partial W_{\lambda, \nu}(r_0/\lambda)}{\partial \lambda} \right]_{\lambda=\lambda_n} \quad (2.3.17)$$

と定義する．

以上の結果から，規格化された波動関数を

$$\Psi_{n, m}(r, \theta) = \frac{W_{\lambda_n, |m+\alpha|}(r/\lambda_n) e^{im\theta}}{N_n \sqrt{r} \sqrt{2\pi}} \quad (2.3.18)$$

とすると，その直交性の式

$$\int_{r_0}^{\infty} r dr \int_0^{2\pi} d\theta [\Psi_{n, m}(r, \theta)]^* \Psi_{n', m'}(r, \theta) = \delta_{n, n'} \delta_{m, m'} \quad (2.3.19)$$

が成り立つことになる．

2.4 おわりに

前回の論文を書き終えてから，波動関数の規格化をしておかないと未完成のまま終えてしまったような気がしてきた．そこで，実際に規格化をやってみると，すべての変数を無次元化しておかないと非常に汚い数式になってしまうことがわかり，もう一度やり直すことにしたのが，今回のものである．ここで行われた変数変換は少し奇異に思われるかもしれないが，これは前回のものがあつてのことである．

もう一つ，書いておきたい式がある．それは「モデル1」で定義された (2.2.18) 式の規格化された波動関数は完全系を張るはずで，

$$\sum_{m=-\infty}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} [\Psi_{n, m}(r, \theta)]^* \Psi_{n, m}(r', \theta') = \frac{1}{r} \delta(r - r') \delta(\theta - \theta') \quad (2.4.1)$$

が成り立つ。ただし、この式が成立するのは「モデル1」の場合だけである。「モデル2」では、負エネルギーの束縛状態のみを扱っただけで、正エネルギーの散乱状態についてはまだ議論していない。完全系を張るためにはこの束縛状態、散乱状態の両者が必要になる。しかし、いまのところ、この問題は難しすぎて解けていないので先延ばしすることにしよう。

Euler の公式の導出いろいろ

Various Derivations of Euler's Formula

矢野 忠

Tadashi YANO⁸

3.1 はじめに

このエッセイはすでに愛媛県数学教育協議会の機関誌『研究と実践』第 102 号 (2009.10) に発表したものである。しかし、この機関誌の読者は極めて限られているためにあまり多くの人々に読まれる環境になかった。それで、より広い読者の眼に触れると思われる、このサーキュラーに再掲載することにした。

別々の起源をもって発展してきた指数関数と三角関数が一挙に関係づけられる、Euler の公式

$$e^{ix} = \cos x + i \sin x \quad (3.1.1)$$

は驚くべき公式である。そしてこの関係から容易に導出される関係

$$e^{i\pi} + 1 = 0 \quad (3.1.2)$$

は小川洋子の「博士の愛した数式」 [1] に一番重要な式として出てくる⁹。

この Euler の公式を知っていれば、三角関数の加法公式なども簡単に導き出すことができる。こんな魔法の杖のような、この Euler の公式にも難点がある。それは微積分を知らない人にはその導出が難しいということである。しかし、微積分のごく基本的な知識さえあればその導出に十分なのである。

このエッセイでは指数関数、対数関数、三角関数の微積分の基本的な知識だけでもとづいて Euler の公式を導く方法をいくつか紹介してみよう。

3.2 Taylor 展開を用いた導出

まずは一番正統的な Taylor 展開を用いた導出を示しておこう [2]。

まず、2つの三角関数 $\cos x$ と $\sin x$ の $x = 0$ のまわりの Taylor 展開（これを以後 Maclaurin 展開という）を与えておこう。それらは

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \frac{x^8}{8!} - \dots \quad (3.2.1)$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \frac{x^9}{9!} - \dots \quad (3.2.2)$$

である。

⁸yanotad@earth.ocn.ne.jp

⁹(3.1.2) の他に Euler の公式からすぐに導かれる、いくつか関係については [付録 1] を参照せよ。

つぎに指数関数 e^x の Maclaurin 展開は

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots \quad (3.2.3)$$

で与えられる¹⁰. このとき指数関数の変数 x を形式的に ix に置き換える, すなわち置換¹¹

$$x \rightarrow ix$$

をすれば, (3.2.3) は

$$\begin{aligned} e^{ix} &= 1 + \frac{ix}{1!} + \frac{(ix)^2}{2!} + \frac{(ix)^3}{3!} + \frac{(ix)^4}{4!} + \cdots \\ &= \left(1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \cdots\right) + i\left(x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \cdots\right) \end{aligned} \quad (3.2.4)$$

(3.2.1) と (3.2.2) とを用いれば,

$$e^{ix} = \cos x + i \sin x \quad (3.1.1)$$

が得られる. これが Euler の公式の 1 番目の導出である.

3.3 微分方程式を用いた導出—その 1

つぎに微分方程式を用いた導出を述べよう [3].

三角関数でよく知られた関係に

$$\cos^2 x + \sin^2 x = 1 \quad (3.3.1)$$

がある. これは実数の範囲ならば, これ以上因数分解はできないが, 複素数まで数の範囲を広げれば

$$\cos^2 x + \sin^2 x = (\cos x + i \sin x)(\cos x - i \sin x) \quad (3.3.2)$$

と因数分解できる.

いま $A(x) = \cos x + i \sin x$, $B(x) = \cos x - i \sin x$ とおけば,

$$A(x)B(x) = 1$$

という関係が得られる. もちろん

$$B^*(x) = A(x)$$

という関係がある. ここで星印 (asterisk) * は複素共役を表している.

いま積 $A(x)A(y)$ を考えれば

$$\begin{aligned} A(x)A(y) &= (\cos x + i \sin x)(\cos y + i \sin y) \\ &= (\cos x \cos y - \sin x \sin y) + i(\sin x \cos y + \cos x \sin y) \\ &= \cos(x + y) + i \sin(x + y) \\ &= A(x + y) \end{aligned} \quad (3.3.3)$$

となる. 積が変数の和として現れている. このような性質をもつ関数としては指数関数があり,

$$a^x a^y = a^{x+y} \quad (3.3.4)$$

¹⁰ 三角関数や指数関数の Maclaurin 展開については [付録 2] を参照せよ.

¹¹ ここでは形式的に置き換えたのであるが, 複素解析における「解析接続」をしたと考えることができる.

が成り立っている。すなわち, (3.3.3) は $A(x)$ が指数法則にしたがうことを示している。
さて, ここで $A(x)$ の導関数を求めれば

$$\begin{aligned}\frac{dA}{dx} &= \frac{d}{dx}(\cos x + i \sin x) \\ &= -\sin x + i \cos x \\ &= i(\cos x + i \sin x) \\ &= iA\end{aligned}\tag{3.3.5}$$

となる。すなわち, $A(x)$ は微分方程式

$$\frac{dA}{dx} = iA\tag{3.3.6}$$

を満たしている。この方程式は変数分離形だから, 変数分離して積分すれば

$$\begin{aligned}\int \frac{dA}{A} &= i \int dx \\ \ln A &= ix + C, \quad C = \text{積分定数} \\ A(x) &= Ke^{ix}, \quad K = \text{積分定数}\end{aligned}\tag{3.3.7}$$

が得られる¹²。(3.3.7) で $x = 0$ とおけば,

$$K = A(0) = \cos 0 + i \sin 0 = 1\tag{3.3.8}$$

であるから

$$A(x) = e^{ix} = \cos x + i \sin x\tag{3.3.9}$$

これが Euler の公式の第 2 番目の導出である。

3.4 微分方程式を用いた導出—その 2

もう一つの微分方程式を用いた Euler の公式の導出を述べよう [4]¹³。

いま x を実数として, その指数関数 e^x の虚数 i 乗を考えよう¹⁴。すなわち, $(e^x)^i$ を考える (以後簡単のために $(e^x)^i = e^{ix}$ と表す)。 e^x は実数だが, e^{ix} が何を意味しているのか私たちは知らない。だが, e^{ix} は一般に複素数で表されるだろう。この複素数はもちろん実数 x に依存するだろうから, e^{ix} は

$$e^{ix} = a(x) + ib(x)\tag{3.4.1}$$

とおいてよいだろう。ここで, $a(x), b(x)$ は x の関数であるという以外に私たちはまだその関数形や性質を知ってはいない。それでそれを知る手がかりとしてこの式の両辺を x で微分すれば,

$$ie^{ix} = a'(x) + ib'(x)$$

となる。すなわち

$$e^{ix} = b'(x) - ia'(x)\tag{3.4.2}$$

¹²定数係数の 2 階の線形微分方程式の正統的な解法は $A(x) = e^{px}$ において p の値を求める方法だから, 変数分離形にして解くことを教えない方がよいという先生もいる。[付録 3] を参照せよ。

¹³記述の仕方を少し変更した。元の記述を知りたい方は [4] または [付録 5] を参照せよ。

¹⁴なぜ e^x の i 乗を考えるのか。これを Euler の公式を知っている者の事後証明的な考え, すなわち後知恵ではないかと考えられる方もあろう。確かにそうだが, e^x を自然に導く都浦井の方法については [付録 5] を参照せよ。ここでは以下の話の筋をわかりやすくするための一つの方法と考えてほしい。

である。したがって (3.4.1), (3.4.2) から

$$b'(x) = a(x) \quad (3.4.3)$$

$$a'(x) = -b(x) \quad (3.4.4)$$

の連立微分方程式が成り立つ。(3.4.3) を x で微分すれば,

$$b''(x) = a'(x) \quad (3.4.5)$$

この右辺に (3.4.4) を用いれば,

$$b''(x) = -b(x) \quad (3.4.6)$$

が得られる。同様にして

$$a''(x) = -a(x) \quad (3.4.7)$$

も得られる。

(3.4.6), (3.4.7) の一般解は

$$b(x) = A \cos x + B \sin x \quad (3.4.8)$$

$$a(x) = C \cos x + D \sin x \quad (3.4.9)$$

である。ここで, A, B, C, D は任意の定数である。(3.4.3), (3.4.4) が成立するから, 4 つの任意定数 A, B, C, D は 1 次独立ではなく関係がある。

$$b'(x) = -A \sin x + B \cos x = C \cos x + D \sin x = a(x)$$

であるから

$$C = B, D = -A$$

の関係がある。したがって, 解 $a(x), b(x)$ は

$$b(x) = A \cos x + B \sin x \quad (3.4.10)$$

$$a(x) = B \cos x - A \sin x \quad (3.4.11)$$

となる。

いま, 初期条件として $x = 0$ のときに $a(x) = 1, b(x) = 0$, すなわち, $e^0 = 1$ とすれば

$$a(0) = 1, b(0) = 0 \quad (3.4.12)$$

となる。または

$$a'(0) = 0, b'(0) = 1$$

であるといってもよい。この初期条件を用いて A, B を決めれば

$$A = b(0) = 0 \quad (3.4.13)$$

$$B = a(0) = 1 \quad (3.4.14)$$

となる。

したがって, 初期条件 $e^0 = 1$ を満たす $e^{ix} = a(x) + ib(x)$ の解は

$$a(x) = \cos x, \quad b(x) = \sin x \quad (3.4.15)$$

となり, Euler の公式が成立する。これが 3 番目の導出である。

3.5 de Moivre の公式を用いた導出

4 番目の導出として de Moivre の公式を用いた導出を述べよう [5].

整数 n に対して

$$(\cos \theta + i \sin \theta)^n = \cos n\theta + i \sin n\theta \quad (3.5.1)$$

が成り立つ. これを de Moivre の公式という¹⁵. この de Moivre の公式が任意の実数 x に対して成り立つとする¹⁶. すなわち, 任意の実数 x について

$$(\cos \theta + i \sin \theta)^x = \cos x\theta + i \sin x\theta \quad (3.5.2)$$

が成り立つとする. この式で

$$\theta = 1, E = \cos 1 + i \sin 1 \quad (3.5.3)$$

とおけば,

$$E^x = \cos x + i \sin x \quad (3.5.4)$$

が得られる. この両辺を x で微分すれば

$$E^x \ln E = i(\cos x + i \sin x) = iE^x \quad (3.5.5)$$

したがって

$$E^x (\ln E - i) = 0$$

$E^x > 0$ であるから

$$i = \ln E$$

すなわち

$$E = e^i \quad (3.5.6)$$

であることがわかる. したがって (3.5.4) は

$$e^{ix} = \cos x + i \sin x \quad (3.1.1)$$

となる. これが第 4 番目の導出法である.

3.6 新関の導出

さらに私の友人の数学者, 新関氏の導出法を紹介しよう [6]. いま図 3.1 のように θ_n を導入する. すなわち

$$\tan \theta_n = \frac{x}{n} \quad (3.6.1)$$

このとき, すぐわかるように

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \theta_n = 0 \quad (3.6.2)$$

となる. ところで

$$x = n \tan \theta_n = \frac{n\theta_n}{\cos \theta_n} \frac{\sin \theta_n}{\theta_n} \quad (3.6.3)$$

であるから右辺の $n \rightarrow \infty$ の極限をとれば,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n\theta_n}{\cos \theta_n} \frac{\sin \theta_n}{\theta_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} n\theta_n \quad (3.6.4)$$

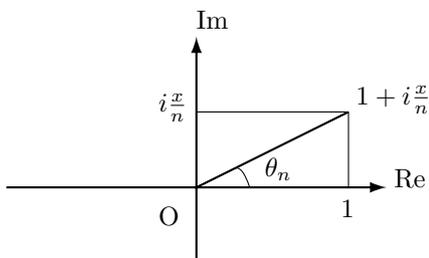


図 3.1: $1 + i\frac{x}{n}$ の複素表示と θ_n の定義

となる. ここで

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \cos \theta_n = 1, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sin \theta_n}{\theta_n} = 1 \quad (3.6.5)$$

を用いた. それで

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n\theta_n = x \quad (3.6.6)$$

が得られる.

つぎに複素数 $1 + i\frac{x}{n}$ を極形式で表すことを考えよう. 一般の複素数 $a + bi$ は極形式では $a + bi = r(\cos \theta + i \sin \theta)$ と表される. ここで, 複素数の絶対値を r とすれば, $r = |a + bi|$ であり, また θ は偏角と呼ばれている.

したがって, 複素数 $1 + i\frac{x}{n}$ は

$$\begin{aligned} 1 + \frac{ix}{n} &= \left| 1 + \frac{ix}{n} \right| (\cos \theta_n + i \sin \theta_n) \\ &= \left[1 + \left(\frac{x}{n} \right)^2 \right]^{1/2} (\cos \theta_n + i \sin \theta_n) \end{aligned} \quad (3.6.7)$$

と表される. これを n 乗をすれば,

$$\left(1 + \frac{ix}{n} \right)^n = \left[1 + \left(\frac{x}{n} \right)^2 \right]^{n/2} (\cos \theta_n + i \sin \theta_n)^n \quad (3.6.8)$$

となる. ここでこの式の $n \rightarrow \infty$ とした極限を考えれば,

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{ix}{n} \right)^n &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left[1 + \left(\frac{x}{n} \right)^2 \right]^{n/2} \lim_{n \rightarrow \infty} (\cos \theta_n + i \sin \theta_n)^n \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} (\cos n\theta_n + i \sin n\theta_n) \\ &= \cos x + i \sin x \end{aligned} \quad (3.6.9)$$

ここで,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left[1 + \left(\frac{x}{n} \right)^2 \right]^{n/2} = 1 \quad (3.6.10)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n\theta_n = x \quad (3.6.11)$$

を用いた. (3.6.9) の左辺に対して

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{ix}{n} \right)^n = e^{ix} \quad (3.6.12)$$

を用いれば, (3.6.9) は

$$e^{ix} = \cos x + i \sin x \quad (3.1.1)$$

となり, これが 5 番目の導出である.

¹⁵ de Moivre の公式は数学的帰納法で証明できる.

¹⁶ この拡張は自明ではない. それでここでは仮定しているが, もちろん数学的に正当化できる.

3.7 Euler の導出

つぎには Euler の考えたと思われる導出法を述べよう。

グレイゼルの数学史 III [7] にはつぎのような記述がある。

すでに 1740 年にオイラーは、自由調和振動の微分方程式を考察し、その 2 つの異なった特殊解、 $2 \cos x$ と $e^{ix} + e^{-ix}$ を得た。それらは級数展開すると同じであることから、オイラーは次の公式を確立した。

$$\cos x = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2} \quad (4)$$

線形 1 階常微分方程式に関する 1743 年の研究論文の 1 つにおいて、オイラーは次の公式を導入した。

$$e^{ix} = \cos x + i \sin x \quad (5)$$

『無限解析入門』で、彼は公式 (1) から出発して、次の公式を確立した。

$$\begin{aligned} \cos x &= \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2} \\ \sin x &= \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i} \end{aligned} \quad (6)$$

これが、最終的に定式化され、証明された有名な《オイラーの公式》で、これからただちに、彼によって前に別の方法で確立された公式 (5) (これも彼の名で呼ばれる) を導いた (確かめてみよ!)。これらの公式の意義についてはオイラー自身が次のように述べている。

「ここからわかることは、どのような形で虚数の指数量が現実の円弧のサインとコサインになるかということである」¹⁷。

この記述からつぎの導出が頭に浮かんでくる。多分 Euler はこのようなプロセスで公式を導いたのであろう (歴史的に忠実かどうかはわからないので、以下は筆者の推論である)。

Euler は自由調和振動の微分方程式 $y'' + y = 0$ をまず考える。この解としては $y = \cos x, \sin x$ という二つの特解があることがわかる。一方、違った解の表示としてやはり二つの特解 $y = e^{ix}, e^{-ix}$ がある。この二つの組の解は見かけは同じには見えない。しかし、調和振動の方程式 $y'' + y = 0$ は 2 階の常微分方程式なので、実際には 1 次独立な特解は二つしかないはずである¹⁸。

そうだとすれば、二つの系統の解の間にはなにか関係が存在するに違いない。では、どうしたらその関係を見つけることができるのだろうか。その手がかりが Maclaurin 展開であった。

まず解 $\cos x, \sin x$ を考えよう。この Maclaurin 展開は

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \frac{x^8}{8!} + \cdots \equiv U \quad (3.2.1)$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \cdots \equiv V \quad (3.2.2)$$

であった。ここで、それぞれを U, V と略記している。

¹⁷ 上の式番号 (1),(4),(5),(6) は引用文中のものであることに注意せよ。

¹⁸ $y'' + y = 0$ の解については [付録 4] を参照せよ。

この U, V と略記された記号を用いれば, もう一方の系統の解 e^{ix}, e^{-ix} の Maclaurin 展開はそれぞれ

$$\begin{aligned} e^{ix} &= 1 + \frac{ix}{1!} + \frac{(ix)^2}{2!} + \frac{(ix)^3}{3!} + \frac{(ix)^4}{4!} + \cdots \\ &= \left(1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \cdots\right) + i\left(x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \cdots\right) \\ &= U + iV \end{aligned} \tag{3.7.1}$$

$$\begin{aligned} e^{-ix} &= 1 + \frac{-ix}{1!} + \frac{(-ix)^2}{2!} + \frac{(-ix)^3}{3!} + \frac{(-ix)^4}{4!} + \cdots \\ &= \left(1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \cdots\right) - i\left(x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \cdots\right) \\ &= U - iV \end{aligned} \tag{3.7.2}$$

と表すことができる.

さて, $\cos x = Ae^{ix} + Be^{-ix}$ において, この式が成り立つような未定係数 A, B を求めてみよう. $\cos x$ および e^{ix}, e^{-ix} を U, V で表せば,

$$U = A(U + iV) + B(U - iV)$$

すなわち

$$(A + B - 1)U + i(A - B)V = 0 \tag{3.7.3}$$

が成り立つ. この式が U, V が任意の値のときに成り立つためには, その係数について

$$A + B - 1 = 0$$

$$A - B = 0$$

が成り立たねばならない. これから

$$A = \frac{1}{2} \tag{3.7.4}$$

$$B = \frac{1}{2} \tag{3.7.5}$$

が得られる. すなわち,

$$\cos x = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2} \tag{3.7.6}$$

が得られる.

同様のことを解 $\sin x$ についても考えよう. $\sin x = Ce^{ix} + De^{-ix}$ において, この式が成り立つような未定係数 C, D を求める.

$$V = C(U + iV) + D(U - iV)$$

すなわち

$$(C + D)U + [i(C - D) - 1]V = 0 \tag{3.7.7}$$

が成り立つ. この式が U, V が任意の値のときに成り立つためには, その係数について

$$C + D = 0$$

$$i(C - D) - 1 = 0$$

が成り立たねばならない. これから

$$C = \frac{1}{2i} \tag{3.7.8}$$

$$D = -\frac{1}{2i} \tag{3.7.9}$$

が得られる。すなわち、

$$\sin x = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i} \quad (3.7.10)$$

が得られる。

以上のことから

$$\cos x = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2} \quad (3.7.6)$$

$$\sin x = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i} \quad (3.7.10)$$

が得られたから、(3.7.6), (3.7.10) から e^{ix} を求めれば, Euler の公式

$$e^{ix} = \cos x + i \sin x \quad (3.1.1)$$

が得られる。これが 6 番目の導出である。

この節を書き上げてから、インターネットを検索したら、同じような着想の導出を見つけた [9], [10]. 示野氏 (岡山理科大学: 現関西学院大学) は同じ発想で e^{ix} と $\cos x, \sin x$ とが $y'' + y = 0$ の解であり, それらが独立ではないことから

$$e^{ix} = A \cos x + B \sin x \quad (3.7.11)$$

とにおいて、これとこの式を x で微分した式

$$ie^{ix} = -A \sin x + B \cos x \quad (3.7.12)$$

とから、 $x = 0$ とにおいて

$$A = 1, B = i \quad (3.7.13)$$

を求めている。

同じことを中川朋子さん (東北工業大学) もされているが、中川さんの説明の重点は $e^{ix}, \cos x, \sin x$ の 3 つの関数が 1 次従属であることを示すために Wronskian を計算するところにある。

3.8 Euler の発見法的な導出

Euler の導出法をもう一つ [8] にしたがって述べておこう。これは de Moivre の公式

$$(\cos z + i \sin z)^n = \cos nz + i \sin nz \quad (3.8.1)$$

$$(\cos z - i \sin z)^n = \cos nz - i \sin nz \quad (3.8.2)$$

から始める。これらを $\cos nz, \sin nz$ について解けば、

$$\cos nz = \frac{(\cos z + i \sin z)^n + (\cos z - i \sin z)^n}{2}$$

$$\sin nz = \frac{(\cos z + i \sin z)^n - (\cos z - i \sin z)^n}{2i}$$

が得られる。これらの式で $nz = x$ とおけば、

$$\cos x = \frac{(\cos \frac{x}{n} + i \sin \frac{x}{n})^n + (\cos \frac{x}{n} - i \sin \frac{x}{n})^n}{2}$$

$$\sin x = \frac{(\cos \frac{x}{n} + i \sin \frac{x}{n})^n - (\cos \frac{x}{n} - i \sin \frac{x}{n})^n}{2i}$$

となる. $n \rightarrow \infty$ では $\cos \frac{x}{n} = 1, \sin \frac{x}{n} = \frac{x}{n}$ であるから,

$$\cos x = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(1 + i\frac{x}{n})^n + (1 - i\frac{x}{n})^n}{2} \quad (3.8.3)$$

$$\sin x = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(1 + i\frac{x}{n})^n - (1 - i\frac{x}{n})^n}{2i} \quad (3.8.4)$$

ところで

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e, \quad e = 2.7182818 \dots : \text{Napier 数} \quad (3.8.5)$$

であるから, この e を実数 x 乗すれば,

$$e^x = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{nx} \quad (3.8.6)$$

いま $nx = t$ とおけば,

$$\begin{aligned} e^x &= \lim_{t \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{x}{t}\right)^t \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n \end{aligned}$$

となる. この式が虚数にも成り立つとすれば, (3.8.3), (3.8.4) から

$$\cos x = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2} \quad (3.7.6)$$

$$\sin x = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i} \quad (3.7.10)$$

が成り立つ. これらの式から $e^{ix} = \cos x + i \sin x$ が直ちに得られる. これが 7 番目の導出である. しかし, [8] ではこの導出は数学的に厳密とはいえないという.

3.9 おわりに

このエッセイでは Euler の公式の 7 つの導出を示した. 2 番目, 4 番目, 5 番目の導出はいずれも複素数の極表示 $\cos x + i \sin x$ と関係がある. 2 番目の導出ではその指数性を, 4 番目, 8 番目の導出では de Moivre の公式を, 5 番目の導出では極表示をフルに使った. その導出の根は同じようだが, 微妙に力点の置き方がちがう. Euler の考えに沿った公式の導出が第 6, 第 7 の導出である.

その多くの導出が事後発見的な様相を呈しているけれども, Euler の公式の導出法がいろいろと考えられるのは興味深い.

また, いくつかの問題点もクローズアップされてきた. その項目だけを挙げておくと

- 1 e^x での実数乗, 複素数乗の定義, 意味
- 2 e^x を e^{ix} に置き換え (指数関数の解析接続)
- 3 $e^{ix}, \cos x, \sin x$ の 1 次従属性 (Wronskian の計算)
- 4 $e^x, \cos x, \sin x$ の Maclaurin 展開での項別微分可能性 (級数の一様収束性)
- 5 e^{ix} の Maclaurin 展開での項の入れ替え (級数の絶対収束性)

これらはすべて数学的には解決がされているとしても, 教育的にもきちんと説明をしなければいけない問題である.

[付録 1] Euler の公式から導ける関係

Euler の公式で $x = \pi/2, \pi$ とおけば、それぞれ

$$\begin{aligned} e^{i\frac{\pi}{2}} &= i \\ e^{i\pi} &= -1 \end{aligned}$$

はすぐ導くことができ (図 3.3, 3.4 参照), これらは e^{ix} が複素平面上の原点 O のまわりの角度 x の回転である (図 3.2 参照) ので, 幾何学的な直観からすぐに理解できるが,

$$i^i = (e^{i\frac{\pi}{2}})^i = e^{-\frac{\pi}{2}} \quad (3.9.1)$$

であることは幾何学的な直観ではわからない.

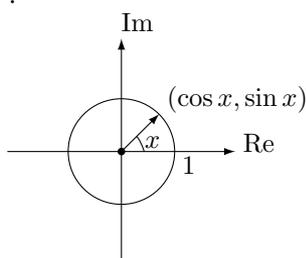


図 3.2: $e^{ix} = \cos x + i \sin x$

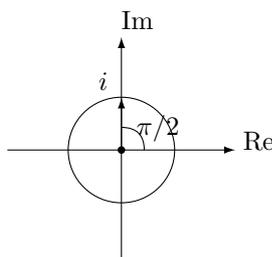


図 3.3: $e^{i\frac{\pi}{2}} = i, x = \frac{\pi}{2}$

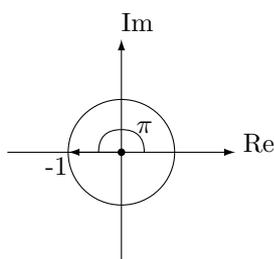


図 3.4: $e^{i\pi} = -1, x = \pi$

[付録 2] Maclaurin 展開

三角関数の $\cos x$ と $\sin x$ および指数関数 e^x の Maclaurin 展開の導き方を示してみよう.

まずそのために $\cos x$ を何回か x で微分してみよう.

$$(\cos x)' = -\sin x$$

$$(\cos x)'' = -\cos x$$

$$(\cos x)''' = \sin x$$

$$(\cos x)^{(4)} = \cos x$$

となる. すなわち, $\cos x$ は4回微分すれば,

$$\begin{array}{ccc} \cos x & \longleftarrow & \sin x \\ \Downarrow & & \Uparrow \\ -\sin x & \Longrightarrow & -\cos x \end{array}$$

と元の関数 $\cos x$ に戻る. これは $\sin x$ も同じで4回微分すれば, 元の $\sin x$ に戻る.

一方, 指数関数 e^x は何回微分しても e^x のままで関数の形が変わらない.

$$(e^x)' = e^x \quad (3.9.2)$$

これらの性質がこの3つの関数の Maclaurin 展開に利用される.

Maclaurin 展開と聞けば, なんだか難しそうだが, そんなことはない. $\cos x, \sin x, e^x$ が

$$\cos x = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + a_4x^4 + \cdots \quad (3.9.3)$$

$$\sin x = b_0 + b_1x + b_2x^2 + b_3x^3 + b_4x^4 + \cdots \quad (3.9.4)$$

$$e^x = c_0 + c_1x + c_2x^2 + c_3x^3 + c_4x^4 + \cdots \quad (3.9.5)$$

とそれぞれべき関数 $x^n, n = 0, 1, 2, 3, \dots$ で上のように展開されるとする. これらの式の係数はすべて未定の係数である. しかし, 同じ方法で決定できるので, 特に $\cos x$ について詳しく見てみよう.

$$\cos x = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + a_4x^4 + \cdots \quad (3.9.3)$$

で, $x = 0$ とおけば,

$$a_0 = 1 \quad (3.9.6)$$

と定数項が決まる.

つぎに (3.9.3) の両辺を x で微分すれば

$$-\sin x = a_1 + 2a_2x + 3a_3x^2 + 4a_4x^3 + 5a_5x^4 + \cdots \quad (3.9.7)$$

となるが, この式で $x = 0$ とおけば

$$a_1 = 0 \quad (3.9.8)$$

と1次の係数が決まる. さらに (3.9.7) を x で微分すれば

$$-\cos x = 2a_2 + 2 \cdot 3a_3x + 3 \cdot 4a_4x^2 + 4 \cdot 5a_5x^3 + \cdots \quad (3.9.9)$$

(3.9.9) で $x = 0$ とおけば

$$a_2 = -\frac{1}{2!} \quad (3.9.10)$$

が得られる.

つづけて (3.9.9) の両辺を x で微分すれば

$$\sin x = 2 \cdot 3a_3 + 2 \cdot 3 \cdot 4a_4x + 3 \cdot 4 \cdot 5a_5x^2 + \cdots \quad (3.9.11)$$

(3.9.11) で $x = 0$ とおけば

$$a_3 = 0 \quad (3.9.12)$$

さらにつづけて (3.9.11) を x で微分すれば

$$\cos x = 2 \cdot 3 \cdot 4a_4 + 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5a_5x^2 + \dots \quad (3.9.13)$$

この式で $x = 0$ とおけば

$$a_4 = \frac{1}{4!} \quad (3.9.14)$$

となる. このような計算をつづければ, $\cos x$ の Maclaurin 展開 (3.2.1) が得られる. 同様にして, $\sin x, e^x$ の Maclaurin 展開 (3.2.2), (3.2.3) が得られる. これらは全く同様に得られるので読者が練習問題としてやってみてほしいが, これを実際に詳細に計算した文献として [11] がある.

原理的には上に説明した通りだが, $\cos x$ の Maclaurin 展開をよく観察してみれば, $x^0 = 1, x^2, x^4, \dots$ といった偶数のべき関数しか現れていないことに気づくだろう. これは $\cos x$ が偶関数 $\cos(-x) = \cos x$ であることの必然的な結果である. だから $\cos x$ が偶関数であるという性質を用いれば,

$$\cos x = a_0 + a_2x^2 + a_4x^4 + a_6x^6 + \dots \quad (3.9.15)$$

とはじめから偶数のべき関数の和として書き表してもよい.

このことは $\cos(-x) = \cos x$ であるから, これを Maclaurin 展開で表せば

$$a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + \dots = a_0 - a_1x + a_2x^2 - a_3x^3 + \dots \quad (3.9.16)$$

が成り立つ. したがって

$$a_1x + a_3x^3 + a_5x^5 + a_7x^7 + \dots = 0 \quad (3.9.17)$$

が得られ, この式がどんな x の値に対しても成り立つためには

$$a_1 = a_3 = a_5 = a_7 = \dots = 0 \quad (3.9.18)$$

が成り立たねばならない. したがって, $\cos x$ の Maclaurin 展開には x の奇数のべきの項は現れない.

一方, $\sin x$ の Maclaurin 展開では x, x^3, x^5, x^7, \dots といった奇数のべき関数しか現れていない. この場合には $\sin x$ が奇関数 $\sin(-x) = -\sin x$ であるから, $\cos x$ の場合と同じような論理で

$$a_0 = a_2 = a_4 = a_6 = \dots = 0 \quad (3.9.19)$$

が成り立つ [12].

しかし, 指数関数 e^x は偶関数でも奇関数でもないので, すべてのべきの関数が現れている.

ここで, Taylor 展開について述べておこう. 任意の関数 $f(x)$ があって, これが無限回微分できるとき, $f(x)$ を

$$f(x) = a_0 + a_1(x-a) + a_2(x-a)^2 + a_3(x-a)^3 + \dots \quad (3.9.20)$$

と $x-a$ の無限のべき級数で展開できるとして, その展開係数を $x=a$ での関数 $f(x)$ の値 $f(a)$ と (高階の微係数を含む) 微係数で表したものである. その係数の決め方は $\cos x$ の Maclaurin 展開の係数を決めたのと同じである. ただ, $f(x)$ の具体的な形が与えられていないから係数は $f(a), f'(a)/1!, f''(a)/2!, f'''(a)/3!, \dots$ で表される. Taylor 展開の一般式

$$f(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \frac{f'''(a)}{3!}(x-a)^3 + \dots \quad (3.9.21)$$

を見れば, なんだか難しそうだが, 考えの基本は関数 $f(x)$ を $x-a$ のべき関数 $1, (x-a), (x-a)^2, \dots$ で表すことができるという点にある. いつでも基本に戻って考えておくことが重要である.

[付録 3] 微分方程式 $\frac{dA}{dx} = iA$ の解

$A(x) = e^{px}$ とおけば,

$$\frac{dA}{dx} = pe^{px} \quad (3.9.22)$$

であるから, これを微分方程式 $\frac{dA}{dx} = iA$ に代入すれば

$$\begin{aligned} pe^{px} &= ie^{px} \\ (p - i)e^{px} &= 0 \end{aligned}$$

$e^{px} \neq 0$ であるから, したがって

$$p = i \quad (3.9.23)$$

となり, 特解

$$A(x) = e^{ix} \quad (3.9.24)$$

が得られる.

[付録 4] 微分方程式 $y'' + y = 0$ の解

まず, $\cos x, \sin x$ が微分方程式 $y'' + y = 0$ の解であることを示す.

$y = \cos x$ とおけば,

$$\begin{aligned} y &= \cos x \\ y' &= -\sin x \\ y'' &= -\cos x \end{aligned}$$

であるから

$$y'' + y = -\cos x + \cos x = 0 \quad (3.9.25)$$

となる. したがって, $y = \cos x$ は $y'' + y = 0$ の一つの特解である.

つぎに, $y = \sin x$ とおけば

$$\begin{aligned} y &= \sin x \\ y' &= \cos x \\ y'' &= -\sin x \end{aligned}$$

であるから

$$y'' + y = -\sin x + \sin x = 0 \quad (3.9.26)$$

となる. したがって, $y = \sin x$ は $y'' + y = 0$ の一つの特解である.

$\sin x = \cos(x - \frac{\pi}{2})$ であるが, $\sin x = A \cos x$ とは表せないから, $\sin x$ は $\cos x$ とは一次独立である. したがって, $\cos x$ と $\sin x$ とは微分方程式 $y'' + y = 0$ の2つの一次独立な特解である.

つぎに, 同様に e^{ix}, e^{-ix} が微分方程式 $y'' + y = 0$ の一次独立な2つの特解であることを示せる. しかし, ここでは Euler にしたがって $y = e^{px}$ において, この微分方程式の解を求めよう. ここで p は未定の定数である.

$$\begin{aligned} y &= e^{px} \\ y' &= pe^{px} \\ y'' &= p^2 e^{px} \end{aligned}$$

であるから

$$\begin{aligned}y'' + y &= 0 \\p^2 e^{px} + e^{px} &= 0 \\(p^2 + 1)e^{px} &= 0\end{aligned}$$

となる. $e^{px} \neq 0$ であるから, 微分方程式が成り立つためには, したがって

$$p^2 + 1 = 0 \quad (3.9.27)$$

が成り立たねばならない. これから p を求めると

$$p = \pm i \quad (3.9.28)$$

になる. すなわち

$$y = e^{ix}, e^{-ix} \quad (3.9.29)$$

は調和振動の微分方程式の二つの特解である.

[付録 5] 都浦井の導出 [4]

実数 x の虚数 i 乗 x^i を考えよう. これが何を意味するかはまったくわからないが, x^i は実数 x の虚数 i 乗であるので, もう実数とは考えられない. したがって

$$x^i = a(x) + ib(x) \quad (3.9.30)$$

と複素数の形におくのが自然であろう. ここで, 実部 a と虚部 b とはそれぞれ x の関数である. 手がかりがあまりないので, 上の式を x で微分すれば

$$ix^{i-1} = a'(x) + ib'(x)$$

すなわち

$$x^i = xb'(x) - ixa'(x) \quad (3.9.31)$$

となる. (3.9.30), (3.9.31) から

$$b'(x) = \frac{1}{x}a(x) \quad (3.9.32)$$

$$a'(x) = -\frac{1}{x}b(x) \quad (3.9.33)$$

が得られる. この連立微分方程式には右辺に $\frac{1}{x}$ という因子があるが, この因子が取り除けると都合がよい. そのために変数変換しよう. いま $t = \ln x$ とおけば

$$t = \ln x \quad (3.9.34)$$

$$\frac{dt}{dx} = \frac{1}{x} \quad (3.9.35)$$

となるので, (3.9.32), (3.9.33) は

$$\begin{aligned}\frac{dt}{dx} \frac{db(t)}{dt} &= \frac{1}{x}a(t) \\ \frac{dt}{dx} \frac{da(t)}{dt} &= -\frac{1}{x}b(t)\end{aligned}$$

と変数変換されるから

$$\frac{db(t)}{dt} = a(t) \quad (3.9.36)$$

$$\frac{da(t)}{dt} = -b(t) \quad (3.9.37)$$

が得られる。これは変数が x から t へと変わっているが、(3.4.3),(3.4.4) である。これから先の計算を繰り返す必要はないだろう。

ところで $t = \ln x$ は対数表示である。これを指数表示で表せば、 $x = e^t$ となる¹⁹。したがって、都浦井の出発点とした $x^i = a(x) + ib(x)$ の代わりに $e^{ix} = a(x) + ib(x)$ をとるという着想が出て来た訳である。これが 3.4 節の導出であった。しかし、これは元の Euler の公式の左辺を生かした発想だと思ってもよい。

[付録 6] 対数表示と指数表示

底 e とべき乗 t の値がわかっている、 e^t の値 x を求めたいとき、

$$x = e^t \quad (3.9.38)$$

と表し、これを指数表示とよぶ。

他方、 x の値とその底 e がわかっている、 $e^t = x$ となる、べき乗 t を求めたいとき、

$$t = \ln x \quad (3.9.39)$$

と表し、これを対数表示とよぶ。

これらの二つの表示においてそれぞれ求めたい数が左辺に現れている。 e^t の指数表示では t は指数とよばれるが、 $t = \ln x$ の対数表示では t は対数とよばれる。これからわかることは対数と指数とは同じものだが、指数とよばれているときには既知の数であり、対数とよばれているときには未知の数である。また、ここで使われた指数と対数はそれぞれ指数関数と対数関数の意味ではないことに注意せよ。

ちなみに対数関数は対数表示で表され、指数関数は指数表示で表される。詳しい説明は [13] を参照せよ。

(2014. 9. 10)

¹⁹対数表示と指数表示という用語は一般には使われていない。著者独自の用語である。付録 6 を参照せよ。

参考文献

- [1] 小川洋子, 『博士の愛した数式』 (新潮文庫, 2005.12) 187, 191, 271
- [2] 矢野 忠, 『電気電子工学科ミニマム』 第3版 (愛媛大学電気電子工学科, 2001.7) 7
- [3] 吉田 武, 『オイラーの贈り物』 (海鳴社, 1993) 300
- [4] <http://www.exfiction.net/tsuzurai/bungei/mubino-mahoroba/mubino-mahoroba.htm>
- [5] 伊藤潤一, いざオイラーの峰へ, 数学教室 (国土社) (2008.1) 75-78
- [6] 新関章三, 『愛媛大学工学部集中講義録』 (1998.11) 33
- [7] グレイゼル (保坂秀正, 山崎昇訳), 『グレイゼルの数学史 III』 改訂版 (大竹出版, 2006.10) 225-226
- [8] 志賀浩二, 『無限の中の数学』 (岩波新書, 1995. 8) 131-139
- [9] www.xmath.ous.ac.jp/shimeno/euler/euler.html
- [10] www.tohtech.ac.jp/comms/nakagawa/euler/euler1.htm
- [11] 西村鷹明, 『物理数学道具箱』 (講談社サイエンティフィック, 2002.4) 144
- [12] 矢野 忠, 「近似式の一例について」を読んで, 物理教育 第34巻, 第2号 (1986.2) 129
- [13] 矢野 忠, 対数とは何か, 徳島科学史雑誌 第28号 (2009.1) 11-16

編集後記

皆様，お元気でお過ごしのことと存じます。

さて，9月に4巻5号と6号を続けて発行できるのは喜ばしい。そんなにあわてて発行することもないではないかと言われれば，その通りであるが。

しかし，最近投稿が多い。ある特定の人が投稿して下さるということもあるのだが，投稿して下さる方々が徐々にではあるが，増えて行きそうである。

なんでも続けてやっているとそれを見て自分も投稿してみようかと思う人が出てくるのは当然のことであろう。それに前号にはすでに掲載された論文のコメントも掲載された。掲載論文についてもコメントのある方はどしどしコメントをお寄せください。

投稿を下さるときの注意として latex で原稿を書く場合に自分用のマクロを使っておられる場合もあるが，あまりたくさんのマクロが使われると編集においてとても手間がかかる。その点で投稿下さる方はできるだけマクロの使用を控えて頂きたい。数行くらいのマクロならいいが，1ページ以上にもなるマクロを使っている場合には他の著者の原稿が自分のマクロのためにうまく表示されないという影響を与える場合がある。

そうはいうものの自由に投稿できるというメリットはこれからもできるだけ保持をしていきたい。皆様のご協力をお願いします。

今号は私の昔のエッセイを掲載したのでページ数が30ページを越えてしまった。これはあくまで例外であって，毎号30ページ以上になることを当然のこととして認めたわけではない。

(矢野 忠)