# 数学・物理通信

**4巻7号　　2014年12月**

編集　新関章三・矢野　忠

2014 年 12 月 2 日

# 目 次

# Contents

# Legendre 関数と全無限弾性体の衝撃問題

# Legendre Function and an Impact Problem of Full-Infinite Elastic Body

世戸 憲治 [1]
Kenji Seto[2]

## 1.1 はじめに

Legendre 関数と言えば，3 次元の波動方程式を，極座標を用いて解くときに角度依存部分に現れる関数というのが，誰もが思い描くものであろう．物理ではそれ以外の分野で Legendre 関数にお目にかかることはほとんどない．現著者は，これまで弾性体に関する種々の衝撃問題を扱ってきたが，問題によっては思いもかけず，動径方向を記述する関数として Legendre 関数に出会うことがある．ここでは，少し理想化されたモデルではあるが，３次元の全無限弾性体の球対称に起こる衝撃問題で，Legendre 関数に出会った例について述べる．

## 1.2 方程式の導入

弾性体の点 $\boldsymbol{r}$, 時刻 $t$ における変位ベクトルを $\boldsymbol{U}(\boldsymbol{r}, t)$ とするとき，その波動方程式は

$$\frac{\partial^2 \boldsymbol{U}}{\partial t^2} = {c_t}^2 \triangle \boldsymbol{U} + ({c_\ell}^2 - {c_t}^2)\boldsymbol{\nabla}(\boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{U}) \tag{1.2.1}$$

となる．ここに，$\triangle$ は 3 次元の Laplacian，$\boldsymbol{\nabla}$ はナブラ演算子である．また，$c_\ell$, $c_t$ は，それぞれ，縦波，横波の伝播速度で，弾性体の Young 率，密度，Poisson 比を，$E$, $\rho$, $\mu$ としたとき，

$$c_\ell = \sqrt{\frac{(1-\mu)E}{\rho(1+\mu)(1-2\mu)}}, \qquad c_t = \sqrt{\frac{E}{2\rho(1+\mu)}} \tag{1.2.2}$$

と定義される．

ここでは，この弾性体につき，つぎのような衝撃問題を考える．すなわち，全無限の弾性体を考え，その中に任意に原点 O をとり，O から半径 $r_0$ の球面上に適当な仕掛けを作り，時刻 $t=0$ の瞬間にトータルとしての力積 $I$ がこの球面の外向きに与えられるようにする．このときの波動方程式は (1.2.1) 式に替わって

$$\frac{\partial^2 \boldsymbol{U}}{\partial t^2} = {c_t}^2 \triangle \boldsymbol{U} + ({c_\ell}^2 - {c_t}^2)\boldsymbol{\nabla}(\boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{U}) + \frac{I}{\rho}\frac{\delta(r-r_0)}{4\pi r^2}\delta(t)\boldsymbol{e}_r \tag{1.2.3}$$

[1] 北海学園大学名誉教授
[2] seto@pony.ocn.ne.jp

と非斉次の項が付いたものになる．ただし，$r$ は原点 O からの距離，$\boldsymbol{e}_r$ は $r$ 方向の単位ベクトル，また，このときの $\delta(t)$ は $t \geq 0$ の領域にそのすべての値域が含まれるように，階段関数 $\theta$ を用いて，

$$\delta(t) \ \rightarrow \ \lim_{\varepsilon \to +0} \frac{1-\theta(t-\varepsilon)}{\varepsilon} \tag{1.2.4}$$

の意味で使っている．

このときの変位 $\boldsymbol{U}$ は明らかに原点 O から遠ざかる方向，すなわち動径方向にしか発生せず，しかもその大きさは原点からの距離 $r$ と時間 $t$ にしか依存しないので，これを $U(r,t)$ と書くことにする．このとき方程式 (1.2.3) は，三次元極座標に変換すると，

$$\frac{\partial^2 U}{\partial t^2} = {c_\ell}^2 \Big[\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{2}{r}\frac{\partial}{\partial r} - \frac{2({c_\ell}^2 - {c_t}^2)}{{c_\ell}^2 r^2}\Big] U + \frac{I}{\rho}\frac{\delta(r-r_0)}{4\pi r^2}\delta(t) \tag{1.2.5}$$

となる．

## 1.3 方程式の解法

ここで，(1.2.5) 式の解法を考える．まず，この式右辺大括弧中の 3 項目にある係数について，(1.2.2) 式から

$$\frac{2({c_\ell}^2 - {c_t}^2)}{{c_\ell}^2} = \frac{1}{1-\mu} \tag{1.3.1}$$

と Poisson 比 $\mu$ だけで書けることを注意する．さらにこの結果を，あとの都合上，

$$\nu(\nu+1) = \frac{1}{1-\mu} \tag{1.3.2}$$

とおくと，方程式 (1.2.5) は

$$\frac{\partial^2 U}{\partial t^2} = {c_\ell}^2 \Big[\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{2}{r}\frac{\partial}{\partial r} - \frac{\nu(\nu+1)}{r^2}\Big] U + \frac{I}{\rho}\frac{\delta(r-r_0)}{4\pi r^2}\delta(t) \tag{1.3.3}$$

と書き直される．この $\nu$ は (1.3.2) 式から

$$\nu = \frac{1}{2}\Big(\sqrt{\frac{5-\mu}{1-\mu}} - 1\Big) \tag{1.3.4}$$

と求められる．ただし，ここでは根号の前の符号は正のみを採用した．その理由については後で述べる．Poisson 比 $\mu$ は，弾性体によって決まる定数であるが，その値は通常 $0 < \mu < 1/2$ の範囲をとる．したがって，$\nu$ の値は，$(\sqrt{5}-1)/2 = 0.618\cdots$ から 1 までの値をとることになる．

ここで，正定数 $k$ と Bessel 関数を用いた $J_{\nu+\frac{1}{2}}(kr)/\sqrt{kr}$ が方程式

$$\Big[\frac{d^2}{dr^2} + \frac{2}{r}\frac{d}{dr} + k^2 - \frac{\nu(\nu+1)}{r^2}\Big]\frac{J_{\nu+\frac{1}{2}}(kr)}{\sqrt{kr}} = 0 \tag{1.3.5}$$

を満たすことに注意して，(1.3.3) 式の未知関数 $U(r,t)$ を

$$U(r,t) = \int_0^\infty K(k,t)\frac{J_{\nu+\frac{1}{2}}(kr)}{\sqrt{kr}}dk \tag{1.3.6}$$

と $r$ について Fourier-Bessel 変換の形で表しておく．これを (1.3.3) 式に代入すると $K(k,t)$ に関する方程式

$$\int_0^\infty \frac{J_{\nu+\frac{1}{2}}(kr)}{\sqrt{kr}}\Big[\frac{d^2}{dt^2} + (c_\ell k)^2\Big]K(k,t)dk = \frac{I}{\rho}\frac{\delta(r-r_0)}{4\pi r^2}\delta(t) \tag{1.3.7}$$

を得る．このままでは $K$ のところに Bessel 関数が入っているのでこれを消去すべく，Bessel 関数の直交性

$$\int_0^\infty J_{\nu+\frac{1}{2}}(kr)J_{\nu+\frac{1}{2}}(k'r)rdr = \frac{1}{k}\delta(k-k'), \qquad \nu+\frac{1}{2} > -1 \tag{1.3.8}$$

を使う．この直交性が成り立つためには，条件 $\nu+\frac{1}{2} > -1$ が必要で，これが (1.3.4) 式のところで，根号の符号を正にした理由である．(1.3.7) 式の両辺に $\left[J_{\nu+\frac{1}{2}}(k'r)/\sqrt{k'r}\right]r^2$ を掛けて $r$ で積分し，この直交性を使うと，$K$ に関する非斉次線形微分方程式

$$\left[\frac{d^2}{dt^2}+(c_\ell k)^2\right]K(k,t) = \frac{I}{4\pi\rho}\sqrt{\frac{k^3}{r_0}}J_{\nu+\frac{1}{2}}(kr_0)\delta(t) \tag{1.3.9}$$

を得る．この一般解は，$A$, $B$ を任意定数，$\theta$ を階段関数として，

$$K(k,t) = A\cos(c_\ell kt)+B\sin(c_\ell kt)+\frac{I}{4\pi\rho c_\ell}\sqrt{\frac{k}{r_0}}J_{\nu+\frac{1}{2}}(kr_0)\sin(c_\ell kt)\theta(t) \tag{1.3.10}$$

となるが，$t=0$ の瞬間に与えられる衝撃の以前には，弾性体は静止状態にあり初速度もなかったとすると，定数 $A$, $B$ はゼロでなければならず，$K(k,t)$ の解は

$$K(k,t) = \frac{I}{4\pi\rho c_\ell}\sqrt{\frac{k}{r_0}}J_{\nu+\frac{1}{2}}(kr_0)\sin(c_\ell kt)\theta(t) \tag{1.3.11}$$

となる．これを (1.3.6) 式に戻してやると，

$$U(r,t) = \frac{I}{4\pi\rho c_\ell}\frac{\theta(t)}{\sqrt{rr_0}}\int_0^\infty \sin(c_\ell kt)J_{\nu+\frac{1}{2}}(kr)J_{\nu+\frac{1}{2}}(kr_0)dk \tag{1.3.12}$$

となる．あとはこの積分がいかに実行されるかだが，これは，「新数学公式集 II」(丸善) p.225, 4.5. あるいは，"Tables of Integral Transforms" Bateman Manuscript Project Vol. I, p.102, (27) に出ており，結果は，第 1 種，第 2 種の Legendre 関数，$P_\nu$, $Q_\nu$ を用いて，

$$U(r,t) = \frac{I}{4\pi\rho c_\ell}\frac{\theta(t)}{rr_0}\begin{cases} 0, & 0 < c_\ell t \le |r-r_0| \\ \dfrac{1}{2}P_\nu\Big(\dfrac{r^2+{r_0}^2-(c_\ell t)^2}{2rr_0}\Big), & |r-r_0| < c_\ell t \le r+r_0 \\ \dfrac{\sin(\nu\pi)}{\pi}Q_\nu\Big(\dfrac{(c_\ell t)^2-r^2-{r_0}^2}{2rr_0}\Big), & r+r_0 < c_\ell t \end{cases} \tag{1.3.13}$$

と得られる．この式における場合分けを，分かり易く図示すると図 1 のようになる．この図は，横軸を $r$, 縦軸を $c_\ell t$ として，変位 $U(r,t)$ がゼロとなる領域，また，$P_\nu$ あるいは，$Q_\nu$ で表される領域を描いたものである．

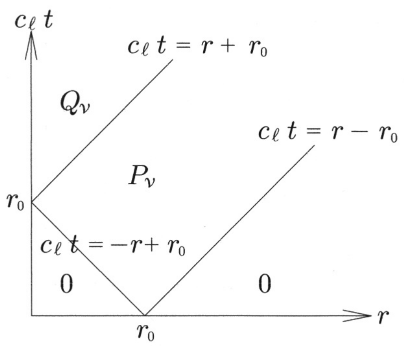


**図 1**　変域の場合分け

$t=0$ の瞬間に点 $r_0$ で受けた衝撃は時間が経つにつれ $r$ 軸の正負の両方向に最大速度 $c_\ell$ で伝播して行き，負方向に伝播した衝撃は時間 $c_\ell t=r_0$ のときに原点に達し，そこで反射が起こる．反射する以前は，変位は $P_\nu$ で表されるが，反射後は $Q_\nu$ で表されるということである．また，この式に現れる Legendre 関数 $P_\nu$ の変数について，$\left[r^2+{r_0}^2-(c_\ell t)^2\right]/(2rr_0)=\cos\theta$ とおくと，この $\theta$ は，辺の長さが $r$, $r_0$, $c_\ell t$ で作られる三角形の辺 $r$ と辺 $r_0$ がなす角に等しく，このときの変数は $-1$ から $+1$ までの値をとる．また，$Q_\nu$ に関してはこのような幾何学的説明はできないが，その変数の値は 1 以上の値をとる．

ここでは衝撃が時間的にデルタ関数で起こるとしたが，そのため，$c_\ell t=r-r_0$ あるいは $c_\ell t=-r+r_0$ の線上では，変位がゼロから有限の値にジャンプすることになる．したがって，そこでは歪みがデルタ関数的になってしまう．さらに悪いことに，$c_\ell t=r+r_0$ の線上では $P_\nu$ の変数は $-1$, $Q_\nu$ の変数は $+1$ となるが，これらの変数値における漸近形は，それぞれ，

$$\begin{aligned}
&x\ \to -1 \quad \text{のとき,}\quad P_\nu(x)\approx\frac{\sin(\nu\pi)}{\pi}\Big[\log\Big(\frac{1+x}{2}\Big)+\gamma+2\Psi(\nu+1)+\pi\cot(\nu\pi)\Big]\\
&z\ \to +1 \quad \text{のとき,}\quad Q_\nu(z)\approx-\frac{1}{2}\log\Big(\frac{z-1}{2}\Big)-\gamma-\Psi(\nu+1),\qquad \nu\neq-1,\ -2,\ \cdots
\end{aligned}\tag{1.3.14}$$

と両方とも対数発散する (“Higher Transcendental Functions” Bateman Manuscript Project Vol.I, pp.163, 164)．ここに，$\gamma$ は Euler 数，$\Psi$ は di-gamma 関数である．現実には，時間的にデルタ関数で起こる衝撃などというものはあり得なく，必ず有限の時間がかかるはずである．このことに関しては次節で論ずることにする．

## 1.4 有限時間で起こる衝撃の場合

ここでは，衝撃を与える時間間隔を有限にした場合について考察する．前節の力積と時間に関するデルタ関数との積 $I\delta(t)$ をトータルとして動径方向に与えられる力 $F(t)$ で置き換える．ただし，ここでは衝撃を始める時間を $t=0$ とし，$F(t)$ は正の時間 $t$ の任意関数として与えられたものとする．したがって，ここで解くべき方程式は (1.3.3) 式に替わって，

$$\frac{\partial^2U}{\partial t^2}={c_\ell}^2\Big[\frac{\partial^2}{\partial r^2}+\frac{2}{r}\frac{\partial}{\partial r}-\frac{\nu(\nu+1)}{r^2}\Big]U+\frac{F(t)}{\rho}\frac{\delta(r-r_0)}{4\pi r^2}\tag{1.4.1}$$

となる．これを前節と同様の処方箋で解くことは可能ではあるが，それには及ばない．ここは線形理論なので，力 $F(t)$ が

$$F(t)=\int_0^\infty dt'F(t')\delta(t-t')\tag{1.4.2}$$

とデルタ関数を用いて書けることに注意すると，前節で得た解において，時間 $t$ を $t-t'$ と平行移動し，あとは重み $F(t')$ を付けて重ね合わせるだけである．ここで重ね合せという言葉を使ったが，実際は，$t'$ に関する積分である．したがってこのときの解は (1.3.12) 式に替わって

$$U(r,t)=\frac{1}{4\pi\rho c_\ell\sqrt{rr_0}}\int_0^t dt'F(t')\left[\int_0^\infty\sin\left[c_\ell k(t-t')\right]J_{\nu+\frac12}(kr)J_{\nu+\frac12}(kr_0)dk\right]\tag{1.4.3}$$

と Duhamel 積分の形で求められる．ここで，時間積分の積分範囲が，$\theta(t-t')$ が入ってくることにより，$(0,\infty)$ から $(0,t)$ に替わることに注意する．さらに，この式の $k$ 積分は前節同様に実行され，変位 $U(r,t)$ は

$$U(r,t)=\frac{1}{4\pi\rho c_\ell rr_0}\int_0^t dt'F(t')\begin{cases}0, & 0<c_\ell(t-t')\le|r-r_0|\\[2mm] \dfrac{1}{2}P_\nu\Big(\dfrac{r^2+{r_0}^2-[c_\ell(t-t')]^2}{2rr_0}\Big), & |r-r_0|<c_\ell(t-t')\le r+r_0\\[2mm] \dfrac{\sin(\nu\pi)}{\pi}Q_\nu\Big(\dfrac{[c_\ell(t-t')]^2-r^2-{r_0}^2}{2rr_0}\Big), & r+r_0<c_\ell(t-t')\end{cases}\tag{1.4.4}$$

と求められる．こんどは，時間積分が付くので，力 $F(t)$ がデルタ関数のような特殊な関数でない限り，その積分値はなめらかになり，$c_\ell t = |r - r_0|$ の線上で変位が不連続になることもなくなるであろうし，また，$c_\ell t = r + r_0$ の線上で $P_\nu$, $Q_\nu$ が対数発散していてもその積分値は有限になることが期待できる．

この式だけを見ても，実際の振動の様子を推測するのは難しい．次節でこの式に基づく数値計算例を示す．

## 1.5 数値計算例

ここで (1.4.4) 式に基づく数値計算例を示すが，ここでは，力 $F(t)$ を最も簡単な形，$t$ が 0 から $t_0$ までは一定値 $F_0$ をとり，それ以外ではゼロとして，

$$F(t) = F_0\,\theta(t)\,\theta(t_0 - t) = \begin{cases} 0, & t < 0 \\ F_0, & 0 < t < t_0 \\ 0, & t_0 < t \end{cases} \tag{1.5.1}$$

とおいた場合を考察することにする．

数値計算をする前に，変数の無次元化をしておく．すなわち，$r_0$ を長さの単位とし，距離 $r_0$ を速度 $c_\ell$ で走る時間 $r_0/c_\ell$ を時間の単位とする．具体的には，変数，$r$, $t$, $U$ を，それぞれ，

$$r/r_0 \;\to\; r, \qquad c_\ell t/r_0 \;\to\; t, \qquad U/r_0 \;\to U \tag{1.5.2}$$

と置き換える．その上で，無次元数を

$$U_0 = \frac{F_0}{4\pi\rho {c_\ell}^2 {r_0}^2} \tag{1.5.3}$$

と定義する．この置き換えで (1.4.4) 式は

$$U(r,t) = \frac{U_0}{r}\int_0^{\mathrm{Min}(t,t_0)} dt' \begin{cases} 0, & 0 < t - t' \le |r-1| \\ \dfrac{1}{2}P_\nu\Big(\dfrac{r^2 + 1 - (t-t')^2}{2r}\Big), & |r-1| < t - t' \le r+1 \\ \dfrac{\sin(\nu\pi)}{\pi}Q_\nu\Big(\dfrac{(t-t')^2 - r^2 - 1}{2r}\Big), & r+1 < t - t' \end{cases} \tag{1.5.4}$$

となる．ここに，積分の上限は，$t$, $t_0$ の小さい方をとる．

(1.5.4) 式に基づいて数値積分を実行し，グラフにしたものを次ページの図 2 に示す．このグラフは，横軸に座標 $r$, 右斜め上に時間 $t$, 上方向に変位 $U$ をとり，立体的に描いたものである．また，ここでは，各パラメータの値を

$$\text{Poisson 比}\ \ \mu = 0.2, \quad \text{したがって，}\nu = 0.7247\cdots, \quad t_0 = 0.2, \quad U_0 = 1 \tag{1.5.5}$$

とした場合を示した．このグラフから，$t = |r-1|$ で，変位に不連続が発生していないこと，また，$t = r+1$ の線上では $P_\nu$, $Q_\nu$ が対数発散をしていたが，積分したものは滑らかになり有限値に抑えられていることが見て取れる．

このモデルの唯一の欠陥は，半径 $r = 1$ のところで発生した波が原点に到達し，反射が起こる時点で，変位が無限大になってしまうことである．これは，球の中心へ向かった波が原点という一点に集中してしまうためである．そのためグラフは $r = 0$ を少し避けたところから描きだしている．ここでは，初めから球対称を仮定したモデルを採用しているため，これは避けられない事実として受け入れるしか方法はないであろう．

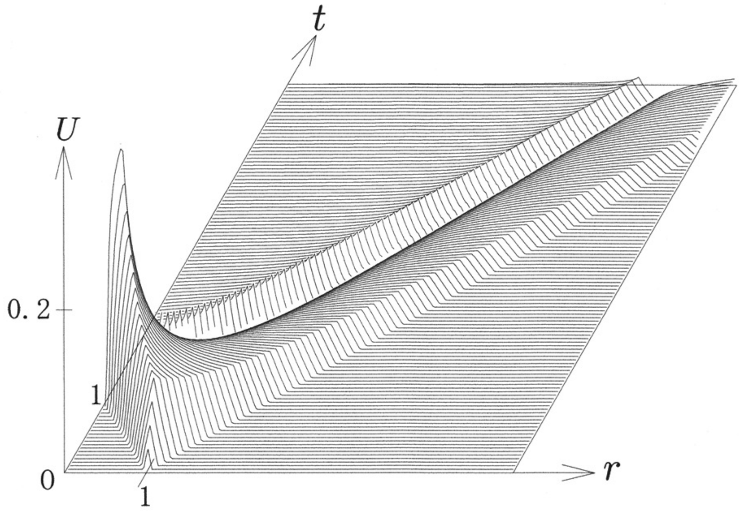


**図 2**　　変位 $U(r,t)$ の数値計算例

## 1.6　おわりに

一般に，衝撃を扱うときは，非線形効果がどの程度入るかが問題となる．しかし，非線形効果を入れてしまうと解析的に解くことはほとんど不可能になってしまう．ここで取り上げたモデルは，線形理論で，しかも，数学的に解きやすくするために理想化されたものである．したがって，ここでの議論を現実の弾性体にそのまま当てはめることはできないが，ここではその極限での振る舞いを調べたということである．しかし，数学的な厳密解が求められるということはそれなりの意義があるものと思われる．

# たかが平均，されど平均

# Merely the Mean, but the Mean

世戸 憲治[3]
Kenji SETO[4]

## 2.1 はじめに

「数学・物理通信」4 巻 5 号に載っている植田洋平氏が書かれたものの中に，

$$[\text{相加平均}] \geq [\text{相乗平均}] \geq [\text{調和平均}] \tag{2.1.1}$$

という式が載っていて，思い出してしまった．私がまだ若かりしころ，大学の統計学の先生がいなくなってしまい，無理やり物理屋の私にその穴埋めのための講義を強いられてしまった．どこの大学でも教養科目としての統計学は存在するが，統計学の専門家となると全国的に見てもほとんどいなくて，しかたなく引き受けた次第である．しかし，物理屋は本来，dynamic な問題に関心があるもので，統計学 (statistics) などという static な学問はどうしても好きにはなれず，幸い 2 年ほどで新しい先生が見つかったので，すぐに辞めてしまった．以下に書くことはこのとき勉強したもので，新しいことはほとんどないが，いまだに記憶に残っている平均値に関する話題を 2 つ取り上げることにする．

## 2.2 一般化された平均値

普通に平均というと相加平均を意味するが，ときには，これでは済まないことがある．辺の長さが，それぞれ，$a$, $b$ の長方形の面積を変えないで，正方形にしたときの一辺の長さは，$\sqrt{ab}$ と相乗平均になる．相加平均を算術平均というのに対し，相乗平均を幾何平均というのはここからきているのかもしれない．もっと実際的な例としては，年毎の経済成長率を $x_i$, $(i = 1, 2, \cdots, n)$ としたとき，この平均値は，$(x_1 + x_2 + \cdots + x_n)/n$ ではなく，相乗平均を使って，$\big[(1 + x_1)(1 + x_2)\cdots(1 + x_n)\big]^{1/n} - 1$ とするのが正しい方法である．調和平均はあまり使われることはないが，いま思いつくのは，ある 2 地点間を往復するのに，往きは速度 $v_1$ で，還りは速度 $v_2$ とすると，その平均速度は，調和平均の $2/(1/v_1 + 1/v_2)$ となる．しかし，この調和という言葉の由来は何なのかよくはわからない．物理では他にも，気体分子の平均速度を表すとき，２乗してから相加平均をとり，そのあと平方根をとる，いわゆる２乗平均が使われる．

これらのように平均と言っても色々な形があるが，これを一般化してしまうと．データ $x_i$, $(i = 1, 2, \cdots, n)$ に対し，

$$M_p = \Big(\frac{{x_1}^p + {x_2}^p + \cdots + {x_n}^p}{n}\Big)^{1/p} \tag{2.2.1}$$

[3]北海学園大学名誉教授
[4]seto@pony.ocn.ne.jp

と定義したものを一般化された平均ということにする．ただし，ここでは，すべての $x_i$ を正とする．もちろん，この定義で，$p=1$ のときは相加平均，$p=-1$ のときは調和平均となる．$p=0$ のときはどうかというと，これは対数をとってから極限値で定義すると，

$$\begin{aligned}\lim_{p\to 0}\log M_p &= \lim_{p\to 0}\frac{\log({x_1}^p+{x_2}^p+\cdots+{x_n}^p)-\log n}{p}\\ &= \lim_{p\to 0}\frac{{x_1}^p\log x_1+{x_2}^p\log x_2+\cdots+{x_n}^p\log x_n}{{x_1}^p+{x_2}^p+\cdots+{x_n}^p}=\log(x_1x_2\cdots x_n)^{1/n}\end{aligned}\tag{2.2.2}$$

となるので，

$$M_0=(x_1x_2\cdots x_n)^{1/n}\tag{2.2.3}$$

と相乗平均に帰着する．

この一般化された平均値 $M_p$ は (2.1.1) 式で見るように，$p$ が大きくなるにしたがい大きくなるが $p\to\infty$ にしたらどうなるのであろうか．これは容易に想像されるように，データ $x_i$ の最大値になるに違いない．実際，データ $x_i$ を小さい順に並べておき，$x_1$ を最小値，$x_n$ が最大値になるようにしておく．そこで，

$$M_p=x_n\Big[1+\Big(\frac{x_1}{x_n}\Big)^p+\Big(\frac{x_2}{x_n}\Big)^p+\cdots+\Big(\frac{x_{n-1}}{x_n}\Big)^p\Big]^{1/p}n^{-1/p}\tag{2.2.4}$$

と変形してから，大括弧の部分を Taylor 展開し，$p$ 無限大の極限をとると，

$$\lim_{p\to\infty}M_p=\lim_{p\to\infty}x_n\Big\{1+\frac{1}{p}\Big[\Big(\frac{x_1}{x_n}\Big)^p+\Big(\frac{x_2}{x_n}\Big)^p+\cdots+\Big(\frac{x_{n-1}}{x_n}\Big)^p\Big]+\cdots\Big\}n^{-1/p}=x_n\tag{2.2.5}$$

と最大値になる．なお，ここでは，最大値が重複していないものとしたが，重複していても結果は同じである．同じようにして，$p$ が負の無限大のときは，

$$\lim_{p\to-\infty}M_p=x_1\tag{2.2.6}$$

と最小値になることが示される．かくして，最大値，最小値までもが平均値の仲間ということになる．

先ほど，この $M_p$ は $p$ が大きくなるにつれ，大きくなると言ったが，それでは，

$$p>q \quad \text{のとき} \qquad M_p\geq M_q\tag{2.2.7}$$

という式が証明されるはずである．この式は Jensen (イェンゼン) の不等式を使うことで証明される．これは，データが存在する範囲内で下に凸の任意関数を $f(x)$ とするとき，不等式

$$\frac{f(x_1)+f(x_2)+\cdots+f(x_n)}{n}\geq f\Big(\frac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n}\Big)\tag{2.2.8}$$

が成り立つというものである[5]．この式は数学的に考えるより，物理的に考える方が理解しやすい．初めに，最も簡単な $n=2$ の場合について考えてみる．いま，曲線 $y=f(x)$ 上の 2 点 $(x_1,f(x_1))$，$(x_2,f(x_2))$ に 2 個の同質量の質点を置くものとして，この重心の位置を求めると，$x$ 座標は $x_G=(x_1+x_2)/2$, また，$y$ 座標は $y_G=\big[f(x_1)+f(x_2)\big]/2$ となり，この重心 $(x_G,y_G)$ は点 $(x_1,f(x_1))$ と $(x_2,f(x_2))$ を結ぶ直線上にある．ここでの関数 $f(x)$ は下に凸なので，重心の位置は，関数値 $f(x_G)$ よりも一般に上にくるので，$y_G\geq f(x_G)$ となって，この式の正しいことがわかる．等号が成り立つのは $x_1=x_2$ のときのみである．

一般の $n$ の場合についても曲線 $y=f(x)$ 上の $n$ 個の点 $(x_1,f(x_1))$，$(x_2,f(x_2))$，$\cdots(x_n,f(x_n))$ のそれぞれに，同質量の質点を置いたものとして重心の位置 $(x_G,y_G)$ を求めてみると，これは必ず，各質点を結ぶ凸型 $n$ 角形の内部に存在することになる．したがって，この重心は曲線 $y=f(x)$ より上の領域に存在することになるので，$y_G\geq f(x_G)$ となり，Jensen の不等式になる．さらに，ここで置く質点の質量をそれぞれ変えることで，重み付 Jensen の不等式を作ることも可能であるが，ここではそこまで立ち入らない．

[5]「数学公式 2」(岩波全書) p.174

この不等式を使って，(2.2.7) 式を証明してみよう．初めに，$p$ を正，$q$ は正負どちらでもよいとして，$p > q$ のとき，$p/q$ は 1 より大，あるいは，負となることに注意して，

$$f(x) = x^{p/q} \tag{2.2.9}$$

とおくと，これは正の $x$ に対し，下に凸の関数となるので，Jensen の不等式が適用でき，

$$\frac{1}{n}\left({x_1}^{p/q} + {x_2}^{p/q} + \cdots + {x_n}^{p/q}\right) \geq \left(\frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n}\right)^{p/q} \tag{2.2.10}$$

となる．ここで，改めて，

$$x_i \ \rightarrow \ {x_i}^q \tag{2.2.11}$$

と置き直すと，この式は，

$$\left(\frac{{x_1}^p + {x_2}^p + \cdots + {x_n}^p}{n}\right)^{1/p} \geq \left(\frac{{x_1}^q + {x_2}^q + \cdots + {x_n}^q}{n}\right)^{1/q} \tag{2.2.12}$$

となって，目的の式 (2.2.7) が出てくる．また，$p$, $q$ 両方が負で，$p > q$ のときは，$q/p > 1$ となり，

$$f(x) = x^{q/p} \tag{2.2.13}$$

とおくと，これが下に凸の関数になるので，Jensen の不等式が使え，

$$\frac{1}{n}\left({x_1}^{q/p} + {x_2}^{q/p} + \cdots + {x_n}^{q/p}\right) \geq \left(\frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n}\right)^{q/p} \tag{2.2.14}$$

となる．ここで，改めて，

$$x_i \ \rightarrow \ {x_i}^p \tag{2.2.15}$$

と置き直すと，

$$\frac{{x_1}^q + {x_2}^q + \cdots + {x_n}^q}{n} \geq \left(\frac{{x_1}^p + {x_2}^p + \cdots + {x_n}^p}{n}\right)^{q/p} \tag{2.2.16}$$

となる．ここで，両辺の $q$ 乗根をとるとき，$q$ は負なので，不等号の向きが変わり，

$$\left(\frac{{x_1}^q + {x_2}^q + \cdots + {x_n}^q}{n}\right)^{1/q} \leq \left(\frac{{x_1}^p + {x_2}^p + \cdots + {x_n}^p}{n}\right)^{1/p} \tag{2.2.17}$$

となり，やはり，目的の式 (2.2.7) に到達する．

別の方法として，一般化された平均値 $M_p$ が $p$ の増加関数になることは，$p$ に関する微係数がゼロまたは正となることでも示すことができるはず，と思って，やってみると

$$\frac{d\,M_p}{dp} = \left[-\frac{1}{p^2}\log\left(\frac{{x_1}^p + {x_2}^p + \cdots + {x_n}^p}{n}\right) + \frac{1}{p}\left(\frac{{x_1}^p \log x_1 + {x_2}^p \log x_2 + \cdots + {x_n}^p \log x_n}{{x_1}^p + {x_2}^p + \cdots + {x_n}^p}\right)\right] M_p \geq 0 \tag{2.2.18}$$

が成立するとよい．$M_p$ は正なので，両辺に $p^2/M_p$ を掛け，

$$\frac{{x_1}^p \log {x_1}^p + {x_2}^p \log {x_2}^p + \cdots + {x_n}^p \log {x_n}^p}{{x_1}^p + {x_2}^p + \cdots + {x_n}^p} \geq \log\left(\frac{{x_1}^p + {x_2}^p + \cdots + {x_n}^p}{n}\right) \tag{2.2.19}$$

となる．ここで，数式簡略化のため，

$${x_i}^p = a_i \tag{2.2.20}$$

とおくことにして，整理すると，

$$a_1^{a_1} a_2^{a_2} \cdots a_n^{a_n} \geq \left(\frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n}\right)^{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}, \qquad a_i > 0 \tag{2.2.21}$$

という不等式になる．この式を直接証明するには，やはり Jensen の不等式で，関数 $f$ を，

$$f(a) = a \log a \tag{2.2.22}$$

とおく．この関数も下に凸になるので，Jensen の不等式が適用でき，ただちにこの不等式が得られる．

## 2.3 新聞売り子の問題

前節で見たように，一般化された平均値には，最小値から最大値まで含めて何でも出てくるので，これだけあればすべて事足りるように思える．しかし，これでは済まない事情もある．例えば，国民 1 人あたりの貯金額の平均値を相加平均で求めてしまうと，世の中には超大金持ちが少数だがいるために，平均値を不当に上げてしまい，実状とかけ離れたものになってしまうということである．こんなときは平均値ではなく，中央値 (median) が使われる．中央値というのはデータを小さい順に並べたとき，中央にくる値，より明確に言うと，データを小さい順に $x_1$, $x_2$, $\cdots$ , $x_n$ と並べたとき，$i$ 番号が $(1+n)/2$ になるところの $x_i$ の値である．なお，$n$ が奇数のときは $i$ が整数になるのでこのままでよいが，$n$ が偶数のときは，$i$ が整数にならないので，その前後の値の相加平均をとるものとする．中央値は，$(x_1+x_n)/2$ と誤解されやすいが，これとはまったく違うものなので注意したい．また，この中央値と前節の一般化された平均値とはどういう関係になるのであろうか．もちろん，$M_p = x_{(1+n)/2}$ と両者の値が一致する $p$ の値は存在するが，これら 2 つはまったく異なる概念に基づくものなので，無理に結び付けない方がよいのではと考えられる．

ここで，中央値が重要な役割を果たす問題として，有名な問題ではあるが,「新聞売り子の問題」というのを扱ってみる.「新聞売り子が，毎日ある部数の新聞を仕入れ，売りさばく．このとき，1 部売れると 10 円の儲け，1 部売れ残ると 10 円の損失になる．毎日何部の新聞を仕入れると利益が最大になるか．これを何日間かの新聞を買いにきた人の人数から判断せよ」という問題である．答えは，買いに来た人数の中央値になる．ここでは，この問題を一般化して，1 部売れると $a$ 円の儲け，1 部売れ残ると $b$ 円の損失として解いてみる．$n$ 日間の買いにくる人数のデータを小さい方から $x_1$, $x_2$, $\cdots$ , $x_n$ として与えられているものとする．ここで，売り子が毎日仕入れる部数を $y$ 部と仮定して，いま，買いにくる人の人数が $x_i$ の日の利益 $R_i$ は

$$R_i = \begin{cases} ax_i - b(y-x_i), & x_i < y, \quad \text{売れる部数 } x_i,\ \text{売れ残り部数 } y-x_i \\ ay, & y \le x_i, \quad \text{売れる部数 } y,\ \text{売れ残り部数 } 0 \end{cases} \tag{2.3.1}$$

となるので，$n$ 日間の総利益 $R(y)$ は

$$R(y) = \sum_{i=1}^{n} R_i = \sum_{i=1}^{x_i<y} \big[(a+b)x_i - by\big] + \sum_{y\le x_i}^{n} ay \tag{2.3.2}$$

となって，これが最大になるように $y$ を決めよという問題になる．ただし，この問題をこのままの形で解くことは限界がある．それは $x_i$ という離散的な変数が入るため微積分が使えないことだ．そこで，$i$ を連続変数 $\xi$ に替え，$x_i \to x(\xi)$ とし，この関数 $x(\xi)$ が与えられたものとする．ただし，このときの $\xi$ の範囲は $\xi_1$ から $\xi_2$ までとする．このときの総利益 $R(y)$ は，和を積分に替えて，

$$R(y) = \int_{\xi_1}^{x^{-1}(y)} \big[(a+b)x(\xi) - by\big] d\xi + \int_{x^{-1}(y)}^{\xi_2} ay d\xi \tag{2.3.3}$$

となる．ここに，$x^{-1}$ は $x$ の逆関数である．この最大値を求めるために，これを $y$ で微分してゼロとおくと，

$$\frac{d}{dy}R(y) = \big[(a+b)x\big(x^{-1}(y)\big) - by\big]\frac{d\,x^{-1}(y)}{dy} - ay\frac{d\,x^{-1}(y)}{dy} - \int_{\xi_1}^{x^{-1}(y)} bd\xi + \int_{x^{-1}(y)}^{\xi_2} ad\xi = 0 \tag{2.3.4}$$

となるが，$x\big(x^{-1}(y)\big) = y$ に注意すると，1 項目と 2 項目は相殺し，3,4 項目から

$$a\big(\xi_2 - x^{-1}(y)\big) = b\big(x^{-1}(y) - \xi_1\big) \tag{2.3.5}$$

となり，これから，

$$x^{-1}(y) = \frac{b\xi_1 + a\xi_2}{a+b}, \quad \to \quad y = x\Big(\frac{b\xi_1 + a\xi_2}{a+b}\Big) \tag{2.3.6}$$

と求められる．これは，区間 $[\xi_1, \xi_2]$ を $a:b$ に内分する点での $x$ の値を仕入れ部数 $y$ としたときが，最大の利益が得られることを示す．ここで，元の離散的なデータ $x_i$ に話を戻すと，$i$ 番号が $i=(b+an)/(a+b)$ のときの $x_i$ を仕入れ部数にするとよいことになる．初めの問題のように $a=b$ のときはちょうど中央値になる．なぜ，平均値にならずに中央値になるかは，よく考えてみると納得がいく．もし，何かの間違いで新聞が飛ぶように売れた日がたった1日あったとする．平均値はそれに引かれて大きくなるが，中央値の方は変化なし．そんな日はたびたびあるわけではないので，その日を夢見てたくさん仕入れてしまうと損するばかりとなる．これまで中央値というのは，平均をとることが面倒なときに使うものくらいに考えていたが，この考えは改めなくてはいけないようだ．

## 2.4 おわりに

ここで扱った一般化された平均をさらに一般化することも可能である．逆関数が一意的に存在する単調連続関数 $F(x)$ を用いて，平均値 $M_F$ を

$$M_F = F^{-1}\Big(\frac{F(x_1)+F(x_2)+\cdots+F(x_n)}{n}\Big) \tag{2.4.1}$$

と定義する．例えば，$F$ として，$F(x)=x$ で相加平均，$F(x)=1/x$ で調和平均，$F(x)=\log x$ で相乗平均になることがわかる．また，$F$ として指数関数にすると，

$$M_{\exp} = \log\Big(\frac{e^{x_1}+e^{x_2}+\cdots+e^{x_n}}{n}\Big) \tag{2.4.2}$$

と，こんなものができる．その他，

$$M_{\sinh} = \sinh^{-1}\Big(\frac{\sinh(x_1)+\sinh(x_2)+\cdots+\sinh(x_n)}{n}\Big) \tag{2.4.3}$$

や

$$M_{\tanh} = \tanh^{-1}\Big(\frac{\tanh(x_1)+\tanh(x_2)+\cdots+\tanh(x_n)}{n}\Big) \tag{2.4.4}$$

といったものが，自由にできてしまう．この (2.4.4) 式では，$x_i \ll 1$ ならば，相加平均とほぼ同じものになり，$x_i$ の中に，$x_i \gg 1$ のものが少数だけ存在してもその値にはそれほど影響されない結果になるので，単位をうまく設定することができれば，先に述べた国民1人あたりの貯金額の平均値を求めるときにも使えるのではないか．

話変わって，ここで取り上げた Jensen の不等式は下に凸の関数であればどんなものでもかまわないので，手当たりしだいにやってみると，

$$\begin{aligned}
&f(x)=e^x, &&\text{として，}\quad \sum_{i=1}^n e^{x_i} \ge n e^{(x_1+x_2+\cdots+x_n)/n}, \quad -\infty < x_i < \infty\\
&f(x)=-\sin(x), &&\text{として，}\quad \sum_{i=1}^n \sin(x_i) \le n\sin[(x_1+x_2+\cdots+x_n)/n], \quad 0 < x_i < \pi\\
&f(x)=-\sqrt{1-x^2}, &&\text{として，}\quad \sum_{i=1}^n \sqrt{1-{x_i}^2} \le n\sqrt{1-[(x_1+x_2+\cdots+x_n)/n]^2}, \quad |x_i|<1\\
&f(x)=x\tan(x), &&\text{として，}\quad \sum_{i=1}^n x_i\tan(x_i) \ge (x_1+x_2+\cdots+x_n)\tan[(x_1+x_2+\cdots+x_n)/n], \quad |x_i|<\pi/2
\end{aligned} \tag{2.4.5}$$

などなど，きりがないほど，たくさんできてしまう．こんなものを作ったからと言ってそれほどの意味はないのかもしれないが．

**謝辞**

今回の原稿も京都大学名誉教授の中西襄先生にお目通しいただき，大変有意義なご指摘をいただきました．ここに謹んで感謝いたします．

# 『四元数の発見』へのコメント

# Comments on "Discovery of the Quarternion"

中西　襄[6]
Noboru Nakanishi[7]

最近，矢野忠氏の著書「四元数の発見」が発行された．この本は「数学・物理通信」で 10 回にわたり掲載された彼の四元数関連の論説記事のまとめである．この本の第 1 章「四元数に近づく」は,「数学・物理通信」1 巻 9 号 (2011)，18 の再録であるが，彼が四元数について深く考える端緒となったという Cauchy-Lagrange の恒等式のことが述べられている．そこで引用されているのが，次の恒等式である：

$$(a^2+b^2)(x^2+y^2) = (ax+by)^2 + (ay-bx)^2,$$

$$\begin{aligned}(a^2+b^2+c^2)(x^2+y^2+z^2) &= (ax+by+cz)^2 \\ &\quad + (ay-bx)^2 + (bz-cy)^2 + (cx-az)^2,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&(a^2+b^2+c^2+d^2)(x^2+y^2+z^2+w^2) \\ &\quad = (ax+by+cz+dw)^2 + (ay-bx)^2 + (az-cx)^2 \\ &\qquad + (aw-dx)^2 + (bz-cy)^2 + (bw-dy)^2 + (cw-dz)^2.\end{aligned}$$

これらの式の一般形は，もちろん

$$\Big(\sum_{j=1}^{n} a_j^{\,2}\Big)\Big(\sum_{k=1}^{n} x_k^{\,2}\Big) = \Big(\sum_{j=1}^{n} a_j x_j\Big)^2 + \sum_{1\leqq j<k\leqq n} (a_j x_k - a_k x_j)^2$$

となる．英文 Wikipedia の Lagrange's identity という項目に載っているが，そこでの証明はゴタゴタしている．

証明は実は極めて簡単で，右辺の後ろ部分の各項が $j=k$ で 0 であることに注意するだけでよい．

$$\begin{aligned}右辺 &= \Big(\sum_{j=1}^{n} a_j x_j\Big)^2 + \frac{1}{2}\sum_{j,k=1}^{n} (a_j x_k - a_k x_j)^2 \\ &= \sum_{j,k=1}^{n}\Big[a_j a_k x_j x_k + \frac{1}{2}\Big(a_j^{\,2} x_k^{\,2} - 2a_j a_k x_j x_k + a_k^{\,2} x_j^{\,2}\Big)\Big] \\ &= \sum_{j,k=1}^{n} a_j^{\,2} x_k^{\,2} \\ &= 左辺\end{aligned}$$

[6]京都大学名誉教授
[7]nbr-nak@trio.plala.or.jp

同じ項目に複素数の場合への拡張式が与えられているが，その証明はずいぶんひねくれたやり方だ．Binet-Cauchy の恒等式の特殊の場合として導くのがずっと自然である．Binet-Cauchy の恒等式（英文 Wikipedia の Binet-Cauchy identity の項目参照）は，

$$\Big(\sum_{j=1}^{n} a_j b_j\Big)\Big(\sum_{k=1}^{n} c_k d_k\Big) - \Big(\sum_{j=1}^{n} a_j c_j\Big)\Big(\sum_{k=1}^{n} b_k d_k\Big) = \sum_{1\leqq j<k\leqq n} (a_j d_k - a_k d_j)(b_j c_k - b_k c_j)$$

である．証明は，右辺の各項の因子が $j$ と $k$ について反対称であることに注意すれば，上と全く同様に，

$$\begin{aligned}
\text{右辺} &= \frac{1}{2}\sum_{j,k=1}^{n} (a_j d_k - a_k d_j)(b_j c_k - b_k c_j) \\
&= \frac{1}{2}\sum_{j,k=1}^{n} (a_j b_j c_k d_k - a_j b_k c_j d_k - a_k b_j c_k d_j + a_k b_k c_j d_j) \\
&= \sum_{j,k=1}^{n} (a_j b_j c_k d_k - a_j c_j b_k d_k) \\
&= \text{左辺}
\end{aligned}$$

となる．

なお，四元数に直接関連する恒等式は，Cauchy-Lagrange の恒等式というよりも，3 節で考えられた恒等式の方であろう．すなわち恒等式の系列

$$a^2x^2 = (ax)^2$$

$$(a^2+b^2)(x^2+y^2) = (ax+by)^2 + (ay-bx)^2$$

$$\begin{aligned}
&(a^2+b^2+c^2+d^2)(x^2+y^2+z^2+w^2) \\
&\quad=(ax+by+cz+dw)^2 + (bx-ay+dz-cw)^2 \\
&\qquad+ (cx-dy-az+bw)^2 + (dx+cy-bz-aw)^2
\end{aligned}$$

を考えると，それぞれ実数体，複素数体，四元数体における絶対値の積公式 $|\alpha|\cdot|\beta| = |\alpha\beta|$ に対応する．八元数は結合律を満たさないから具合が悪い．だから $n = 1, 2, 4$ のときしかこの系列の恒等式は存在しないのであろう．

# 自著『四元数の発見』を語る

# My Book “Discovery of Quaternions”

矢野　忠
Tadashi Yano[8]

## 4.1　はじめに

2014 年 10 月 1 日に『四元数の発見』 [1] を上梓した．この『数学・物理通信』の論文がちゃんとした学術雑誌の論文となった例はすでにあるが，まだ出版社から書籍となって出版された例はいまのところ他にはまだないので，自著について語ってみたい．

また，将来はこのサーキュラー『数学・物理通信』の論文とかエッセイから書籍ができあがるようなことが頻繁に起こることも想定できないわけではない．

そういう場合の先例としての役にも立つかもしれない．

## 4.2　話のはじまり

話は6，７年前にはじまる．Cauchy-Lagrange の恒等式に関心をもってその証明をレビューすることからはじまった．

もっと以前の 1994 年に Lagrange の恒等式の証明について書いたことがあったので，Cauchy-Lagrange の恒等式に関心がもともとあったのだが，それについて精力的に調べ始めたのは 2006 年からのことである．

そしてその証明の一つとして四元数による証明を知った．そのことがそもそも四元数に関心をもったきっかけであった．

そのときはただ単に Cauchy-Lagrange の恒等式を証明する一つの手段に過ぎなかった．ところが 2007 年くらいから四元数そのものに関心が出て来て，2009 年には「四元数の発見」と題するエッセイを書いた．これは発表は 2009 年 9 月だが，原稿の完成した日付は 2008 年 2 月 29 日である．一年以上原稿が愛媛県数学教育協議会（愛数協）の機関誌「研究と実践」編集部にあったことになる．しかし，このエッセイは Hamilton の 1844 年の論文の一部の解読にしかすぎなかった．

2007 年 11 月 5 日にはすでに『ハミルトンと四元数』 [2] が発行されており，その第 2 章が「四元数の発見」というタイトルであった．それは Hamilton の四元数の発見の当日のノートの翻訳であったが，私には大部分が理解できなかった．

ただ，私の書いたエッセイは翌年の 2008 年 3 月までにはすでにできており，それを海鳴社にメールで送ってこちらの方がわかりやすいのではないかと書いた．それがいつ頃だったかいまとなってはわからないが,『ハミルトンと四元数』の編集に携わったサイエンスライターの木幡赳士さんも私の意見に同意されたと伺った．

[8] yanotad@earth.ocn.ne.jp

それが海鳴社の辻さんとの関わりのはじめであった．そしてしばらくして辻さんから四元数の本を出しませんかとお誘いを受けた．

そのころ，海鳴社はバウンダリー叢書を出版し始めており，辻さんはその叢書の 1 冊にしたい意向のようであった．それも数か月後くらいに出さないかとのご意向であった．

しかし，私にはとても多くの未解決の問題があり，とても書籍として出せるような状態ではなかった．それで出版社の意向は意向としても私にはどうすることもできなかった．

その後，2009 年 12 月から『数学・物理通信』発行を元高知大学の新関章三さんとはじめた．だが，四元数のことを書きはじめるのは 2011 年 9 月の『数学・物理通信』1 巻 9 号からである．

それからも『数学・物理通信』に原稿が準備できなくて記事を載せられない号もあった．ようやく 2014 年 4 月の 4 巻 2 号になって「四元数と球面線形補間」を書いた後で，ようやく本としてまとめる可能性が出てきた．

それで改めて海鳴社にメールして出版の可能性を尋ねた．ほどなく出版したいという海鳴社の意向が示されたので，この 4 月以来，連載した原稿を書籍にするための原稿への改稿をはじめて 10 月 1 日の発行となった．

## 4.3　困難を感じた点

四元数の発見への道筋の一番肝心なところはもうわかっていたけれども,『ハミルトンと四元数』の第 2 章の「四元数の発見」のところはまったくわからないままであった．それではまったく展望が開けない．この第 2 章は数式が多くてまったくわからなかった．

なんだか幾何学的なイメージをハミルトンがもっていたのだろうとは思ったが，とりつく手がかりがない．しかし，なんどもこの章を読んでいるうちに複素数とのアナロジーをもって三元数を考えたのではないかと思うようになった．

その考えにしたがって読み解いたのが，私の本の第 3 章である．まだ十分にハミルトンの考えを解読してはいないかもしれないが，おおよその感じをつかめたと思ったのでそれを第 3 章に書いた．

四元数の発見の経緯はそれで大体理解できた思ったので，空間回転を四元数で表す式 $u = qv\bar{q}$ を理解することがつぎの問題となった．

しかし，インターネットで調べてもそれをわかるように書いたものを見つけることができなかった．ところが四元数を理解するなら Kuiper の本 [3] がわかりやすいと書いたアマゾンコムの書評があった．それで Kuiper の本をインターネットで購入して，ようやく書籍の第 4 章にあたる部分が書けた．

そうこうしているうちに 2 回の鏡映で回転を表すことができて，それから空間回転の四元数表示を導き出せるということをインターネットで知った [4]．ただ，そのインターネットの説明は，続いた 2 回の鏡映変換による回転が同一平面内での回転であることをはっきりと示していないのではないかと気になった．しかし，河野俊丈著『新版　組みひもの数理』 [5] が引用されてあったので，それを購入した.「空間回転 2」がそれらの説明と同じになっているかどうかは忘れたが，2 回の鏡映による回転が同一平面の中で行われていることに特に注意して説明を行った．ともかく基本的にその説明はこの書 [5] によっている．

第 6 章にあたる「空間回転 3」は 2013 年 3 月にようやく発表したが，第 5 章となった原稿を書いてから半年ほど時間が経ってしまった．この第 6 章は同形写像を指導原理として，空間回転の四元数の表現を導いている．これもやはりインターネットでそのことを知ったのだが，そのインターネットの説明は私には不十分に思えた [6]．というより同形写像で導けると書いてありながら，途中で 2 回の鏡映による空間回転に説明の重点を移している．それできちんとした同形写像からの空間回転の説明をしたインターネットの記事とか書籍を探したら，ポントリャーギンの『数概念の拡張』（森北出版） [7] が見つかった．ポントリャーギンの説明は数学者らしく簡潔である．そのためか私には発見法的な観点からみて，なかなか納得ができなかった．そのギャップを私の書では埋めることを試みた．私の説明が読者の納得できるものになっているかどうかはわからない．

第 7 章から第 9 章では四元数からはなれて空間回転の表現のしかたのいろいろをとりあげた．まず第 7 章は空間回転の SU(2) による表現である．しかし，ちょっと四元数と関係しているところもある．2 行 2 列のマト

リックスで表した

$$P = \begin{pmatrix} x^3 & x^1 - ix^2 \\ x^1 + ix^2 & -x^3 \end{pmatrix} \tag{4.3.1}$$

をユニタリー変換 Q で変換した

$$P' = QPQ^{\dagger} \tag{4.3.2}$$

を四元数の空間回転の表現

$$u = qv\bar{q} \tag{4.3.3}$$

から導くが，そのとき

$$v = x^1 i + x^2 j + z^3 k \tag{4.3.4}$$

の $i, j, k$ を Pauli 行列と対応させる．この対応をはじめ

$$i \to i\sigma_3, \quad j \to i\sigma_2, \quad k \to i\sigma_1 \tag{4.3.5}$$

と対応させていた．しかし，これでは SO(3) との一致を見るときに変数の置換えをするなどの処置をしなくてはならなかった．義弟の大槻俊明氏の助言 [8] にしたがって

$$i \to -i\sigma_1, \quad j \to -i\sigma_2, \quad k \to -i\sigma_3 \tag{4.3.6}$$

と対応を変えたら，変数の置換えをする必要がなくなり，SO(3) との一致を簡単にみることができるようになった．

実は第 7 章に対応した連載のエッセイは 2 つあり，後から修正したエッセイを私の書には採用した．前のほうのエッセイは間違っていたわけではないが，ちょっと変数の置換え等のテクニカルな面倒さがあった．

第 8 章はさして困難を感じた箇所はなかったが，第 9 章の「Euler 角と空間回転」ではジンバルロックの現象の説明が閲読者 K さんの指摘を受けるまで間違っていることに気がつかなった．

第 10 章「四元数と球面線形補間」はわかってしまうととてもすっきりした議論である．しかし，その 10.5 節「球面線形補間 2」のところはやはり大槻氏の説明 [9] をメールでもらってようやくわかった．説明のしかたは少し工夫をしたが，基本的には大槻氏の説明によっている．10.6 節の「四元数の球面線形補間」では差分のフラクションをとるという表現の理解に苦しんだ [10]．

四元数のべき乗の箇所もその説明の理解に苦しんだ．なんとかこのところも読み解いて付録 10.11「四元数の指数関数，対数関数，べき乗」に自分の言葉で述べることができた [11]．そのことをきちんと述べた文献もあるのだろうが，私にもわかるように書かれた文献には出会わなかった．そのためにすこしもってまわった説明となっているかもしれない．

第 12 章「補注」では四元数においては −1 の平方根が無限にあるということに閲読者の K さんの指摘を受けるまで気がつかなかった [12]．閲読者の K さんに言われてようやくそのことについて自分で考えざるえなくなって，連立方程式を解いてみた．そして，K さんのいい分を正しいとようやく認めた．書籍を書き上げてそれも発行になった後で英語の wikipedia [13] を読んだら，このことに触れてあることに気がついた．しかし，自分で考えてみるまでは，この説明は理解できなかったと思う．

補注で詳しく触れた四元数の実部と虚部とが直交しているということもポントリャーギンの『数の概念の拡張』に書かれてはいたが，なかなか理解できなかった．閲読者の K さんに言われて再考したが，結局複素数について述べた『複素数の幾何学』 [14] をみて，ようやく了解できたのであった．

## 4.4 おわりに

こうやって振り返って見てみるといたるところに私の理解できない箇所，理解困難な箇所があったことがわかる．それを何人かの人たちの手助けやヒントと文献の助けを借りて読み解くことができるという幸運に出会

わなかったら，とてもこの本を私が書くことができたとは思えない．それを 1 冊の本としてまとめるということよりも単に四元数を自分にでもわかるようになりたいという思いの方が強かった．

四元数はやはりマイナーの分野である．だから，わかりやすく書かれた書籍とかインターネットのサイトなどない．いや，インターネットのサイトは多いのだが，テクニカルに走っており，誰も自分の理解したことを分かりやすい言葉では書いていない．

四元数に関する特許は多分もう日本だけでも 200 件を越えるが，特許には説明があるけれども大体その文書はあまり読みやすくはない．これは別にテキストではないのだから当然であろう．また論文もその説明を分かりやすく書く義務など著者にはない．特許も論文もオリジナルでありさえすればよい．

そういう分野のテーマをものわかりが早いとはいえない頭で考えたのだから，7 〜8 年の年数がかかったのは当然であった．

最後に，ずいぶん原稿を何度も見てミスプリントがなくなったかと思っていたが，どうもそうはいかなかった．特に第 11 章と第 12 章を中心としてミスプリントがある．その他のところにもミスプリントがある．再版の機会があればその訂正をしたいが，その機会があるかどうか．出版社の海鳴社のホームページにミスプリントのページができれば，そこにはミスプリントの掲載をしたいと思っている．

(2014.11.20)

# 参考文献


[1] 矢野　忠,『四元数の発見』(海鳴社, 2014)

[2] 堀源一郎,『ハミルトンと四元数』(海鳴社, 2007)

[3] J. B. Kuipers, *Quaternions and Rotation Sequences* (Princeton University Press, 2002)

[4] momose-d.cocolog-nifty.com/Quaternions_Rotatios_Meaning.pdf

[5] 河野俊丈,『新版　組みひもの数理』(遊星社, 2009) 105-120

[6] http://sammaya.garyoutensei.com/math_phys/math1/

[7] ポントリャーギン,『数概念の拡張』(森北出版, 2002)

[8] 大槻俊明, 私信

[9] 大槻俊明, 私信

[10] F. Dunn and I. Parberry （松田晃一　訳）, ゲーム 3D 数学（オライリー・ジャパン, 2008) 167-176

[11] F. Dunn and I. Parberry （松田晃一　訳）, ゲーム 3D 数学（オライリー・ジャパン, 2008) 168-172

[12] M. Kawasaki, 私信

[13] http://en.wikipedia.org/org/Quaternion

[14] 片山孝次,『複素数の幾何学』(岩波書店, 1982) 217-219

# 編集後記

いよいよ師走，皆様方も元気でお過ごしの事と存じます．振り返ってみると今年も各地で水害や広島の土砂崩れで多数の死傷者，家屋の倒壊等，今年も痛ましい災害が起きている．とりわけ，安全で思われていた木曽の御嶽山が突如噴火して死者・行方不明者 60 余名に達していると言われている．

さて，今回もお蔭様で『数学・物理通信』4 巻 7 号をを発刊するに至りました．何度も何度も繰り返して言おう,「継続は力なり」と．編集者はこの精神を忘れないよう今後とも頑張らなければと思っております.

今回御投稿を頂いた 3 名の方々は本誌の得難い常連の投稿者であり，5 つの論文は大変興味深く，しかも力作ばかりである．これら 4 つの論文やエッセイは数学と言ってもかまわないが，やはり数学を専門とする人の論文も欲しいところである．次回はそうありたい.

最後に一つ注目したいのは，世戸氏の第 2 論文 「たかが平均，されど平均」の“ おわりに ”の内容は特に興味が惹かれた.

（新関 章三）