

数学・物理通信

5卷1号 2015年3月

編集 新関章三・矢野 忠

2015年3月2日

目次

武藤 徹先生への手紙	3
1.1 手紙	3
1.2 編集者付記	4
1.3 参考文献	4
正弦法則と余弦法則	5
2.1 はじめに	5
2.2 正弦法則と余弦法則	6
2.3 第一余弦法則と第二余弦法則の同値性	7
2.4 正弦法則から余弦法則へ	7
2.5 余弦法則から正弦法則へ	9
2.6 ヘロンの公式	11
2.7 外接円の半径	12
2.8 正弦法則と余弦法則の同値性	12
2.9 おわりに	13
2.10 付録 関連したサイトの短評	14
2.11 参考文献	14
加比の理	15
3.1 はじめに	15
3.2 加比の理	15
3.3 一般化された加比の理	17
3.4 おわりに	18
3.5 参考文献	18
ノート「$(-1)^2 = +1$ と $i^2 = -1$」へのコメント	19
4.1 はじめに	19
4.2 自然数から整数へ	20
4.3 終わりにかえて	23
編集後記	26

Contents

1. Kohtaro KONDO: Letter to Mr. Tohru Muto
2. Tadashi YANO: Laws of Sines and Cosines
3. Tadashi YANO: Componendo
4. Katsusada MORITA: Comment on the note “ $(-1)^2 = +1$ and $i^2 = -1$ ”
5. Shozo NIIZEKI: Editorial Comments

武藤 徹先生への手紙

Letter to Mr. Tohru Muto

近藤康太郎¹

Kohtaro KONDO²

1.1 手紙

昨年末は、年末の慌ただしい中、急に呼びつけるようなかっこうになってしまっていて、まことに申し訳ありませんでした。しかし、先生のお元気そうなお様子を見て、うれしく存じました。

あのあとも、苦勞しながら、『武藤 徹の高校数学読本』[1]を読み続けています。朝起きがけに、顔を洗うより先に、この本を読むことを習慣にしています。手垢のついていないおろしたての朝が、さらに、清々くなるようで、気持ちよく1日を始められます。といっても、わたしの乏しい理解力では、1日1ページ、2ページしか進まないことが稀ではないのですが、ここ数日も、タルターリアの3次方程式がわからず、ネットでいろいろ調べたりしながら、難儀して七転八倒しています（それでもやはりわからないので、とりあえず飛ばして全体をみようかと思えます）。武藤先生は頭がよすぎて、少しおつむの足りない読者がどこで躓くのか、なかなか想像できないのではなからうか、と。できれば、わたしがこの本の編集者をしたかった、そして質問攻めにしたかった、という思いです。

会ったときにも申しましたが、この本は、世界に二つとない、驚くべき数学思想書、人類思想史だと思います。広く読まれるべき、燦然と輝いて後世に残るべき本です。ここまでラジカル（根源的）に考えた本は、ほかにあまり思いつきません。このような思想家に、出来の悪い生徒であったとはいえ、3年間教わったことを、一生の誇りに思います。

この間、先生にお会いして、確かめたかったことは、次のようなことだったのです。ご本のiiページにありますように、「数学は、人間が勝手に作り上げたもので実際に存在するものではありません」。それにもかかわらず、ハヤブサがイトカワまで出かけて還ってくるなど、リアルの世界で大きな役割を果たしています。これが、なぜなのか、わからなかったのです。10年以上も苦しんでいます。

読本の第1巻の範囲で言えば、複素数はもちろんのこと、負の数も、あるいは自然数でさえ「実在」するものではない。人間が、勝手に、頭の中だけで作り上げた、いわばフィクションである。数学の理論に対する経験的な現象や出来事があるわけではない。それにもかかわらず、数学は、たとえば物理学や経済学などではありえないくらい、現実世界を正確に記述しているように、見える。また、ハヤブサの例のように、経験的な現象に、有用でもある。数学は、現実とは独立した、自立・自閉したゲームのようなもので、無理数も複素数もそのルールに整合するかたちで<拡張>していく。それであるならば、なぜ経験科学にも使えるのか。リアルの世界でも有用なのか。

以上が、自分の疑問でありました。また、これはわたしだけの話ではなく、名高い哲学者や、あるいは科学者でさえも、同じような疑問を呈して「たしかに、そこが数学の不思議ですね」などと書いて終わっている、そういう書物も多いのです。

¹朝日新聞諫早支局長

²kondo-k@asahi.com

しかし、先生の読本の、ほとんど最初の方で、この疑問に対して、かなりあっさり、平然(?)と解答されているのではないかと、というのがわたしのもった疑問であり、先生にお会いして確かめたかったことでした。

「数えるとか、測るといった、日常の必要から生まれた数が、向きを持つ正負の数に、方向を持つ複素数にと拡張される」。その<拡張>が、数学の内在運動である。しかし、<拡張>はするものの、そのときに適用するルール(公理、としていいのでしょうか)はあくまでリアルの世界からの観察で、数えるとか、測るといった人間の作業で、自然界を観測して、得られたものである。そうした、リアルの世界から得た法則性を、ルールを拡張して適用している。だから、抽象思考の数学の世界で、ゲームの対象をどんどん拡張していても、それは自然界を表現し、世界を記述するのに有用であるのは、むしろ当たり前だ。自然にかなっているのは、不思議でもなんでもない。

およそ、これが武藤先生の本の、ごく最初の部分から得たわたしの結論でした。見当外れでなければいいのですが。しかし、これはあっさり書かれていますが、前記のように、少くない哲学者、科学者も悩ませている「不思議」のはずだったのではないのでしょうか。これも武藤先生にかかると思えば驚き、驚き、恥じ入り、尊敬の念を新たに思う思いです。

で、あるとするならば、数学もやはり、人間による自然の認識方法(空間認識や時間認識)という、人間特有の方法によって、ある限界が設定されている、ともいえるのではないかと。などなど、また新しい疑問もわいてきます。いずれにせよ、近年読んだことのない刺激的な思想書で、まだまだ数年かかりそうですが、新聞記者としての「余生」はこの本とともに豊かに過ごせそうです。あらためまして、ありがとうございました。(後略)

2015.1.14
近藤康太郎

1.2 編集者付記

この手紙は武藤 徹先生(数学思想史家)に書かれた私信です。本来、公開することを前提にして書かれてはおりません。私信であるにもかかわらずここに転載を許可して頂いたことに編集人として私信の発信人である近藤康太郎さんと受信者の武藤 徹先生に厚くお礼を申し上げます。

転載を許可して下さいようにお願いした理由はいままでそれほど数学と関係がなかったいわれる近藤さんの数学観が興味津々で深いものに思われたからです。数学者、物理学者や経済学者ならばこのような疑問を持つことは不思議ではないかもしれませんが、そうではない一般の方の数学観としては秀逸ではないかと思ったからです。

深く考えておられる方がいることに編集人が深く感銘を受けたのはいうまでもありません。近藤さんの今後のご研鑽とご活躍をお祈りします。(矢野 忠)

1.3 参考文献

[1] 武藤 徹、『武藤 徹の高校数学読本』1-6 (日本評論社)

- 1 数と計算のはなし(代数篇)(2011)
- 2 図形のはなし(幾何篇)(2011)
- 3 多次元の世界をのぞく(ベクトル・行列篇)(2012)
- 4 運動と変化のはなし(関数篇)(2012)
- 5 ミクロとマクロをつむぐ(微分積分篇)(2012)
- 6 大量現象のはなし(確率・統計篇)(2012)

正弦法則と余弦法則

Laws of Sines and Cosines

矢野 忠³

Tadashi YANO⁴

2.1 はじめに

このエッセイで述べるのは正弦法則と余弦法則の相互関連である。すなわち、正弦法則から余弦法則をどのように導くか。また逆に余弦法則から正弦法則をどのように導くかを述べる。正弦法則と余弦法則のそれぞれのいろいろな導出についてはまた別の機会に述べたい⁵。

久しぶりにソーヤーの『数学へのプレリュード』[3]を拾い読みしていたら、正弦法則と余弦法則の関連について述べたページが見つかった。それは一見したところ三角法とは関係しているようには見えない代数の問題であった。

(問題) $a = zb + yc, b = xc + za, c = ya + xb$ ならば,

$$\frac{a^2}{1-x^2} = \frac{b^2}{1-y^2} = \frac{c^2}{1-z^2}$$

であることを証明せよ。

という問題をソーヤーはある代数のテキストの中に見つけたという。

この問題の解を与えるのではなく、どのようにしてつくられたかを考えてみよう、という風にソーヤーは話を進める。ここで、ちょっと唐突だが、私たちは三角形の辺と角についての正弦法則を思い出しておく

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R, \quad R: \text{三角形 ABC の外接円の半径} \quad (2.1.1)$$

であった (図 2.1 を参照)。 (2.1.1) の各辺を 2 乗すれば、

$$\frac{a^2}{\sin^2 A} = \frac{b^2}{\sin^2 B} = \frac{c^2}{\sin^2 C} = 4R^2 \quad (2.1.2)$$

となる。いま

$$\sin^2 A = 1 - \cos^2 A, \quad \sin^2 B = 1 - \cos^2 B, \quad \sin^2 C = 1 - \cos^2 C$$

を (2.1.2) へ代入すれば

$$\frac{a^2}{1 - \cos^2 A} = \frac{b^2}{1 - \cos^2 B} = \frac{c^2}{1 - \cos^2 C} \quad (2.1.3)$$

³元愛媛大学工学部

⁴yanotad@earth.ocn.ne.jp

⁵余弦法則のいろいろな導出はすでに [1][2] で述べた。

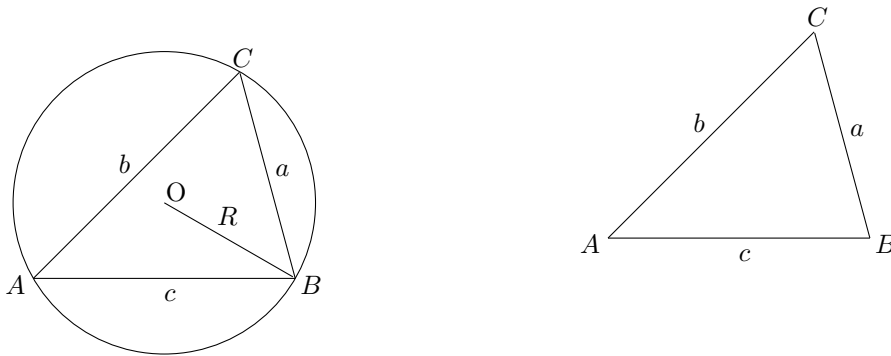


図 2.1: 正弦法則と外接円: R は外接円の半径. 図 2.2: 三角形と余弦法則: 余弦法則は (2.1.4)-(2.1.6) または (2.2.1)-(2.2.3).

となる. ここまでくれば三角形の辺と角について成り立つ第一余弦法則を思い出すであろう (図 2.2 を参照).

$$a = b \cos C + c \cos B \quad (2.1.4)$$

$$b = c \cos A + a \cos C \quad (2.1.5)$$

$$c = a \cos B + b \cos A \quad (2.1.6)$$

いま (2.1.4)-(2.1.6) で

$$\cos A = x, \quad \cos B = y, \quad \cos C = z$$

とおけば,

$$a = bz + cy \quad (2.1.7)$$

$$b = cx + az \quad (2.1.8)$$

$$c = ay + bx \quad (2.1.9)$$

となる. (2.1.7)-(2.1.9) を (問題) の条件式と比べれば, 一致することがわかる. また (2.1.3) は

$$\frac{a^2}{1-x^2} = \frac{b^2}{1-y^2} = \frac{c^2}{1-z^2}$$

となり, (問題) の証明したい式が得られる. 要するに (問題) は三角形の正弦法則と余弦法則に関係しているという.

この節の冒頭でも述べたように, このエッセイの目的は三角形の正弦法則から余弦法則を導くこと, その逆の余弦法則から正弦法則を導くことである.

2.2 正弦法則と余弦法則

まず正弦法則と余弦法則とを思い起こしておこう. まず正弦法則 (2.1.1) がある. また第一余弦法則 (2.1.4)-(2.1.6) があった. さらに第二余弦法則

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A \quad (2.2.1)$$

$$b^2 = c^2 + a^2 - 2ca \cos B \quad (2.2.2)$$

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos C \quad (2.2.3)$$

がある (図 2.2 を参照).

ソーヤーは述べている. 「ところでわれわれは, 三角形の三つの辺が与えられているとき, 三つの角を求めることができること, また上にあげたさまざまな結果は互いに矛盾しないことを知っている」

すなわち, (2.1.1) から (2.1.4)-(2.1.6) または (2.2.1)-(2.2.3) が代数的に得られること, また逆に (2.1.4)-(2.1.6) または (2.2.1)-(2.2.3) から (2.1.1) が得られる.

2.3 第一余弦法則と第二余弦法則の同値性

正弦法則と余弦法則の相互関連へと進む前にまず第一余弦法則から第二余弦法則を導こう. (2.1.4)-(2.1.6) を $\cos A, \cos B, \cos C$ について解けば

$$\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} \quad (2.3.1)$$

$$\cos B = \frac{c^2 + a^2 - b^2}{2ca} \quad (2.3.2)$$

$$\cos C = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab} \quad (2.3.3)$$

が導かれる. この (2.3.1)-(2.3.3) から (2.2.1)-(2.2.3) が得られることは直ちにわかる.

(2.1.4) に a をかけ, (2.1.5) に $-b$ をかけ, (2.1.6) に $-c$ をかけて, 辺々加えて (2.2.1) を導くことができるが, それは第二余弦法則を既知とした式変形のように思われる [4].

ちょっと注意をしておこう. たとえば第二余弦法則 (2.2.1) で $A = \pi/2 = 90^\circ$ のとき $\cos A = 0$ であるから

$$a^2 = b^2 + c^2 \quad (2.3.4)$$

となり, 第二余弦法則がピタゴラスの定理を特殊な場合として含んでいることがわかる.

つぎに, 第二余弦法則から第一余弦法則を導くことを考えよう. 式の形の特徴として, 第二余弦定理は a, b, c について 2 次式であり, 第一余弦法則は 1 次式である.

(2.2.1), (2.2.2) から a^2, b^2 を消去するために (2.2.1) と (2.2.2) を辺々加えれば,

$$a^2 + b^2 = a^2 + b^2 + 2c^2 - 2c(b \cos A + a \cos C)$$

であるから

$$2c[c - (b \cos A + a \cos C)] = 0$$

となり, $c \neq 0$ であるから

$$c = b \cos A + a \cos C \quad (2.1.6)$$

が得られる. 同様に (2.1.4), (2.1.5) も求められる.

以上で第一余弦定理と第二余弦定理とが同値であることが示された. このことは誰でも知っていることで特に目新しいことではない.

しかし, 次節以下で述べる正弦法則から余弦法則が導けること, またその逆に余弦法則から正弦法則が導けることは, 言われてみれば当然ではあろうが, あまり注目されてこなかった. 次節以降はそのことに集中しよう.

2.4 正弦法則から余弦法則へ

最初に正弦法則 (2.1.1) から第一余弦法則を導くことを考えよう. それには三角形の内角の和が π であること

$$A + B + C = \pi$$

であることと加比の理を用いる⁶.

まず

$$\begin{aligned}\sin A &= \sin(\pi - B - C) \\ &= \sin(B + C) \\ &= \sin B \cos C + \cos B \sin C\end{aligned}$$

が成り立つことに注目して、(2.1.1) に対して加比の理を用いれば

$$\begin{aligned}\frac{b \cos C}{\sin B \cos C} &= \frac{c \cos B}{\sin C \cos B} = \frac{b \cos C + c \cos B}{\sin B \cos C + \cos B \sin C} \\ &= \frac{b \cos C + c \cos B}{\sin(B + C)} \\ &= \frac{b \cos C + c \cos B}{\sin A} \\ &= \frac{a}{\sin A}\end{aligned}$$

であるから

$$a = b \cos C + c \cos B \quad (2.1.4)$$

が得られる。同様にして (2.1.5), (2.1.6) も得られる。

つぎに正弦法則 (2.1.1) から第二余弦法則を導くことを考えよう。正弦法則では三角形の辺の長さ a, b, c はその外接円の直径 $2R$ と三角形の角 A, B, C の正弦で表されているので、第二余弦法則の角をすべて辺で表した式

$$\cos C = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab} \quad (2.3.3)$$

を導くことを考えよう。(2.3.3) の右辺に正弦法則を用いれば、 $\cos C$ が得られることを示そう。まず

$$P = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab} \quad (2.4.1)$$

とおく。もちろんまだ P が $\cos C$ になるかどうかはわかっていない。

分子と分母にわけて計算しよう。正弦法則を用いれば、

$$\begin{aligned}\text{分子} &= a^2 + b^2 - c^2 \\ &= (2R)^2(\sin^2 A + \sin^2 B - \sin^2 C) \\ &= (2R)^2(\sin^2 A + \sin^2 B - \sin^2(A + B)) \\ &= -(2R)^2 f(A, B)\end{aligned}$$

ここで

$$f(A, B) \equiv \sin^2(A + B) - \sin^2 A - \sin^2 B$$

とおく⁷。さらに続けて $f(A, B)$ を簡単にしよう。 $\sin^2(A + B)$ に加法公式を使えば

$$\begin{aligned}f(A, B) &= \sin^2 A(\cos^2 B - 1) + \sin^2 B(\cos^2 A - 1) + 2 \sin A \sin B \cos A \cos B \\ &= -2 \sin^2 A \sin^2 B + 2 \sin A \sin B \cos A \cos B\end{aligned}$$

⁶ 「加比の理」についてはつぎのエッセイ [5] をみよ。

⁷ $A + B + C = \pi$ であるから $\sin C = \sin[\pi - (A + B)] = \sin(A + B)$ であることを用いる。

となる。さらに

$$\begin{aligned} -f(A, B) &= 2 \sin A \sin B (\sin A \sin B - \cos A \cos B) \\ &= -2 \sin A \sin B \cos(A + B) \\ &= 2 \sin A \sin B \cos C \end{aligned}$$

ここで,

$$\cos(A + B) = \cos(\pi - C) = -\cos C$$

を用いた。また

$$\text{分母} = 2ab = 2(2R)^2 \sin A \sin B$$

となる。したがって

$$\begin{aligned} P &= \frac{-(2R)^2 f(A, B)}{2(2R)^2 \sin A \sin B} \\ &= \frac{2(2R)^2 \sin A \sin B \cos C}{2(2R)^2 \sin A \sin B} \\ &= \cos C \end{aligned}$$

が得られる。これで (2.3.3) が導かれた。同様に (2.3.1), (2.3.2) も導かれる。したがって、正弦法則から第二余弦法則 (2.2.1)-(2.2.3) が導かれる。

正弦法則から第二余弦法則を発見的に導くことはできなかったが、とにかく正弦法則から二つの余弦法則を導くことはできた。しかし、この導き方にはなお不満がある。

第二余弦法則、たとえば、(2.2.1) の右辺に正弦法則をつかえば、左辺となることはもちろん示すことができるが、既知の公式を確かめるような導出法はできればさげたい [4]。

2.5 余弦法則から正弦法則へ

この節では余弦法則から正弦法則を導くことを考えよう。

まずは第一余弦法則から正弦法則を導く。すなわち

$$a = b \cos C + c \cos B \tag{2.1.4}$$

$$b = c \cos A + a \cos C \tag{2.1.5}$$

$$c = a \cos B + b \cos A \tag{2.1.6}$$

の中から (2.1.4), (2.1.5) をとってみよう⁸。まず

$$a = b \cos C + c \cos B \tag{2.1.4}$$

を用いることを考えよう。条件として用いる (2.1.5) の中には $\cos B$ が含まれていないから、 b と $\cos B$ とを (2.1.4) から消去しよう。そのために (2.1.5) と $\cos B = -\cos(A + C)$ を (2.1.4) に代入する。

$$\begin{aligned} a &= b \cos C + c \cos B \\ &= (c \cos A + a \cos C) \cos C - c(\cos A \cos C - \sin A \sin C) \\ &= a \cos^2 C + c \sin A \sin C \end{aligned}$$

⁸(2.1.4)-(2.1.6) の中から、いずれかの 2 つをとれば正弦法則を導くのに十分である。なぜなら、三角形の角 $A + B + C = \pi$ という条件があるからである。3 式からの 2 つのとり方には (2.1.4), (2.1.5) と (2.1.4), (2.1.6) および (2.1.5), (2.1.6) の 3 つがある。[4] は (2.1.4), (2.1.5) をとり、[6] は (2.1.4), (2.1.6) をとっている。

したがって

$$\begin{aligned} a(1 - \cos^2 C) &= c \sin A \sin C \\ a \sin^2 C &= c \sin A \sin C \\ a \sin C &= c \sin A \end{aligned}$$

が得られる。したがって

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{c}{\sin C} \quad (\text{A})$$

同様に、今度は (2.1.5) をとって、(2.1.5) の右辺から $\cos A$ と a とを $\cos A = -\cos(B+C)$ と (2.1.4) とを用いて消去すれば、

$$\frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} \quad (\text{B})$$

(A),(B) から (2.1.1) が得られる。

つぎに第二余弦法則から正弦法則を導くことを考えよう。(2.2.1)-(2.2.3) の中から (2.2.1),(2.2.2) をとってみよう⁹。

このとき正弦法則の2乗が成立することを示せば、あとはその正の平方根を求めればよい。すなわち、まず

$$\frac{a^2}{\sin^2 A} = \frac{b^2}{\sin^2 B} = \frac{c^2}{\sin^2 C} \quad (2.1.2)$$

が成立することを示す。そのためには

$$\sin^2 A, \sin^2 B, \sin^2 C$$

を求めなくてはならない。まず $\sin^2 A$ を求めよう。

$$\begin{aligned} \sin^2 A &= 1 - \cos^2 A \\ &= 1 - \left(\frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} \right)^2 \\ &= \frac{1}{(2bc)^2} [(2bc)^2 - (b^2 + c^2 - a^2)^2] \end{aligned}$$

であるから、

$$\begin{aligned} (2bc)^2 \sin^2 A &= [(2bc)^2 - (b^2 + c^2 - a^2)^2] \\ &= [a^2 - (b-c)^2][(b+c)^2 - a^2] \\ &= (a+b+c)(a+b-c)(a-b+c)(-a+b+c) \\ &\equiv (4S)^2, \quad S: \text{三角形 ABC の面積} \end{aligned}$$

となり、

$$\sin A = \frac{2S}{bc}, \quad (\text{C})$$

が得られる。同様にして

$$\sin B = \frac{2S}{ca}, \quad (\text{D})$$

も得られる。ここで後で使うから

$$g(a, b, c) \equiv (a+b+c)(a+b-c)(a-b+c)(-a+b+c) \quad (2.5.1)$$

⁹(2.2.1)-(2.2.3) の中からいずれか2つをとれば正弦法則を導くのに十分である。この場合も三角形の角 $A+B+C = \pi$ という条件があるからである。3式から2つの式のとり方には (2.2.1),(2.2.2) と (2.2.1),(2.2.3) と (2.2.2),(2.2.3) の3つがある。[4] は (2.2.1),(2.2.2) をとっている。[6] は (2.2.1) をとっているが、残りをどうとったかの言及はない

と定義しておこう¹⁰.

さらに $A + B + C = \pi$ であるから $\sin C = \sin(A + B) = \sin A \cos B + \cos A \sin B$ に

$$\begin{aligned}\sin A &= \frac{2S}{bc} \\ \sin B &= \frac{2S}{ca}\end{aligned}$$

と

$$\begin{aligned}\cos A &= \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} \\ \cos B &= \frac{c^2 + a^2 - b^2}{2ca}\end{aligned}$$

を代入すれば,

$$\sin C = \frac{2S}{ab}, \quad (\text{E})$$

が得られる.

(C),(D),(E) から

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{abc}{2S} \quad (\text{F})$$

$$\frac{b}{\sin B} = \frac{abc}{2S} \quad (\text{G})$$

$$\frac{c}{\sin C} = \frac{abc}{2S} \quad (\text{H})$$

(F),(G),(H) から (2.1.1) の正弦法則が成り立つことがわかる.

余弦法則から正弦法則を導くときには第一余弦法則にしても第二余弦法則にしても3つある関係式の2つだけを用いてもよいし, 3つ全部を用いても正弦法則を導くことができる (2.8節を参照せよ).

2.6 ヘロンの公式

正弦法則とは直接関係がないが, (2.5.2) で言及されたヘロンの公式に触れておこう.

三角形 ABC の面積 S は

$$S = \frac{1}{2}bc \sin A = \frac{1}{2}ca \sin B = \frac{1}{2}ab \sin C \quad (2.6.1)$$

で与えられた [7]¹¹.

ところで p.11 の脚注の (2.5.2) で, 三角形 ABC の面積 S は

$$S = \frac{1}{4}\sqrt{g(a,b,c)} \quad (2.5.2)$$

と与えられた. この公式は実は三角形の面積を三角形の辺の長さだけで与えるヘロンの公式であって通常は

$$S = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)} \quad (2.6.2)$$

のよう表されている. この式を (2.5.2) から導こう.

$$2s = a + b + c$$

¹⁰この定義をすると三角形 ABC の面積 S は

$$S = \frac{1}{4}\sqrt{g(a,b,c)} \quad (2.5.2)$$

と表される. この (2.5.2) からヘロンの公式が得られる.

¹¹(2.6.1) を用いれば, (C),(D),(E) は簡単に求められる.

と表せば

$$\begin{aligned} a + b - c &= 2(s - c) \\ a - b + c &= 2(s - b) \\ -a + b + c &= 2(s - a) \end{aligned}$$

となるから

$$g(a, b, c) = 2^4 s(s - a)(s - b)(s - c) \quad (2.6.3)$$

となる. したがって

$$\begin{aligned} S &= \frac{1}{4} \sqrt{g(a, b, c)} \\ &= \sqrt{s(s - a)(s - b)(s - c)} \end{aligned} \quad (2.6.2)$$

と表される [8]. $a + b + c = s$ ではなくて $a + b + c = 2s$ と表したために, これに起因する因子の 4 と $S = \frac{1}{4} \sqrt{g(a, b, c)}$ と根号の前にある因子の $\frac{1}{4}$ がうまく約分できた. これがヘロンの公式の妙味であろう.

それと a, b, c のうちの任意の 2 つの定数の入れ替えに対して $g(a, b, c)$ が対称になっている. そのことはヘロンの公式ではよくわかるように表されている.

正弦法則と三角形の面積のヘロンの公式の表示の類似性はいうまでもなく, それぞれの式に共通に現れる因子 $\sin A$, $\sin B$, $\sin C$ のためである.

2.7 外接円の半径

前節で三角形の面積を辺の長さだけで与えるヘロンの公式について述べたから, そのついでに三角形の外接円の半径 R についても触れておこう. 正弦法則は

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R \quad (2.1.1)$$

と外接円の半径 R で表されていた. ところで 2.5 節の (F),(G),(H) から, この $2R$ はまた三角形の面積 S と辺の長さ a, b, c で

$$2R = \frac{abc}{2S}$$

とも表されたから, 外接円の半径 R は

$$R = \frac{abc}{4S} \quad (2.7.1)$$

と表される. 次元は $[abc] = L^3$, $[S] = L^2$ であるから, $[R] = [\frac{abc}{S}] = L$ で長さの次元をもつ.

S は a, b, c のどの 2 つの入れ替えに対しても対称であったが, R のこの表式も a, b, c のどの二つの入れ替えに対してもやはり対称である.

2.8 正弦法則と余弦法則の同値性

インターネットのサイト [4] によれば, 正弦法則と余弦法則との同値性がつぎのようにまとめられている.

6 個の正の数 a, b, c, A, B, C が $A + B + C = \pi$ を満たしているとき, つぎの条件は同値である¹².

¹² a, b, c は三角形の辺の長さ, A, B, C は三角形の角である. 図 2.1 と 2.2 を参照せよ.

1.
$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$$

2.
$$a = b \cos C + c \cos B$$

$$b = c \cos A + a \cos C$$

3.
$$a = b \cos C + c \cos B$$

$$b = c \cos A + a \cos C$$

$$c = a \cos B + b \cos A$$

4.
$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A$$

$$b^2 = c^2 + a^2 - 2ca \cos B$$

5.
$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A$$

$$b^2 = c^2 + a^2 - 2ca \cos B$$

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos C$$

6. 3 辺が a, b, c でそれぞれに対応する角が A, B, C である三角形 ABC が存在する.

このサイト [4] では個々の条件から別の条件が導かれることを示している. その中のいくつかをこのエッセイでは別の方法で導いてみた. 元のサイトの説明の方がわかりやすいかもしれないので, 参照されたいと思う.

私自身はソーヤーの書から正弦法則と余弦法則が相互に導けるということを知った後でインターネットのサイトで具体的な相互の導出をされているサイトがあるのを知ったのだが, 普通の人はこのインターネットのサイトを先に知っているのかもしれない.

日本人の書いたサイトを無視して外国の文献や説明を有難がっているという風にとられるかもしれないが, 別にそういうつもりはまったくない. これは私が正弦法則と余弦法則が相互に関連している事実を知った個人的な経緯を述べているだけである.

2.9 おわりに

余弦法則の導出をレビューしたことがあるが [1][2], 正弦法則の導出をレビューしたことがない. だが, インターネットにはそういうサイトもある [6]. だが, それらは役に立つけれどもその説明はスケッチ風である.

英語のサイトではもっと詳しいエッセイ風のレビューもあるが [9], 日本語で総合的なレビューを機会があれば書いてみたい. また余弦法則についても前のエッセイの改訂をしたいと思っている. しかし, それには多くの図を描く必要があるので, 今回はあまり図を描かなくてもすむ正弦法則と余弦法則の相互関連にだけテーマをしばった.

それでも正弦法則と余弦法則の相互関連だけに閉じなくて, 三角形の面積を求めるヘロンの公式にも話がはみだした. 数学は相互に関連しているのだから当然でもあろう.

おわりになるが, ここで示した証明の多くはわかっていることを確かめるタイプであり, 発見法的な観点からはあまり望ましくはない. それで読者の方々がもし発見法的な導出を見つけた場合にはコメントとしてこのサーキュラーに投稿して下さることを切にお願いしたい.

2.10 付録 関連したサイトの短評

このエッセイを書くために [4][6] を大いに参考にさせてもらった。[4] は内容が豊富で、多くの人の知恵とか考察を結集しているところに特徴があるが、整理が十分にされていないという感じをもった。しかし、情報が豊富な点で特色のあるサイトである。もう一つのサイト [6] は簡潔でわかりやすいこと、それぞれの証明に対してサイトの作者の個人的感想や数学史を探索したあらましが書かれており、興味深い。文献にも注意が払われている。

(2014.12.17)

2.11 参考文献

- [1] 矢野 忠, 余弦定理の証明いろいろ, 研究と実践 (愛数協) 50 号 (1994.6) 13-18, 『数学散歩』(国土社, 2005) 57-62 に再録
- [2] 矢野 忠, 余弦定理の証明いろいろ再論, 研究と実践 (愛数協) 93 号 (2007.3) 14-16
- [3] W. F. ソーヤー, 『数学へのプレリュード』(みすず書房, 1978) 43-46
- [4] S. Honma, http://www004.upp.so_net.ne.jp/s_honma/trigonometry/sinecosine.htm/
- [5] 矢野 忠, 加比の理, 数学・物理通信 5 巻 1 号 (2014.3) 15-18
- [6] 佐藤 清, http://izumi-math.jp/K_Satou/seigen/seigen.htm/
- [7] 松坂和夫, 『数学読本 2』(岩波書店, 1989) 390-391
- [8] 松坂和夫, 『数学読本 2』(岩波書店, 1989) 391-393
- [9] http://en.wikipedia.org/wiki/Law_of_sines

加比の理

Componendo

矢野 忠¹³
Tadashi YANO¹⁴

3.1 はじめに

正弦法則から余弦法則を導くときに加比の理を用いて

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = \frac{b \cos C + c \cos B}{\sin B \cos C + \cos B \sin C} = \frac{b \cos C + c \cos B}{\sin A}$$

を導き、これから

$$a = b \cos C + c \cos B$$

という、第一余弦定理を導くとインターネットのサイトにあった。

加比の理を知ったのは高校時代であったと思うが、もう記憶の彼方である。それでどういう定理であったかなと思って私のもっている中学・高校程度の数学の本を調べたが、あまり出てこない。

探し疲れて、もう私のもっている本の中にはないなと思ったが、ひょっとしてと思って岩波全書の『代数入門』[1]を探したら、索引に「加比の理」の項目を見つけた。それで加比の理について述べてみたい。

3.2 加比の理

加比の理は一般化された定理もあるだろうが、まずもっとも簡単な加比の理から述べよう。

$\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ であるとき、この比は $\frac{a+c}{b+d}$ に等しい。すなわち

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} = \frac{a+c}{b+d} \tag{3.2.1}$$

が成り立つ。

どうもこのような計算をすると、分数を学びはじめた小学生がしそうな計算であるが、これが正しく成り立つ。

証明のしかたはいくつか考えられる。まず中学校か高校で代数を学んでいる人なら、定石と思われる証明は $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ を比のままでもとりあつかう、つぎのような証明であろう。

(証明 1)

¹³元愛媛大学工学部

¹⁴yanotad@earth.ocn.ne.jp

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} = k, \quad k = \text{一定} \quad (3.2.2)$$

とおく. このとき

$$a = bk \quad (3.2.3)$$

$$c = dk \quad (3.2.4)$$

となる. したがって

$$\frac{a+c}{b+d} = \frac{k(b+d)}{b+d} = k \quad (3.2.5)$$

となり, (3.2.1) が成り立つ.

上の (証明 1) は $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ を比のまま用いる方法であったが, $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ を積 $ad = bc$ として取り扱う方法として (証明 2), (証明 3) が考えられる¹⁵.

(証明 2)

$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} = \frac{a+c}{b+d}$ であることを示したい. このときに $ad = bc$ という積で条件をつかうことを考える. そのために

$$\begin{aligned} \frac{a}{b} &= \frac{a(b+d)}{b(b+d)} \\ &= \frac{ab+ad}{b(b+d)} \\ &= \frac{ab+bc}{b(b+d)} \\ &= \frac{a+c}{b+d} \end{aligned}$$

したがって (3.2.1) が成り立つ.

(証明 3)

証明 2 と同じように $ad = bc$ という積で条件をつかう.

$$\begin{aligned} \frac{c}{d} &= \frac{c(a+c)}{d(a+c)} \\ &= \frac{c(a+c)}{ad+cd} \\ &= \frac{c(a+c)}{bc+cd} \\ &= \frac{a+c}{b+d} \end{aligned}$$

したがって (3.2.1) が成り立つ.

(証明 2) と (証明 3) では $ad = bc$ をうまく使えるように $\frac{a}{b}$ または $\frac{c}{d}$ の分子, 分母に同じ因子をかける. $\frac{a}{b}$ に対しては因子 $b+d$ を分子, 分母に, $\frac{c}{d}$ に対しては因子 $a+c$ を分子, 分母にかければ, うまく $ad = bc$ の条件が使えた.

¹⁵ 『解析の基礎』前編 [2] によれば, 比例式 $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ をあつかうにあたっては

1. 一文字についてとりあつかうか
2. 比のままでもとりあつかうか
3. 積になおしてとりあつかうか

の分岐点があるという. (証明 1) は方針 2 での証明であり, 以下の (証明 2, 3) は方針 3 の証明である.

洞察力に富んだ人なら、この方法は別に難しくはないのだろうが、あまり洞察力に恵まれない私などにとっては難しい。それでも(証明1)なら、それほど頭を使わなくて証明ができる。

つぎの節で少し一般化した加比の理を述べよう。

3.3 一般化された加比の理

もっとも一般化された加比の理を考えてもいいのだが、中程度に一般化されたつぎのような加比の理を考えよう。

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} = \frac{e}{f} \text{ のとき,} \quad \frac{a}{b} = \frac{c}{d} = \frac{e}{f} = \frac{la + mc + ne}{lb + md + nf} \quad (3.3.1)$$

が成り立つ。このとき

$$lb + md + nf = 0 \quad \text{のとき} \quad la + mc + ne = 0 \quad (3.3.2)$$

である。

味もそっけもないかもしれないが、 $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} = \frac{e}{f}$ を比として、そのままの形で使う(証明1)はつぎのようである。

(証明1)

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} = \frac{e}{f} = k, \quad k = \text{一定} \quad (3.3.3)$$

とおけば,

$$\begin{aligned} a &= bk, \\ c &= dk, \\ e &= fk \end{aligned}$$

であるから

$$\frac{la + mc + ne}{lb + md + nf} = \frac{k(lb + md + nf)}{lb + md + nf} = k \quad (3.3.4)$$

が成り立つ。したがって(3.3.1)が成り立つ。

この証明の正しさに文句はないのだが、なぜ(3.3.1)が成り立つことがわかったのかという疑問がわく。この疑問に少しだけ答えることのできる(証明2)を次に与えておこう。

(証明2)

まず $l \neq 0$, $m \neq 0$, $n \neq 0$ として

$$\frac{a}{b} = \frac{la}{lb}, \quad \frac{c}{d} = \frac{mc}{md}, \quad \frac{e}{f} = \frac{ne}{nf}$$

を考えよう¹⁶。加比の理を

$$\frac{la}{lb} = \frac{mc}{md} = \frac{ne}{nf}$$

¹⁶ $l \neq 0$, $m \neq 0$, $n \neq 0$ という条件は後で取り除かれる。

に用いれば

$$\frac{\ell a}{\ell b} = \frac{mc}{md} = \frac{ne}{nf} = \frac{\ell a + mc + ne}{\ell b + md + nf}$$

が得られる.

ところで, $\ell \neq 0, m \neq 0, n \neq 0$ としたが, ℓ, m, n が 0 の場合が許されないかどうか考えてみよう.

1. $\ell = m = n = 0$ のとき, $\ell b + md + nf = 0$ となるので

$$\ell a + mc + ne = k(\ell b + md + nf) = k(\ell b + md + nf) = 0$$

となる.

2. $\ell = m = 0, n \neq 0$ のとき

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} = \frac{e}{f} = \frac{ne}{nf}$$

であるから, この場合には加比の理が成立する.

3. $\ell = 0, m \neq 0, n \neq 0$ のとき

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} = \frac{e}{f} = \frac{mc + ne}{md + nf}$$

であるから, この場合にも加比の理が成立する.

4. 他の場合

$\ell \neq 0, m = 0, n = 0$ のときと $\ell = 0, m \neq 0, n = 0$ のときは 2. のときと同様に加比の理が成立する.

また $\ell \neq 0, m = 0, n \neq 0$ のときと $\ell \neq 0, m \neq 0, n = 0$ のときは 3. のときと同様に加比の理が成立する.

したがって, ℓ, m, n は 0 を含めてどんな実数であってもよい.

3.4 おわりに

前節の中程度に一般化された加比の理が成り立つことがわかれば,

$$\frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} = \dots = \frac{a_n}{b_n} \tag{3.4.1}$$

の条件があるとき

$$\frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} = \dots = \frac{a_n}{b_n} = \frac{n_1 a_1 + n_2 a_2 + \dots + n_n a_n}{n_1 b_1 + n_2 b_2 + \dots + n_n b_n}, \text{ ただし } b_1 b_2 \dots b_n \neq 0 \tag{3.4.2}$$

というもっとも一般化された加比の理が成り立つことは容易に推測できるし, かつ簡単に証明することもできる. その証明はまったく 3 節の (証明 1) と同様にできるので, ここで述べることは省略する.

(2014. 12. 4)

3.5 参考文献

- [1] 矢野健太郎, 『代数入門』 (岩波書店, 1955) 77-78
- [2] 藤森良夫, 『解析の基礎』 前編 (考え方研究社, 1953) 190-193

ノート「 $(-1)^2 = +1$ と $i^2 = -1$ 」へのコメント

Comment on the note “ $(-1)^2 = +1$ and $i^2 = -1$ ”

森田 克貞¹⁷

Katusada MORITA¹⁸

先のノート「 $(-1)^2 = +1$ と $i^2 = -1$ 」で、「掛け算の規則」から出発して、整数を(ゼロを含む)自然数の順序対の同値類として定義する方法を導き、それを坪郷の方法(1967)と呼んだが、その方法自体は、整数を定義するための道具として旧くから知られていたらしいので、その呼称は撤回し、「整数を自然数のペアの同値類で表す方法」と呼ぶことにする。整数に対する分配則から「掛け算の規則」は簡単に証明できる。逆に、「掛け算の規則」から出発すれば、整数に対する分配則は、自然数に対するそれから代数的に証明できる、則ち、「分配則 \leftrightarrow 掛け算の規則」が成り立つ。これは、整数 \rightarrow 分数(有理数) \rightarrow 実数という数の拡張の各段階において正しい。従って、論理のループ、分配則 \rightarrow 「掛け算の規則」 \rightarrow 分配則が存在するのではないかという先のノートの結論は変わらない。

4.1 はじめに

先のノート[1]で、整数に対する「掛け算の規則」から、整数を自然数のペアの同値類として表す方法[2]が導けることを示した。しかし、その後、偶然のことから、文献[3, 4, 5]の存在を知って、その方法の呼び名「坪郷の方法」が適切でなかったことに気づき、また、整数の積は定義であり、その結果、整数に対する分配則が成り立つ[2, 3, 4]と考える方がシンプルで理解しやすいことを改めて知ったので、それらの文献を引用しながら、必要最小限の説明を再度行い、先のノートで訂正すべき点を明らかにしたい。

文献[3]では、自然数に対して成り立つ、和・積の交換則・結合則・分配則はそのまま整数の場合にも成り立つことを要請する(これはHankelの「形式不易の原理」で、文献[2]でも同様に採用されている)。この仮定は整数の積を決めるのに十分であると言う。まず、任意の整数を u としたとき、

$$u \cdot 0 = 0 \cdot u = 0 \tag{4.1.1}$$

は定義であると明言している。そして、「上式を証明したのでないことを強調しなければならない¹⁹。単に、この方法で積を定義するのが望ましいことを示したに過ぎない。なぜなら、さもなければ、分配則を保持できないから。」と述べている。同様に、分配則は正の整数と負の整数の積に対し、確定した規則に導くので、次の規

¹⁷名古屋大学大学院理学研究科物理学教室客員研究員

¹⁸kmorita@cello.ocn.ne.jp

¹⁹下の(4.1.2a)で $u=0$ と置いて分配則及び下の(4.1.2b)を使えば、(4.1.1)は導ける。しかし、[3]の著者は、整数に対しても分配則が成り立つように、(4.1.1)を定義としたというのだろう。

則を置く (順番は [3] の本文とは若干違う). 即ち,

$$u + 0 = 0 + u = u \quad (4.1.2a)$$

$$u + x = u \text{ は一意的な解 } x = 0 \text{ を持つ} \quad (4.1.2b)$$

$$u + (-u) = (-u) + u = 0 \quad (4.1.2c)$$

$$\text{方程式 } u + x = 0 \text{ 及び } y + u = 0 \text{ は一意的な解 } x = y = -u \text{ を持ち, } -(-u) = u \quad (4.1.2d)$$

と約束する. すると, 整数に対する分配則から, 次の結果が導かれる. 今, a, b, c, d を自然数として,

$$\left. \begin{array}{l} \text{掛け算の規則} \\ \left\{ \begin{array}{l} ac > 0 \rightarrow \text{正の整数同士の積は正の整数} \\ a(-d) = -ad < 0 \rightarrow \text{正の整数と負の整数の積は負の整数} \\ (-b)c = -bc < 0 \rightarrow \text{負の整数と正の整数の積は負の整数} \\ (-b)(-d) = bd > 0 \rightarrow \text{負の整数同士の積は正の整数} \end{array} \right. \end{array} \right\} \quad \begin{array}{l} (4.1.3a) \\ (4.1.3b) \\ (4.1.3c) \\ (4.1.3d) \end{array}$$

特に, $(-1)^2 = +1$. [3] の著者はこれらを定義と言い, 続けてこうも述べている. 「学校でこれらの定義に精通している読者は, 恐らく証明を試みたことがあるだろう (ここでは, (4.1.1), (4.1.3b, c, d) の証明をさしているのだろう). しかし, これらの関係は証明すべき命題ではなく, 厳密に言えば, 我々の便に適するよう任意に選ばれた定義である. その便とは, 自然数に対して成り立つ分配則をゼロ及び負数に対しても保持したいという我々の意図に基礎を置くものである. 更に, 例えば, $(-a)(-b) = -ab$ と定義することを妨げる何者もない. このように定義しても, 論理的矛盾は何もない, ただ, 分配則を捨てると, 算術が殆ど我慢できないほど複雑になるだろう.」

4.2 自然数から整数へ

この節は [1] の第2節と同じであるが, 引用文献を追加する. 上の (4.1.3a~d) を変形して, **負号を含まない** 形に書き直すことを考える. そのためには, 正の整数 a を $a = [a, 0]$, 負の整数 $-b$ を $-b = [0, b]$ と表すのがもっとも自然であろう ($0 = -0$ だから, $a = b = 0$ と置いて, $0 = [0, 0]$ を得ることに注意しておく). すると, (4.1.3a~d) を次のように書き直せる.

$$\left. \begin{array}{l} \text{掛け算の規則} \\ \left\{ \begin{array}{l} [a, 0][c, 0] = [ac, 0] \rightarrow \text{正の整数同士の積は正の整数} \\ [a, 0][0, d] = [0, ad] \rightarrow \text{正の整数と負の整数の積は負の整数} \\ [0, b][c, 0] = [0, bc] \rightarrow \text{負の整数と正の整数の積は負の整数} \\ [0, b][0, d] = [bd, 0] \rightarrow \text{負の整数同士の積は正の整数} \end{array} \right. \end{array} \right\} \quad \begin{array}{l} (4.2.4a) \\ (4.2.4b) \\ (4.2.4c) \\ (4.2.4d) \end{array}$$

このままでは, 4通りの「掛け算の規則」(4.1.3a~d) をそのまま4つの式に書き直しただけに過ぎないが, 以下で示すように, 上の4つの式は, 同値法則を用いれば, 1つの積法則にまとまる. 従って, 負号を隠す記法では, 「掛け算の規則」は積法則の定義と同義になる.

(4.2.4a~d) を1つの式に纏めることを考えよう.

(i) (4.2.4a) で, $a \rightarrow a - b, c \rightarrow c - d$ と置き変える. ただし, $a > b, c > d$ とする.

$$[a - b, 0][c - d, 0] = [(a - b)(c - d), 0] \quad (4.2.5a)$$

(ii) (4.2.4b) で, $a \rightarrow a - b, d \rightarrow d - c$ と置き変える. ただし, $a > b, d > c$ とする.

$$[a - b, 0][0, d - c] = [0, (a - b)(d - c)] \quad (4.2.5b)$$

(iii) (4.2.4c) で, $b \rightarrow b - a, c \rightarrow c - d$ と置き変える. ただし, $b > a, c > d$ とする.

$$[0, b - a][c - d, 0] = [0, (b - a)(c - d)] \quad (4.2.5c)$$

(iv) 最後に (4.2.4d) で, $b \rightarrow b - a, d \rightarrow d - c$ と置き変える. ただし, $b > a, d > c$ とする.

$$[0, b - a][0, d - c] = [(b - a)(d - c), 0] \quad (4.2.5d)$$

まず, (4.2.5a~d) の左辺が同一の式になる条件は

$$[a - b, 0] = [a - b + b, b] = [a, b], \quad a > b \quad (4.2.6a)$$

$$[c - d, 0] = [c - d + d, d] = [c, d], \quad c > d \quad (4.2.6b)$$

$$[0, d - c] = [c, d - c + c] = [c, d], \quad d > c \quad (4.2.6c)$$

$$[0, b - a] = [a, b - a + a] = [a, b], \quad b > a \quad (4.2.6d)$$

であることが分かる. 一般的に書けば, 同値法則を満たす, つぎの同値関係

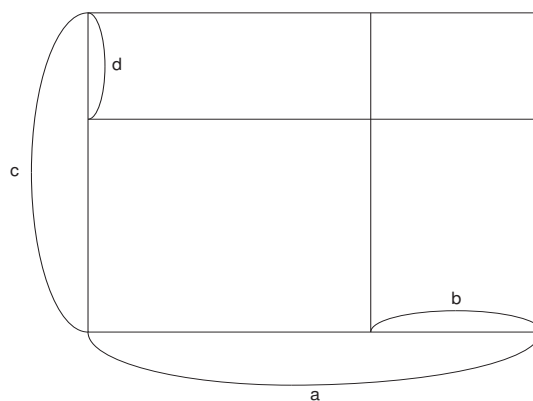
$$[a, b] = [a', b'] \iff a + b' = a' + b \quad (4.2.6e)$$

となる.²⁰ 自然数のペアを構成する成分に元々 0 が含まれていたから, (4.2.6a~d) において, 順に, $b = 0, d = 0, c = 0, a = 0$ の場合も含まれねばならない. それ故, (4.2.6e) は, ゼロを含む自然数に対して要求される. 特に, $a' = b' = 0$ と置けば, $[a, a] = [0, 0]$. 従って, (4.2.6a) および (4.2.6b) は, それぞれ, $a = b$ および $c = d$ の場合にも成り立つ. 同様に, (4.2.6c) および (4.2.6d) は, それぞれ, $d = c$ および $b = a$ の場合にも成り立つ. 今後, 自然数というときには, 0 も含むと理解されたい. このような条件が満たされるとき, (4.2.5a~d) の左辺はすべて $[a, b][c, d]$ に等しいことが分かる. ただし, 自然数 a と b , c と d の各々の大小関係まで含めれば, $2 \times 2 = 4$ 通りあることに変わりはない. 次に, 同じ条件 (4.2.6e) によって, (4.2.5a~d) の右辺もすべて同一の式になるかどうか調べる.

そこで, 次のような幾何学的考察から始めよう. 右図の示すように, 左下の長方形の面積は大きな長方形の面積から, 横や縦に長い長方形の面積を引いて, 引きすぎた, 右上の小さな長方形の面積を加えて得られるので, $a > b > 0, c > d > 0$ の時,

$$(a - b)(c - d) = ac + bd - (ad + bc) \quad (4.2.7)$$

が成り立つ. 従って, (4.2.5a) の右辺は



$$[(a - b)(c - d), 0] = [ac + bd - (ad + bc), 0] = [ac + bd, ad + bc] \quad (4.2.8a)$$

となる. ただし, ここで, (4.2.6a) を使った. 同様に, $a > b > 0, d > c > 0$ の時, ($c \leftrightarrow d$ と入れ替えた)(4.2.7) および (4.2.6c) を使って, (4.2.5b) の右辺は

$$[0, (a - b)(d - c)] = [0, ad + bc - (ac + bd)] = [ac + bd, ad + bc] \quad (4.2.8b)$$

²⁰ この同値関係で整数を定義すること, およびその和 (4.2.10a) については, [3] の中で, 定義 I, II' として述べられているが, 積についての言及がない.

さらに, $b > a > 0, c > d > 0$ の時, (4.2.5c) の右辺は ($a \leftrightarrow b$ と入れ替えた)(4.2.7) および (4.2.6c) から,

$$[0, (b-a)(c-d)] = [0, bc + ad - (bd + ac)] = [ac + bd, ad + bc] \quad (4.2.8c)$$

となる. 最後に, $b > a > 0, d > c > 0$ の時, (4.2.5d) の右辺は ($a \leftrightarrow b, c \leftrightarrow d$ と入れ替えた) (4.2.7) および (4.2.6a) から,

$$[(b-a)(d-c), 0] = [bd + ac - (bc + ad), 0] = [ac + bd, ad + bc] \quad (4.2.8d)$$

を得る. このようにして, (4.2.5a~d) の右辺はすべて, 同一の式 $[ac + bd, ad + bc]$ になった. 同一の式といっても, この結果は, (4.2.8a~d) の左辺から分かるように, 元々 a と b , c と d , 各々の大小関係に依存していることに注意されたい. とにかく, (4.2.5a~d) は確かに, 次の 1 つの式にまとめられたことになる.

$$[a, b][c, d] = [ac + bd, ad + bc] \quad (4.2.9)$$

もっとも, すでに説明したように, 左辺は a と b , c と d の各々の大小関係をすべて数え合わせると 4 通りあり, それに応じて, 右辺も, (4.2.8a~d) の 4 通りある. 1 つの式といっても, 「掛け算の規則」(4.2.4a~d) が 4 通りあったことを, このような形で引きずっている. この大小関係にかかわらず, 上式が成り立つ事を, (4.2.4a~d) は 1 つの式にまとめられたといったわけである. なお, (4.2.6e) は下で述べたように, (4.2.9) は $a = b$ または/ および $c = d$ の場合にも成り立つ. $[a, a] = [0, 0]$ だから, この場合, (4.2.9) は $[0, 0][c, d] = [a, b][0, 0] = [0, 0]$ を意味する. 以上, (4.2.6e) を満足する, 自然数の順序対 $[a, b]$ の積は「掛け算の規則」(4.2.4a~d) だけで一意的に決まったので, それは積法則と呼ぶに相応しい. 一方, 和は成分ごとの和でなくてはならない. これらの和・積の法則をまとめると, (4.2.9) を再録して,

$$[a, b] + [c, d] = [a + c, b + d] \quad (4.2.10a)$$

$$[a, b][c, d] = [ac + bd, ad + bc] \quad (4.2.10b)$$

になる. もちろん, (4.2.6e) の関係にある, ダッシュ付きの自然数, a', b', c', d' も同じ関係式を満たす ((4.2.10a, b) が (4.2.6e) に従うダッシュをつけた量に対しても成り立つ事は容易に示せる. 例えば, [4] の定理 6.3.1 参照).

次に, (4.2.6e) を満足する, 自然数の順序対 $[a, b]$ の集合 (を $R(\mathbb{N})$ と書く) は整数環 \mathbb{Z} に同型である事を示す. 実際, $a \geq b$ の時には, 同値関係により, $[a, b] = [a - b, 0]$ となり, 逆に, $a \leq b$ の時には, 同値関係により, $[a, b] = [0, b - a]$ となる. 従って, $R(\mathbb{N})$ の任意の元は, a, b を自然数として, $[a, 0]$ か $[0, b]$ の形に書ける. $[a, b] + [0, 0] = [0, 0] + [a, b] = [a, b]$ から $R(\mathbb{N})$ のゼロ元は, $[0, 0]$ となり, 後ほど, $[a, 0], a > 0$ は正の整数 a を, $[0, b], b > 0$ は負の整数 $-b$ を表している (これが最初の出発点であった) ことを証明するので, $R(\mathbb{N}) = (-\mathbb{N}^*) + \{0\} + \mathbb{N}^*$ と書ける. ただし, $\mathbb{N}^* = \{1, 2, 3, \dots\}$. すなわち, $R(\mathbb{N}) = \mathbb{Z}$ が示せた (環の性質はこれから調べる).

乗法に関する単位元は $[a, b][1, 0] = [1, 0][a, b] = [a, b]$ から $[1, 0]$ となることが分かるが, $[a, b]$ の和に関する逆元 $-[a, b]$ は

$$[a, b] + (-[a, b]) = [0, 0] \quad (4.2.11)$$

によって定義される. しかし, $[a, a] = [0, 0]$ から $[a, b] + [b, a] = [a + b, b + a] = [0, 0] = [a, b] + (-[a, b])$ により, $-[a, b] = [b, a]$ となる. 従って, $[a, b]$ で a と b を交換したら, 負号が付くという約束が生まれる. 特に, 乗法に関する単位元 $[1, 0]$ の和に関する逆元は $[0, 1]$ である. 一般に, $[0, a] = -[a, 0]$ である. 従って, $a \equiv [a, 0]$ と定義すれば, $-a \equiv [0, a]$ となり, $a - b = [a, 0] - [b, 0] = [a, 0] + [0, b] = [a, b]$ と書ける. それ故,

$$\begin{cases} [a, b] = a - b & (\text{は } a > b \text{ の時 正の整数}) \\ [a, a] = [0, 0] = 0 \\ [a, b] = -[b, a] = -(b - a) & (\text{は } a < b \text{ の時 負の整数}) \end{cases} \quad (4.2.12)$$

とおくことになる。

さて、(4.2.10a,b) が、和・積に関して、交換則・結合則を満たすことは、自然数のそれから明らかだが、念の為、分配則の簡単な証明だけを以下に記す。

$$\begin{aligned}
 ([a, b] + [c, d])[e, f] &= [a + c, b + d][e, f] = [(a + c)e + (b + d)f, (b + d)e + (a + c)f] \\
 &= [(ae + bf) + (ce + df), (be + af) + (de + cf)] \\
 &= [ae + bf, af + be] + [ce + df, cf + de] = [a, b][e, f] + [c, d][e, f] \quad (4.2.13)
 \end{aligned}$$

ただし、 $a, b, c, d, e, f \in \mathbb{N}$, $[a, b], [c, d], [e, f] \in \mathbb{Z}$. 今一度論理をまとめておくと、(4.2.4a~d) から出発するアプローチでは、 $(-1)^2 = +1$ は定義であり、その場合、整数に対する分配則は自然数に対するそれから、単なる代数計算で導ける。和・積についての他の法則も同様。つまり、最初は「マイナス × マイナス = プラスは定義だから慣れて覚える以外ない」といって、あとで、「その定義は分配則から導ける」という順番で教える教育的配慮は的を得ていると言える。両方とも正しいステートメントで「導く」方が《数学を学んできた》という満足感を与えるから。もっとも、「分配則から導ける」と言う時には、「積の定義を分配則が成り立つように定義しているのだから当然」と注意する必要がある。

以上、「掛け算の規則」(4.1.3a~d)→(4.2.4a~d) から得られた新しい結果をまとめれば、

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{整数は同値関係 (4.2.6e) を満たす自然数の順序対 } [a, b] \text{ で与えられる} \\ \text{同値関係 (4.2.6e) を満たす自然数の順序対の和・積は (4.2.10a, b) で与えられる} \end{array} \right.$$

となる。これは、「整数を自然数のペアの同値類で表す方法」[2, 4] であり、同じ定義が、文献 [5, 6] にも見られる。しかし、これらの文献では、この方法を整数に対する演算規則が再現できるよう手で置いている。特に、同値関係 (4.2.6e) は、 $[a, b]$ が整数になるように要求している。初めに述べたように、この節では、[1] の第 2 節と同じことを繰り返した：「掛け算の規則」は、 $[a, b]$ が整数になることを示している。文献 [1] と [3] の本質的な違いは、後者では、この方法を整数に対する定義と見なし、「掛け算の規則」及び整数に対する分配則をそれからの結果として導いていることである。つまり、「整数を自然数のペアの同値類で表す方法」を A と呼び、「掛け算の規則」を B と呼べば、文献 [1] では、 $B \rightarrow A$ を、文献 [3] では、 $A \rightarrow B$ を証明したことになる。従って、A と B は同値であることが分かった。A からは、整数に対する分配則 (これを A' と呼ぼう) が自然数に対するそれから導けるので、 $A' \leftarrow B$ が示せた。

なお、[1] の第 3, 4, 5 節は変える必要はない。そこでは、分数 (有理数) や実数についても、ペアの方法を紹介したので、整数 → 分数 (有理数) → 実数の数体系の各段階でも、《分配則 ↔ 掛け算の規則》は成り立つといえる。第 6 節は、実数に対する《分配則 → 掛け算の規則》に関する個所とその残りはすべて省略し、次節のように変える。

4.3 終わりにかえて

以上、 $(-1)^2 = +1$ という何でもない式は、虚数単位 i の定義式 $i^2 = -1$ を実数の計算のみで導く Hamilton の記法 (例えば、[1] の第 5 節でも解説した) と類似した (4.2.9)=(4.2.10b) から導かれ、その意味では、両方も定義に過ぎないのではないかと、言う簡単なことを、[1] へのコメントとして再度述べてきた。

複素平面で、実軸上にある点 $(1, 0)$ を 90° 左に (正方向に) 回転すれば、点 $(0, 1)$ に行き、更に 90° 左に回転すれば、点 $(-1, 0)$ に到達する。これを、 $(1, 0) \rightarrow (0, 1)(1, 0) = (0, 1) \rightarrow (0, 1)(0, 1) = (-1, 0)$ と記そう (左回転の操作は $(0, 1)$ を回転前の点に左から掛けるという代数的操作に置き換えている)。右に (負方向に) 回転することは $(0, -1)$ を回転前の点に右から掛けることにすると $(1, 0) \rightarrow (1, 0)(0, -1) = (0, -1) \rightarrow (0, -1)(0, -1) = (-1, 0)$ となって、やはり同じ点 $(-1, 0)$ に到達する (複素数は可換であるから、代数的操作では、左・右の区別はないが、回転とい

う幾何学的操作は異なるので、対応した、途中の代数式は当然異なってくる). ここで、複素数に対する Hamilton の記法では、点 (x, y) には複素数 $x + iy$ が対応し、点と点の掛け算は、 $(x, y)(x', y') = (xx' - yy', xy' + yx')$ となることを使った. $\pm 1 \equiv (\pm 1, 0), \pm i \equiv (0, \pm 1)$ なので、 $(\pm i)^2 = -1$ となる. これは、 $i^2 = -1$ もその複素共役 $(-i)^2 = -1$ も定義であることを視覚的に見ているに過ぎない. ところが、実数と虚数単位は可換で、積に対する結合則と交換則を使うと、 $(-i)^2 = [(-1)i][(-1)i] = (-1)^2 i^2 = -(-1)^2$ となるが、これは -1 に等しいので、 $(-1)^2 = +1$ となる²¹.

整数を取り扱うこの本でも、(負数を含む)「掛け算の規則」は環の性質(特に、加法に関する逆元の存在と分配則)から導く. しかし、その規則を、定義とみなす本 [3] もあれば、「整数を自然数のペアの同値類で表す方法」から導く本 [4] もある. ペアを使う方法では、整数に対する分配則を、自然数に対するそれから、代数的に導けるという利点がある(自然数に対しては、数学的帰納法で証明されている). 定義とみなす場合も、整数に対する分配則は、自然数に対するそれと同じ形式になることを要請している(「形式不易の原理」). もちろん、分配則に限らず、和・積の交換則や結合則などの演算規則も含む. この考えはシンプルで非常に理解しやすい. しかも、自然数から出発する方法は、整数 \rightarrow 分数(有理数) \rightarrow 実数への一般化が容易である [2, 1]. 整数に対する分配則は、「掛け算の規則」を前提にして、始めて証明されるのではないか. もしそうなら、《掛け算の規則 \rightarrow 分配則》が成り立つ. これが、文献 [1] の考えである. 整数に対する分配則から、「掛け算の規則」を導くのは簡単である. それ故、《掛け算の規則 \leftrightarrow 分配則》. 前節の終わりで触れたように、この関係は、実数に対しても成り立つ.

もちろん、どんな場合でも、ペアを考え続ける必要はない. 計算が複雑になるだけだから. ただ、自然数 \rightarrow 整数 \rightarrow 分数(有理数) \rightarrow 実数という数の拡張の、負数を含むこの段階においても、《掛け算の規則 \leftrightarrow 分配則》が成り立つことを示している. これは、実数 \rightarrow 複素数 \rightarrow 超複素数と言う更なる数の拡張においても、掛け算の規則は意味無くなるが、ペアの考えは応用出来る. 特に、積の交換則や結合則を破る数体系に拡張する場合には、ペアの考えは重宝されている.

²¹実平面でも同様なイメージが参考になる. しかし、今度は 180° 回転だ. 回転は左方向でも右方向でも同じ結果に到達する: $+1 \rightarrow (-1)(+1) = (+1)(-1) = -1 \rightarrow (-1)(-1) = +1$.

参考文献

- [1] 森田 克貞, 『数学・物理通信』, 4 卷 5 号, 11-21.
- [2] 坪郷勉, 『複素数と 4 元数』 (槇書店, 1967; 第 3 刷 1974). この本には Hankel の「形式不易の原理」に基づいた, 数の拡張について詳しい記述があるが, 「掛け算の規則」については「よく知られた符号の約束」と脚注に記されているだけである.
- [3] A. A. Fraenkel, *Integers and Theory of Numbers*, (Scripta Mathematica, 1955).
- [4] H. W. Campbell, *The Structure of Arithmetic*, (Appleton-Century-Crofts, 1970).
- [5] 遠山 啓, 『代数的構造』 (日本評論社, 1996).
- [6] 足立恒雄, 『数体系と歴史』 (朝倉書店, 2003).
『数とは何か, そしてまた何であったか』 (共立出版, 2011).

編集後記

ここ伊予・松山は立春を越えて日光が輝く一方では本格的な寒さが続いております。わが『数学・物理通信』誌の読者・投稿者の方々も元気でお過ごしのことと存じます。

編集者としての私はこのサーキュラーの各号が初期の目標を保持しているのか、そして一定数の投稿者が確保されているのかについて常に気を付けております。

今回の号では数学系の内容ばかりになりましたが、内容は物理学を学ぶ際には重要な役割を担っています。次号には数学的内容の一篇として、角度を測る手法である弧度法について詳しく述べる予定です。

日本列島まだまだ寒さが続きそうです。お身体を大切にお過ごし下さい。

(新関 章三)