

# 数学・物理通信

5卷2号      2015年3月

編集 新関章三・矢野 忠

2015年3月9日

# 目次

<b>四元数 (補遺 1)</b>	<b>3</b>
1.1 はじめに	3
1.2 行列の SU(2) 表示	3
1.3 (7.5.1) の導出	5
1.4 実数の組による四元数の表示	6
1.5 おわりに	8
1.6 付録 条件 $Q^\dagger Q = 1$ の場合	8
1.7 参考文献	9
<b>角度の単位の設定法</b>	<b>10</b>
2.1 はじめに	10
2.2 記号と準備	10
2.3 極限式とその値	12
2.4 弧度法による角度	13
2.5 おわりに	14
2.6 補遺 1 角度の単位の例	15
2.7 補遺 2 補題 2.2 の補足	15
2.8 補遺 3 定理 4.2 の補足	16
2.9 参考文献	16
<b>Legendre 関数と量子力学のポテンシャル問題 (3)</b>	<b>17</b>
3.1 はじめに	17
3.2 方程式の解法	18
3.2.1 固有値・固有関数	18
3.2.2 固有関数の規格化	19
3.3 おわりに	21
<b>五元数の非存在と八元数</b>	<b>23</b>
4.1 はじめに	23
4.2 三元数の非存在と四元数	24
4.3 Frobenius の定理と非結合的な五元数	27
4.4 準結合則と八元数	29
4.5 8 平方和の定理	33
4.6 終わりにかえて	33
4.7 補遺. $e_A (A = 1, 2, \dots, 7)$ の反可換性	34
<b>編集後記</b>	<b>36</b>

# Contents

1. Tadashi YANO: The Quaternions (Appendix 1)
2. Shozo NIIZEKI: How to implement the Units of Angles
3. Kenji SETO: Legendre Function and a Potential Problem of Quantum Mechanics (3)
4. Katsusada MORITA: Nonexistence of Quintuplet and Octonions
5. Tadashi YANO: Editorial Comments

# 四元数（補遺 1）

## — 四元数と SU(2) —

### The Quaternions (Appendix 1)

矢野 忠<sup>1</sup>  
Tadashi YANO<sup>2</sup>

#### 1.1 はじめに

過去数年間にわたって四元数のシリーズをこの『数学・物理通信』に連載してきた。そして、それをまとめたものを昨年 10 月に『四元数の発見』[1] として上梓した。

この本では高校数学を知っている人であれば、四元数について理解できることを目標とした。しかし、高校生にでもわかるように付録に書くべきだったかもしれないことの一部の説明を省略してしまった。

それらをこれから数回にわたって取り上げてみようと思う。蛇足であることを重々承知しているが、これは私自身へのノートでもある。

私が四元数について『数学・物理通信』に連載していたときにはなんでもなかったことでもいまそれを再現してみようとするとなつづいたりするありさまである。なんという頼りなさであろうと自分のことながら、愕然とする。

そういうわけで書き残した点について数回にわたって書いてみたい。初回は主として第 7 章「四元数と SU(2)」への補遺であるが、もっともそこに話は留まらないかもしれない。

#### 1.2 行列の SU(2) 表示

この節では SU(2) にしたがう 2 行 2 列の行列  $Q$  が

$$Q = \begin{pmatrix} a & b \\ -\bar{b} & \bar{a} \end{pmatrix} \quad (1.2.1)$$

と表されることを示したい [2]<sup>3</sup>。ここで、たとえば  $\bar{b}$  は  $b$  の共役複素数である。他も同様である。もちろん、 $a, b, c, d$  は複素数である。

<sup>1</sup>元愛媛大学工学部

<sup>2</sup>yanotad@earth.ocn.ne.jp

<sup>3</sup>2 次の特異ユニタリー群 SU(2) とは要素が複素数の 2 行 2 列のユニタリー行列で、かつその行列式が 1 である行列が積の演算において群をなすことを表す。SU(2) は特殊 special の S とユニタリー unitary の U に由来する。Special とは行列式=1 の行列を指す

まず2行2列の一般の行列  $Q$  を

$$Q = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \quad (1.2.2)$$

と表そう. この行列がユニタリーであり, かつその行列  $Q$  の行列式  $\det Q = 1$  である場合を考える<sup>4</sup>. これがこの2行2列の行列が従うすべての条件である.

ユニタリー行列とはどんな行列であったか. それはある行列  $Q$  とそのエルミート共役行列  $Q^\dagger$  との積をとれば, その積が1となる行列である<sup>5</sup>. すなわち

$$QQ^\dagger = Q^\dagger Q = 1 \quad (1.2.3)$$

が成り立つ行列である.

さて, 上で用いたエルミート共役行列とはどんな行列であるか. これは行列の各要素の複素共役をとり, その行列の要素の行と列を転置した行列である. 言葉で言い表すと難しそうだが, 式で書くと簡単である. これは一般の  $n$  行  $n$  列の行列について成り立つが, ここでは2行2列の行列に限定すれば

$$Q^\dagger = \begin{pmatrix} \bar{a} & \bar{c} \\ \bar{b} & \bar{d} \end{pmatrix} \quad (1.2.4)$$

である.

$QQ^\dagger$  の積を計算すると  $Q$  がユニタリーであるので,

$$\begin{aligned} QQ^\dagger &= \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \bar{a} & \bar{c} \\ \bar{b} & \bar{d} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} a\bar{a} + b\bar{b} & a\bar{c} + b\bar{d} \\ c\bar{a} + d\bar{b} & c\bar{c} + d\bar{d} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

となるべきであるから, これから4つの条件

$$a\bar{a} + b\bar{b} = 1 \quad (1.2.5)$$

$$c\bar{c} + d\bar{d} = 1 \quad (1.2.6)$$

$$a\bar{c} + b\bar{d} = 0 \quad (1.2.7)$$

$$c\bar{a} + d\bar{b} = 0 \quad (1.2.8)$$

が得られる<sup>6</sup>. これに行列  $Q$  が  $\det Q = 1$  であるという条件

$$ad - bc = 1 \quad (1.2.9)$$

が加わる. ただし, すぐわかることは (1.2.8) は (1.2.7) の複素共役であるから (1.2.7) と (1.2.8) とは独立ではない. だから条件は4つしかない. ここでは (1.2.8) を除いて考えよう.

この4つの条件から (1.2.1) が導かれることを示す.

まず (1.2.7) を  $b$  について解けば

$$b = -\frac{1}{d}a\bar{c} \quad (1.2.10)$$

<sup>4</sup>ユニタリー行列については以下に説明をする.

<sup>5</sup>もっと正確に言えば2行2列の単位行列  $E$  となる. このことを単に1と表すことが多い.

<sup>6</sup>条件  $Q^\dagger Q = 1$  を用いた場合を付録に示す.

となる。これを (1.2.9) に代入すれば

$$\frac{a}{d}(d\bar{d} + c\bar{c}) = 1$$

(1.2.6) から  $c\bar{c} + d\bar{d} = 1$  であるから

$$\frac{a}{d} = 1 \tag{1.2.11}$$

が得られる。したがって、(1.2.11) を (1.2.10) へ代入すれば

$$b = -\bar{c} \tag{1.2.12}$$

が得られる。(1.2.11), (1.2.12) を  $c, d$  について解けば

$$c = -\bar{b} \tag{1.2.13}$$

$$d = \bar{a} \tag{1.2.14}$$

となる。

したがって、SU(2) にしたがう 2 行 2 列の行列  $Q$  は

$$Q = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ -\bar{b} & \bar{a} \end{pmatrix}$$

と表される。これで (1.2.1) が導出された。

### 1.3 (7.5.1) の導出

この節では『四元数の発見』の第 7 章の (7.5.1) の導出をしよう [3].

(7.5.1), すなわち、SU(2) にしたがう 2 行 2 列の行列  $Q$  は

$$\begin{aligned} Q &= \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} x^0 + ix^3 & ix^1 + x^2 \\ ix^1 - x^2 & x^0 - ix^3 \end{pmatrix} \\ &= x^0 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + i \begin{pmatrix} x^3 & x^1 - ix^2 \\ x^1 + ix^2 & -x^3 \end{pmatrix} \end{aligned} \tag{1.3.1}$$

であった。

第 7 章 「空間回転と SU(2)」 [4] では

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} &= \frac{1}{2}[1 - i(i\sigma_3)] & \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} &= \frac{1}{2}[1 + i(i\sigma_3)] \\ \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} &= \frac{1}{2}(\sigma_1 + i\sigma_2) & \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} &= \frac{1}{2}(\sigma_1 - i\sigma_2) \end{aligned}$$

を示してある。これを用いると

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} a & b \\ b & d \end{pmatrix} &= a \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + c \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + d \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= a \frac{1}{2}[1 - i(i\sigma_3)] + b \frac{1}{2}(\sigma_1 + i\sigma_2) + c \frac{1}{2}(\sigma_1 - i\sigma_2) + d \frac{1}{2}[1 + i(i\sigma_3)] \\ &= \frac{1}{2}(a + d)1 + \frac{1}{2}(b + c)\sigma_1 + \frac{i}{2}(b - c)\sigma_2 + \frac{1}{2}(a - d)\sigma_3 \\ &= x^0 1 + x^1(i\sigma_1) + x^2(i\sigma_2) + x^3(i\sigma_3) \end{aligned} \tag{1.3.2}$$

と表せる. ここで  $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$  の行列を思い出せば

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix},$$

であったから, これを用いると (1.3.2) は (1.3.1) が成り立つことを示している.

つぎに  $x^0, x^1, x^2, x^3$  を行列の要素で表し, また, それらがすべて実数であることを示そう.

(1.3.2) から

$$\begin{aligned} x^0 &= \frac{1}{2}(a+d) \\ ix^1 &= \frac{1}{2}(b+c) \\ ix^2 &= \frac{i}{2}(b-c) \\ ix^3 &= \frac{1}{2}(a-d) \end{aligned}$$

が得られるが,

$$\begin{aligned} c &= -\bar{b} \\ d &= \bar{a} \end{aligned}$$

であるから, これを使って  $x^0, x^1, x^2, x^3$  を表せば

$$x^0 = \frac{1}{2}(a + \bar{a}) \tag{1.3.3}$$

$$x^1 = -\frac{i}{2}(b - \bar{b}) \tag{1.3.4}$$

$$x^2 = \frac{1}{2}(b + \bar{b}) \tag{1.3.5}$$

$$x^3 = -\frac{i}{2}(a - \bar{a}) \tag{1.3.6}$$

となる. これらの式の右辺を見れば, 複素数とその共役複素数の和または差であり, 複素数とその共役複素数の差の場合にはそれに虚数単位  $i$  がかかっているので, すべて実数であることがわかる. これはもともと  $x^i, (i = 0, 1, 2, 3)$  が暗々裏に実数と仮定されていたことと一致している.

## 1.4 実数の組による四元数の表示

複素数  $a + bi$  を 2 つの実数の組  $(a, b)$  で表すように, 四元数  $w + xi + yj + zk$  を 4 つの実数の組  $(w, x, y, z)$  で表すこともできる [5]. そうすると

$$(w, x, y, z) = w(1, 0, 0, 0) + x(0, 1, 0, 0) + y(0, 0, 1, 0) + z(0, 0, 0, 1) \tag{1.4.1}$$

と表すことができるから, これを

$$w + xi + yj + zk \tag{1.4.2}$$

と対比すれば, つぎの対応がつけられる.

$$1 = (1, 0, 0, 0) \tag{1.4.3}$$

$$i = (0, 1, 0, 0) \tag{1.4.4}$$

$$j = (0, 0, 1, 0) \tag{1.4.5}$$

$$k = (0, 0, 0, 1) \tag{1.4.6}$$

この表示を用いれば  $1^2 = 1, i^2 = j^2 = k^2 = -1$  に対応した, つぎの関係も成り立つことを示すことができる.

$$(1, 0, 0, 0)^2 = (1, 0, 0, 0) \quad (1.4.7)$$

$$(0, 1, 0, 0)^2 = -(1, 0, 0, 0) \quad (1.4.8)$$

$$(0, 0, 1, 0)^2 = -(1, 0, 0, 0) \quad (1.4.9)$$

$$(0, 0, 0, 1)^2 = -(1, 0, 0, 0) \quad (1.4.10)$$

それには四元数の積の規則を思い出さなければならない.

任意の 2 つの四元数を

$$\alpha = d + ai + bj + ck$$

$$\beta = w + xi + yj + zk$$

と表せば, 積  $\alpha\beta$  は

$$\alpha\beta = D + Ai + Bj + Cz \quad (1.4.11)$$

ここで

$$D = dw - ax - by - cz$$

$$A = aw + dx - cy + bz$$

$$B = bw + cx + dy - az$$

$$C = cw - bx + ay + dz$$

である.

まず,  $d = w = 1, a = b = c = x = y = z = 0$  のとき

$$(1, 0, 0, 0)^2 = (1, 0, 0, 0) \quad (1.4.7)$$

これは  $1^2 = 1$  を示している.

つづいて,  $a = x = 1, d = b = c = w = y = z = 0$  のとき

$$(0, 1, 0, 0)^2 = -(1, 0, 0, 0) \quad (1.4.8)$$

これは  $i^2 = -1$  を示している.

さらに,  $b = y = 1, d = a = c = w = x = z = 0$  のとき

$$(0, 0, 1, 0)^2 = -(1, 0, 0, 0) \quad (1.4.9)$$

これは  $j^2 = -1$  を示している.

最後に,  $c = z = 1, d = a = b = w = x = y = 0$  のとき

$$(0, 0, 0, 1)^2 = -(1, 0, 0, 0) \quad (1.4.10)$$

これは  $k^2 = -1$  を示している.

このことはすでに『四元数の発見』[1]の第12章「補注」で述べた[5]<sup>7</sup>.

私にはこの四元数を4つの実数で表す方法は発見的な観点からはあまり実りがあるとは思えない. 四元数を  $1, i, j, k$  の4つの元で実体化したのにわざわざそれを4つの実数の組で表すことは思考方法としては後ろ向きの方ではないかという感じをもつ.

しかし, 二つの四元数をベクトルと見なして, そのスカラー積を定義してユークリッド・ベクトル空間を考へるときには四元数を4つの実数の組で表す方法は有用であることはまちがいが無い.

<sup>7</sup>(0, 1, 0, 0)<sup>2</sup> は  $i^2$  のことである. これを  $(0, 1, 0, 0) \cdot (0, 1, 0, 0)$  と思ってはならない. 後者はベクトル空間でのスカラー積を表す.

## 1.5 おわりに

四元数のシリーズの補遺の第1回はこれで終わりである。

これから『四元数の発見』で説明の不十分であったどんなテーマを取り扱うかも明確な予定があるわけでないが、いま振り返ってみると、回転の表現として四元数を取りあつたけれども、回転が群をなしているといった事実についての問題意識があまり明瞭ではなかったと反省をしている。

もっともそれも高校生にもわかる四元数の説明という点では自ずから制限があるだろうが、その限界に挑戦してみたいという気がしないでもない。

## 1.6 付録 条件 $Q^\dagger Q = 1$ の場合

この付録では  $Q^\dagger Q = 1$  を条件に用いたときの行列  $Q$  の要素について得られる条件式を示す。

$$Q^\dagger = \begin{pmatrix} \bar{a} & \bar{c} \\ \bar{b} & \bar{d} \end{pmatrix} \quad (1.2.4)$$

であったから  $Q^\dagger Q = 1$  はつぎのようになる。

$$\begin{aligned} Q^\dagger Q &= \begin{pmatrix} \bar{a} & \bar{c} \\ \bar{b} & \bar{d} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \bar{a}a + \bar{c}c & \bar{a}b + \bar{c}d \\ \bar{b}a + \bar{d}c & \bar{b}b + \bar{d}d \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

となるべきであるから、これから4つの条件

$$\bar{a}a + \bar{c}c = 1 \quad (1.6.1)$$

$$\bar{b}b + \bar{d}d = 1 \quad (1.6.2)$$

$$\bar{a}b + \bar{c}d = 0 \quad (1.6.3)$$

$$\bar{b}a + \bar{d}c = 0 \quad (1.6.4)$$

が得られる。(1.6.4)は(1.6.3)の複素共役であるから、(1.6.3)と(1.6.4)とは独立ではない。ここでは(1.6.4)を省いて考える。(1.6.3)を  $b$  について解けば

$$b = -\frac{1}{\bar{a}}d\bar{c} \quad (1.6.5)$$

これを

$$ad - bc = 1 \quad (1.2.9)$$

に代入すれば

$$\frac{d}{\bar{a}}(a\bar{a} + c\bar{c}) = 1 \quad (1.6.6)$$

となる。(1.6.1)を用いると

$$\frac{d}{\bar{a}} = 1 \quad (1.6.7)$$

が得られる。これを(1.6.5)に代入すると

$$b = -\bar{c} \quad (1.6.8)$$

が得られる.

(1.6.7) と (1.6.8) を  $c, d$  について解けば

$$c = -\bar{b} \quad (1.6.9)$$

$$d = \bar{a} \quad (1.6.10)$$

が得られる.

以上見たように  $QQ^\dagger = 1$  を条件に用いても  $Q^\dagger Q = 1$  を用いても行列  $Q$  は同じとなる.

(2015.1.23)

## 1.7 参考文献

- [1] 矢野 忠, 『四元数の発見』 (海鳴社)
- [2] 矢野 忠, 『四元数の発見』 (海鳴社) 105, 115
- [3] 矢野 忠, 『四元数の発見』 (海鳴社) 113-114
- [4] 矢野 忠, 『四元数の発見』 (海鳴社) 114
- [5] 矢野 忠, 『四元数の発見』 (海鳴社) 199-202

# 角度の単位の設定法

## — なぜ角度は弧度法なのか —

### How to implement the Units of Angles

新関章三<sup>8</sup>

Shozo NIIZEKI<sup>9</sup>

#### 2.1 はじめに

まず、角度の単位の設定法は無数に存在するという事実を示す。つぎになぜ微分積分学の世界では角度は弧度法に限るのかについて考えてみる。

三角関数の変数  $x$  が何故、高等学校で三角関数の微分法が導入されるや、我々が日常無意識に使う小学校から馴染んできた度数 (degree) から、いきなりそれまでに聞いたことも見たこともない弧度法 (radian) に替えなければならないのか。

本稿ではこの理由を定理 4.2 の形で表現し、数学の一分野の解析学では、角度の単位の設定において弧度法が如何に重要な役割を果たしているのかを明らかにする。(なお、補遺と参考文献は編集者 (矢野) が付加した)

#### 2.2 記号と準備

本稿で用いる記号や、後に必要となる補題等について以下記述してみよう。

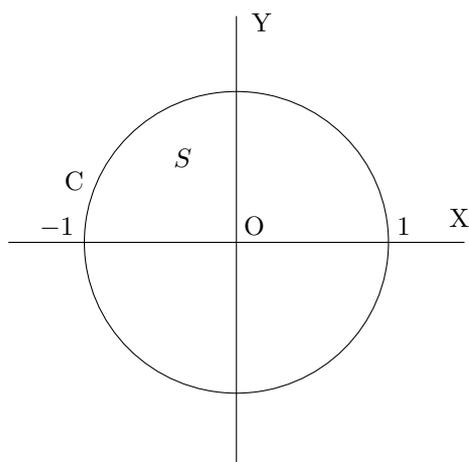
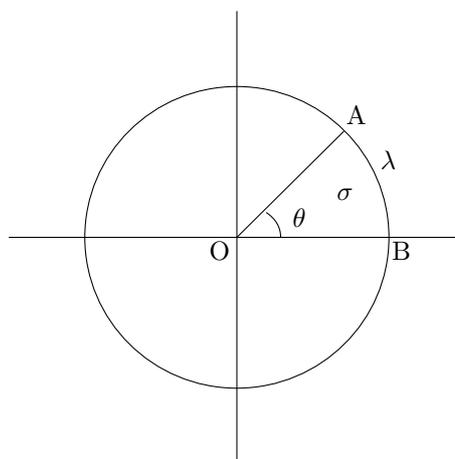
平面的直交座標系  $X-Y$  の原点を  $O$  とし、 $O$  を中心とする半径 1 の円を単位円と呼び、これを  $C$  と名づける。単位円  $C$  の面積を  $S$  と表す (図 2.1 参照)。

本稿では次のような約束をする。すなわち、ある数量の特性を示す単位から、数値だけを取り出したものをその数量の絶対値と呼ぶ。例えば、 $45^\circ$  の絶対値は 45 であり、 $\pi$  ラジアン の絶対値は  $\pi$  である。その他の場合も同様である。

---

<sup>8</sup>高知大学名誉教授

<sup>9</sup>niizekishozo@gmail.com

図 2.1: 単位円 C とその面積  $S$ 図 2.2: 円弧  $\lambda$  と扇形の面積  $\sigma$ 

さらに  $\lambda, \theta, \sigma$  を次のように定める：

$$(2.1) \quad \boxed{\begin{array}{l} C \text{ が } X\text{-軸の正の座標と交わる点を } B \text{ とし, } C \text{ の周上に点 } A \\ \text{を取って } \theta \stackrel{\text{def}}{=} \angle BOA \text{ で角度 } \theta (> 0) \text{ を定める. ここで角度 } \theta \text{ は,} \\ \text{反時計方向に測ったときを正とする. } C \text{ の円弧 } BA \text{ の長さを } \lambda, \\ \text{扇型 } OBA \text{ の面積を } \sigma \text{ と表す. 点 } H \text{ は点 } A \text{ から辺 } OB \text{ に下ろした} \\ \text{垂線の足とする (図 2.2, 2.3 参照).} \end{array}}$$

ここで、弧度法と度数法の定義を与える。

**定義 2.1** 弧度法とは角度  $\theta$  がつぎの形で定式化されているときをいう：

$$\boxed{\text{角度 } \theta \text{ は弧度法による}} \stackrel{\text{def}}{\iff} \boxed{\theta = \lambda}$$

これに対して、日常我々が使っている角度を測る手法を度数法とよぶ。

いま周角  $T (> 0)$  を次のように定める<sup>10</sup>：

$$(2.2) \quad \boxed{\begin{array}{l} \text{原点 } O \text{ を左に見て } O \text{ の周りを } C \text{ の円周に} \\ \text{沿って一周する周角を } T \text{ と表す.} \end{array}}$$

ここで定めた  $T$  の具体例には

$$T = \begin{cases} 360 & \text{: 度数法表示} \\ 2\pi & \text{: 弧度法表示} \end{cases}$$

がある。この値  $T$  を指定することが角度の単位の設定になる。 $T$  の値は任意にとることができるから、角度の単位の設定法は無数に存在する。これで、この論文の最初の目的は達成された<sup>11</sup>。

そして、単位円周上の点  $A$  が第 1 象限に存在するとき

$$(2.3) \quad \boxed{\begin{array}{l} \text{点 } B \text{ における } C \text{ の接線と線 } OA \text{ の延長線} \\ \text{との交点を } P \text{ とする (図 2.3 参照).} \end{array}}$$

<sup>10</sup>周角とは一点のまわりの 1 周の角をいう。[1] を参照

<sup>11</sup>補遺 1 を参照せよ。

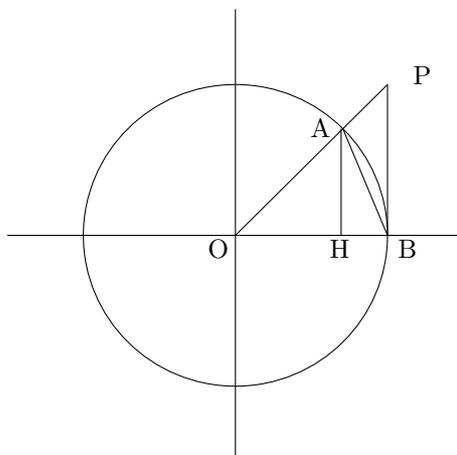


図 2.3:  $\triangle AOB, \triangle POB$  と扇形 AOB

以上の準備の下に，次の応用性に富む重要な補題を示すことができる．

**補題 2.2** 次の 2 連等式が成り立つ：

$$\frac{\sigma}{S} = \frac{\theta}{T} = \frac{\lambda}{2\pi}$$

**証明** 定義 2.1 及び (2.1) ~ (2.3) から明らかである<sup>12</sup>．□

この補題は弧度法の性質を調べるときに威力を発揮する重要な公式である．

## 2.3 極限式とその値

本節では系 3.2 を用いて， $S$  の面積は  $\pi$  であることを示そう．これは実に驚くべきことであって，強力な道具である積分法を用いることなく  $\pi$  の定義から  $S = \pi$  を得ることができるのである．

そこでまず，つぎの定理を証明しよう．

**定理 3.1** 次の 2 つの極限式が成り立つ：

$$\lim_{\theta \rightarrow 0} \frac{\sin \theta}{\theta} = \begin{cases} 1) \frac{2S}{T} & : \text{面積の比較} \\ 2) \frac{2\pi}{T} & : \text{線の長さの比較} \end{cases}$$

**証明** 後で  $\theta \rightarrow 0$  とするのであるから，単位円周上の点 A は最初から第 1 象限にあると仮定しても一般性を失わない．以下この条件の下に定理を証明しよう．

1) の証明: まず，(2.1) ~ (2.3) と図 2.3 から，3 つの図形のつぎの面積の式が成り立つ：

$$\begin{cases} \triangle AOB = \frac{1}{2} \sin \theta \\ \triangle POB = \frac{1}{2} \tan \theta \\ \sigma = \text{扇形 AOB の面積} \end{cases}$$

<sup>12</sup>補遺 2 を参照せよ．

が成り立つ。したがって補題 2.2 により  $\sigma = (S/T) \cdot \theta$  であり

$$\boxed{\frac{1}{2} \sin \theta < \frac{S}{T} \theta < \frac{1}{2} \tan \theta} \implies \boxed{\frac{\sin \theta}{\theta} < \frac{2S}{T} < \frac{\tan \theta}{\theta}}$$

が成り立つから

$$\overline{\lim}_{\theta \rightarrow 0} \frac{\sin \theta}{\theta} \leq \frac{2S}{T} \leq \lim_{\theta \rightarrow 0} \frac{\tan \theta}{\theta} = \lim_{\theta \rightarrow 0} \left( \frac{\sin \theta}{\theta} \cdot \frac{1}{\cos \theta} \right) = \lim_{\theta \rightarrow 0} \frac{\sin \theta}{\theta}$$

が得られる。これで 1) が示された。

2) の証明: 基本的には 1) の場合と同じである。(2.1)~(2.3), 補題 2.2 および図 2.3 から長さの不等式

$$(3.1) \quad \boxed{\text{線分 AH} < (\text{線分 AB}) < \text{円弧 AB} < \text{線分 PB}}$$

が成り立つ。これより, 1) の場合とまったく同様に補題 2.2 を用いれば

$$\boxed{\sin \theta < \lambda < \tan \theta} \implies \boxed{\frac{\sin \theta}{\theta} < \frac{2\pi}{T} < \frac{\tan \theta}{\theta}}$$

が成り立ち, 2) が得られる。□

**注意** 定理 3.1 からわかることは微分積分学でよく知られた極限の式

$$\lim_{\theta \rightarrow 0} \frac{\sin \theta}{\theta} = 1$$

は弧度法で角が測られたときに成り立つ式であることに注意しておこう。

定理 3.1 からは重要な結果を幾つか導き出すことができる。まず次の系が成り立つ。

**系 3.2** 次の等式が成り立つ:

$$\boxed{S = \pi}$$

**証明** 極限值:

$$\boxed{\lim_{\theta \rightarrow 0} \frac{\sin \theta}{\theta} = \exists \xi \in \mathbf{R}}$$

が成り立つのであるから, 定理 3.1 の 1) と 2) との値は一致しなければならない。従って

$$\boxed{\frac{2S}{T} = \frac{2\pi}{T}} \implies \boxed{S = \pi}$$

が得られて系は証明された。□

**注意** 上の証明では 単位円の  $S = \pi$  は積分法を一切用いずに計算されている。また角度の単位の設定法にもよらないことがわかる。◆

## 2.4 弧度法による角度

本節では, 三角関数の微分を通じて, 弧度法が如何に重要な概念であるかについて調べてみよう。

そのためにまず、三角関数の微分の性質を調べてみる。つぎの定理が成り立つ。

**定理 4.1** つぎの微分公式が成り立つ：

$$\frac{d}{dx} \begin{bmatrix} \sin x \\ \cos x \end{bmatrix} = \frac{2\pi}{T} \begin{bmatrix} \cos x \\ -\sin x \end{bmatrix}$$

**証明** 三角関数のよく知られた公式と微分の定義とにしたがって計算し、定理 3.1 の 2) を用いれば、

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} \sin x &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin(x+h) - \sin x}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{2}{h} \sin(h/2) \cos(x+h/2) = \frac{2\pi}{T} \cos x \end{aligned}$$

が得られる。これで定理の上段が示された。下段も同様である。□

この定理から我々が目指す興味深い、つぎの定理を得る。

**定理 4.2** 下記の 7 つの命題：1) ~ 7) に対し一連の論理式：

$$\begin{aligned} & \boxed{1) \theta = \lambda} \Rightarrow \boxed{2) T = 2\pi} \Rightarrow \boxed{3) S = \pi} \Rightarrow \boxed{4) \lambda = 2\sigma} \Rightarrow \\ & \Rightarrow \boxed{5) \lim_{\theta \rightarrow 0} \frac{\sin \theta}{\theta} = 1} \Rightarrow \boxed{6) \frac{d}{d\theta} \sin \theta = \cos \theta} \Rightarrow \\ & \Rightarrow \boxed{7) \frac{d}{d\theta} \cos \theta = -\sin \theta} \Rightarrow \boxed{1) \theta = \lambda} \end{aligned}$$

が成り立つ<sup>13</sup>。

**証明** 1)  $\Rightarrow$  2) は補題 2.2 から、2)  $\Rightarrow$  3) は定理 3.1 から、3)  $\Rightarrow$  4) は補題 2.2 から、4)  $\Rightarrow$  5) は (2.4) 及び定理 3.1 から、5)  $\Rightarrow$  6) は三角関数の微分の定義から、6)  $\Rightarrow$  7) は三角関数の関係式： $\sin(\theta \pm \pi/2) = \pm \cos \theta$  から分かる。そして、最後の 7)  $\Rightarrow$  1) は定理 3.1 の 2) と定理 4.1 とにより直ちに分かる。□

この定理から弧度法に関する最も重要な性質をいくつか引き出すことが出来る。

**系 4.3** 上の定理で与えた 7 つの命題 1) ~ 7) は全て同値である。

**証明** 定理 4.2 の論理式から明らかである。□

## 2.5 おわりに

振り返れば今を去る 50 数年前の話であるが、高校 3 年生になって三角関数  $\sin x$  の微分を考えると、角度  $x$  は弧度法で表示した。つまり、角度  $x$  は  $x$  ラジアンと考えた。しかし、なぜそうしなければならないのだろうか。この問題を追及した結果が本稿であり、この中心は定理 4.2 及び系 4.3 である。

そもそも、本稿を草する最初のきっかけは角度の単位の設定法は一体いくつ存在するのか、という疑問から生じた。この問題の回答は既に本稿の 2.2 節に与えてある。

再び話を弧度法に戻そう。我々が通常なにげなく使っている公式：3) - 7) は角度を弧度法で考えた結果であって、弧度法でなければ定理 4.2 は成り立たない。このように角度を弧度法でもって表示することは三角関数の伴う解析系の数学にとっては決定的に重要である。

弧度法という、かくも見事な角度の設定法を考え出した人は、一体、どこの、誰で、いつのことなのだろうか。

<sup>13</sup>補遺 3 を参照せよ。

## 2.6 補遺 1 角度の単位の例

著者の新関氏が角度の単位の例を度数法と弧度法以外に挙げていないので編集者（矢野）が補足しておく。度数法での角度は 60 進法を採用しているの、角度の換算のときにまちがいをおこしたりする。歴史的な経緯だからいまさらどうにもならないが、もし私に角度の単位を設定を任せてもらっていたら、10 進法を採用したことであろう。

10 進法を角度に採用して、周角  $T$  として  $T = 10$  とか  $T = 100, 1000$  をとることもできる。たとえば、 $T = 10$  ととれば、このときの角度の単位 1 は度で表せば、 $36^\circ$  となる。また、 $T = 100$  とすれば、このときの角度の単位 1 は度で表せば、 $3.6^\circ$  となる。さらに、 $T = 1000$  ととれば、このときの角度の単位 1 は度で表せば、 $0.36^\circ = 21.6'$  となる。

これらは  $T$  としていろいろの値をとることができる例として挙げた  $T$  の数値の絶対値であるが、実際に直角 ( $90^\circ$ ) を 100 グラード (grade) とする角度の単位がメートル法の祖国であるフランスでは採用されたことがある。しかし、一部の分野を除いて普及はしなかったという [4]。

1 グラード  $= \frac{90}{100}^\circ = 0.9^\circ$  である。したがって、周角  $360^\circ = 400$  グラードである（文責 矢野）。

## 2.7 補遺 2 補題 2.2 の補足

$$\frac{\sigma}{S} = \frac{\theta}{T} = \frac{\lambda}{2\pi}$$

は自明であると考えられる方もおられるであろうが、補題 2.2 の証明ができたとは私には思われぬ。むしろ、補題 2.2 を述べる前に円弧の長さ  $\lambda$ 、扇形の面積  $\sigma$  は円弧のなす中心角  $\theta$  に比例するという事実をどこかで述べておく必要があったのではないかと思うが、大部分の人にとってはその必要はないとお考えかもしれない。

この点については議論の分かれるところだと思う。補題 2.2 はまったく自明であって、そもそも証明の必要もないという方々が大多数かもしれない。そのことは十分承知しているが、私なりにダメを押しておく。

円の中心角を  $\theta$  とするとき、それに対する円弧の長さを  $\lambda(\theta)$ 、扇形の面積を  $\sigma(\theta)$  とすれば、それぞれについて

$$\lambda(\theta + \psi) = \lambda(\theta) + \lambda(\psi)$$

$$\sigma(\theta + \psi) = \sigma(\theta) + \sigma(\psi)$$

が成り立つから、それぞれ  $\theta = \psi = 0$  であれば、

$$\lambda(0) = 0$$

$$\sigma(0) = 0$$

したがって

$$\lambda(\theta) = a\theta$$

$$\sigma(\theta) = k\theta$$

と表せる [2][3]。すなわち  $\lambda(\theta), \sigma(\theta)$  の両方とも  $\theta$  に比例する。なお、 $a, k$  は比例定数であるが、次元がちがっており、

$$[a] = [L], \text{ 長さの次元}$$

$$[k] = [L]^2, \text{ 面積の次元}$$

である（文責 矢野）。

## 2.8 補遺 3 定理 4.2 の補足

定理 4.2 で

$$\theta = \lambda, \quad S = \pi, \quad \lambda = 2\sigma$$

はすべて円を単位円にとっているので、長さの次元が円の半径  $r = 1$  のところに入ってくる。だから次元があまりはっきりしない恐れがある。そのためにわざと半径  $r$  を残しておけば、これらの式はそれぞれ

$$\lambda = r\theta, \quad S = \pi r^2, \quad \sigma = \frac{1}{2}r\lambda$$

である (文責 矢野)。

## 2.9 参考文献

- [1] [ja.wiktionary.org/wiki/周角](http://ja.wiktionary.org/wiki/周角)
- [2] 安藤洋美, 山野熙, 『大道を行く高校数学』 解析編 (現代数学社, 2001) 91-92
- [3] 矢野 忠, 扇形の面積, 『研究と実践』 (愛数協) 116 号 (2014.11) 6-8
- [4] [ja.wikipedia.org/wiki/グラード](http://ja.wikipedia.org/wiki/グラード)

## Legendre 関数と量子力学のポテンシャル問題 (3)

# Legendre Function and a Potential Problem of Quantum Mechanics (3)

世戸 憲治<sup>14</sup>

Kenji SETO<sup>15</sup>

### 3.1 はじめに

Legendre 関数に思わぬところで出会う例の第3弾として、前回と同じく、量子力学のポテンシャル問題を紹介する。ここでは、1次元の Schrödinger 方程式のポテンシャル  $V(x)$  が

$$V(x) = \frac{V_0}{\cos^2(x/x_0)} \quad (3.1.1)$$

という場合を考える。ここに、 $x_0$  は長さの次元を持つ正の定数であり、また、 $V_0$  はエネルギーの次元を持つ正の定数とする。このときの Schrödinger 方程式は、 $m$ ,  $E$  を、それぞれ、電子の質量、エネルギーとして、

$$\left[ -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2}{dx^2} + \frac{V_0}{\cos^2(x/x_0)} \right] \Psi = E\Psi \quad (3.1.2)$$

となる。ここでは、以下で扱う数式簡素化のため、変数を無次元化し、座標  $x$ 、ポテンシャルの大きさ  $V_0$ 、エネルギー  $E$  を、改めて、

$$x/x_0 \rightarrow x, \quad \frac{2mx_0^2V_0}{\hbar^2} \rightarrow V_0, \quad \frac{2mx_0^2E}{\hbar^2} \rightarrow E \quad (3.1.3)$$

と置き直す。この置き換えで、方程式は

$$\left[ \frac{d^2}{dx^2} - \frac{V_0}{\cos^2 x} + E \right] \Psi = 0 \quad (3.1.4)$$

となる。この方程式を、 $-\pi/2 < x < \pi/2$  の領域で、エネルギー  $E$  が正の束縛状態の問題として解くことを試みる。

---

<sup>14</sup> 北海学園大学名誉教授

<sup>15</sup> seto@pony.ocn.ne.jp

## 3.2 方程式の解法

### 3.2.1 固有値・固有関数

ここでは、方程式 (3.1.4) を解くにあたって、変数を後の便宜上、

$$\nu(\nu+1) = V_0, \quad \mu^2 = E \quad (3.2.1)$$

と置き換え、独立変数  $x$  を

$$\xi = \tan x, \quad -\infty < \xi < \infty \quad (3.2.2)$$

と変換すると、方程式は

$$\left[ (1 + \xi^2) \frac{d^2}{d\xi^2} + 2\xi \frac{d}{d\xi} - \nu(\nu+1) + \frac{\mu^2}{1 + \xi^2} \right] \Psi = 0 \quad (3.2.3)$$

となる。さらに、独立変数  $\xi$  を、虚数単位  $i$  を用いて、

$$z = i\xi \quad (3.2.4)$$

と変換すると、

$$\left[ (1 - z^2) \frac{d^2}{dz^2} - 2z \frac{d}{dz} + \nu(\nu+1) - \frac{\mu^2}{1 - z^2} \right] \Psi = 0 \quad (3.2.5)$$

となる。これは Legendre 陪微分方程式であり、その解は、定数係数を除いて、

$$\Psi = P_\nu^\mu(z) \equiv \frac{1}{\Gamma(1-\mu)} \left( \frac{z+1}{z-1} \right)^{\mu/2} F\left(-\nu, \nu+1, 1-\mu; \frac{1-z}{2}\right) \quad (3.2.6)$$

と与えられる<sup>16</sup>。ここに、 $P_\nu^\mu(z)$  は第 1 種 Legendre 陪関数、 $F$  は Gauss の超幾何関数である。

(3.2.1) 式から、 $\nu, \mu$  は

$$\nu = \frac{-1 \pm \sqrt{1+4V_0}}{2}, \quad \mu = \pm\sqrt{E} \quad (3.2.7)$$

となるが、 $\nu$  については、 $P_\nu^\mu(z) = P_{-\nu-1}^\mu(z)$  が常に成立するので、根号の前の符号はプラスをとることにし、

$$\nu = \frac{-1 + \sqrt{1+4V_0}}{2} \quad (3.2.8)$$

と、正なる  $V_0$  に対し正となる  $\nu$  を採用する。 $\mu$  の符号についてはこの段階では、まだ、保留しておく。

ここで、波動関数に対する境界条件として、 $x \rightarrow \pm\pi/2, (z \rightarrow \pm i\infty)$  で、波動関数がゼロとなる条件を課すことにするが、(3.2.6) 式の表示式では見積もることができないので、他の表示式<sup>17</sup>、

$$P_\nu^\mu(z) = \frac{(z^2-1)^{\frac{1}{2}\mu}}{\sqrt{\pi}} \left[ \frac{\sin((\nu+\mu)\pi)}{2^{\nu+1} \cos(\nu\pi)} \frac{\Gamma(\nu+\mu+1)}{\Gamma(\nu+\frac{3}{2})} \frac{1}{z^{\nu+\mu+1}} F\left(\frac{\nu+\mu}{2}+1, \frac{\nu+\mu+1}{2}, \nu+\frac{3}{2}; \frac{1}{z^2}\right) + \frac{2^\nu \Gamma(\nu+\frac{1}{2})}{\Gamma(\nu-\mu+1)} z^{\nu-\mu} F\left(\frac{\mu-\nu+1}{2}, \frac{\mu-\nu}{2}, \frac{1}{2}-\nu; \frac{1}{z^2}\right) \right] \quad (3.2.9)$$

を用いることにする。この式から、 $z \rightarrow \pm i\infty$  で、全体にかかる  $(z^2-1)^{\frac{1}{2}\mu}$  と合わせて、 $\nu > 0$  のとき、大括弧中の 1 項目はゼロに収束するが、2 項目は発散してしまう。これを救うために、 $\Gamma(\nu-\mu+1)$  が極の位置になるようにして、2 項目を消し去ることにしよう。すなわち、

$$\nu - \mu + 1 = -n, \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (3.2.10)$$

これから、 $\mu = \nu + n + 1$  となるので、 $\mu$  は正でなければならず、(3.2.7) 式の  $\mu$  は

$$\mu = \sqrt{E} \quad (3.2.11)$$

<sup>16</sup> 「数学公式 3」(岩波全書) p.119

<sup>17</sup> 「数学公式 3」(岩波全書) p.123

となる。またこれから，エネルギー  $E$  が

$$E = \left( \frac{1 + \sqrt{1 + 4V_0}}{2} + n \right)^2, \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (3.2.12)$$

と求まったことになる。このときの固有関数は，(3.2.6) 式の超幾何関数を，Kummer の変換式

$$F(\alpha, \beta, \gamma; z) = (1 - z)^{\gamma - \alpha - \beta} F(\gamma - \alpha, \gamma - \beta, \gamma; z) \quad (3.2.13)$$

を用いて変換し， $\mu = \nu + n + 1$  と置き直すと，

$$P_\nu^{\nu+n+1}(z) = \frac{2^{\nu+n+1}}{\Gamma(-\nu-n)} (z^2 - 1)^{-\frac{1}{2}(\nu+n+1)} F\left(-n, -2\nu - n - 1, -\nu - n; \frac{1-z}{2}\right) \quad (3.2.14)$$

となる。この超幾何関数の部分は  $n$  次の多項式となることに注意する。ここで， $z = i \tan x$  として元の変数に戻すと，

$$P_\nu^{\nu+n+1}(i \tan x) = \frac{(-2i \cos x)^{\nu+n+1}}{\Gamma(-\nu-n)} F\left(-n, -2\nu - n - 1, -\nu - n; \frac{1 - i \tan x}{2}\right) \quad (3.2.15)$$

となる。特に， $n = 0, 1, 2, 3, 4$  の場合は，

$$\begin{aligned} P_\nu^{\nu+1}(i \tan x) &= \frac{(-2i \cos x)^{\nu+1}}{\Gamma(-\nu)}, \quad \text{for } n = 0 \\ P_\nu^{\nu+2}(i \tan x) &= \frac{2(-2i \cos x)^{\nu+1}}{\Gamma(-\nu-1)} \sin x, \quad \text{for } n = 1 \\ P_\nu^{\nu+3}(i \tan x) &= \frac{2(-2i \cos x)^{\nu+1}}{\Gamma(-\nu-2)} \left( \frac{2\nu+3}{\nu+2} - 2 \cos^2 x \right), \quad \text{for } n = 2 \\ P_\nu^{\nu+4}(i \tan x) &= \frac{4(-2i \cos x)^{\nu+1}}{\Gamma(-\nu-3)} \left( \frac{2\nu+3}{\nu+3} - 2 \cos^2 x \right) \sin x, \quad \text{for } n = 3 \\ P_\nu^{\nu+5}(i \tan x) &= \frac{4(-2i \cos x)^{\nu+1}}{\Gamma(-\nu-4)} \left( \frac{(2\nu+5)(2\nu+3)}{(\nu+4)(\nu+3)} - 4 \frac{2\nu+5}{\nu+4} \cos^2 x + 4 \cos^4 x \right), \quad \text{for } n = 4 \end{aligned} \quad (3.2.16)$$

となる。これらの式から，固有関数は， $n$  が奇数なら奇関数， $n$  が偶数なら偶関数になっていることがわかる。このことは解くべき方程式が空間反転に対称になっているので，当然のことである。また， $\nu$  が正整数のとき，これらの値はすべてゼロになってしまうが，これは定義が悪いからであって，(3.2.15) 式のところで，全体に  $\Gamma(-\nu-n)$  を掛けたものを固有関数とすることで解消される。さらに，(3.2.16) 式から，虚数はすべて， $(-2i)^{\nu+1}$  の形でのみ入り，他の部分はすべて実数になることも注目に値する。

### 3.2.2 固有関数の規格化

つぎに，ここで求まった固有関数の規格化を試みる。2つの固有値  $n, n'$  に属する2個の固有関数  $P_\nu^{\nu+n+1}(i\xi)$ ， $P_\nu^{\nu+n'+1}(i\xi)$  が満たす (3.2.3) の形の方程式を

$$\begin{aligned} \left[ (1 + \xi^2) \frac{d^2}{d\xi^2} + 2\xi \frac{d}{d\xi} - \nu(\nu+1) + \frac{(\nu+n+1)^2}{1+\xi^2} \right] P_\nu^{\nu+n+1}(-i\xi) &= 0 \\ \left[ (1 + \xi^2) \frac{d^2}{d\xi^2} + 2\xi \frac{d}{d\xi} - \nu(\nu+1) + \frac{(\nu+n'+1)^2}{1+\xi^2} \right] P_\nu^{\nu+n'+1}(i\xi) &= 0 \end{aligned} \quad (3.2.17)$$

と書いておく。ただし， $P_\nu^{\nu+n+1}(i\xi)$  については，その複素共役を取ったものにしておく。この第1式に  $P_\nu^{\nu+n'+1}(i\xi)$  を，また，第2式に  $P_\nu^{\nu+n+1}(-i\xi)$  を掛けて，辺々を引き算すると，

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\xi} \left[ P_\nu^{\nu+n'+1}(i\xi)(1+\xi^2) \frac{dP_\nu^{\nu+n+1}(-i\xi)}{d\xi} - P_\nu^{\nu+n+1}(-i\xi)(1+\xi^2) \frac{dP_\nu^{\nu+n'+1}(i\xi)}{d\xi} \right] \\ + (n-n')(2\nu+2+n+n') \frac{P_\nu^{\nu+n+1}(-i\xi)P_\nu^{\nu+n'+1}(i\xi)}{1+\xi^2} = 0 \end{aligned} \quad (3.2.18)$$

となる. この式を  $\xi$  で  $-\infty$  から  $\infty$  まで積分すると,

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{P_{\nu}^{\nu+n+1}(-i\xi)P_{\nu}^{\nu+n'+1}(i\xi)}{1+\xi^2} d\xi = [F(\xi)]_{-\infty}^{\infty} \quad (3.2.19)$$

ここに,

$$F(\xi) = \frac{1}{(n-n')(2\nu+2+n+n')} \left[ P_{\nu}^{\nu+n+1}(-i\xi)(1+\xi^2) \frac{dP_{\nu}^{\nu+n'+1}(i\xi)}{d\xi} - P_{\nu}^{\nu+n'+1}(i\xi)(1+\xi^2) \frac{dP_{\nu}^{\nu+n+1}(-i\xi)}{d\xi} \right] \quad (3.2.20)$$

と定義する. ここで, Legendre 関数の微分公式

$$(z^2-1) \frac{dP_{\nu}^{\mu}(z)}{dz} = (\nu-\mu+1)P_{\nu+1}^{\mu}(z) - (\nu+1)zP_{\nu}^{\mu}(z) \quad (3.2.21)$$

で,  $z = \pm i\xi$  とおくと,

$$(1+\xi^2) \frac{dP_{\nu}^{\mu}(\pm i\xi)}{d\xi} = \mp i(\nu-\mu+1)P_{\nu+1}^{\mu}(\pm i\xi) - (\nu+1)\xi P_{\nu}^{\mu}(\pm i\xi) \quad (3.2.22)$$

となる. これを用いて, (3.2.20) 式の微分のところに代入すると,

$$F(\xi) = \frac{i}{(n-n')(2\nu+2+n+n')} \left[ n'P_{\nu}^{\nu+n+1}(-i\xi)P_{\nu+1}^{\nu+n'+1}(i\xi) + nP_{\nu+1}^{\nu+n+1}(-i\xi)P_{\nu}^{\nu+n'+1}(i\xi) \right] \quad (3.2.23)$$

となる. この全体に付く虚数の  $i$  が奇異な感じを与えるが, この式は  $n$  と  $n'$  を入れ替え, 全体の複素共役をとると元に戻るようになっている.

この (3.2.23) 式から,  $\xi \rightarrow \pm\infty$  で, 右辺大括弧中はゼロとなるので,  $n$  と  $n'$  が異なるときは, (3.2.19) 式の積分がゼロとなり, 異なる固有値に属する固有関数の直交性が言え,

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{P_{\nu}^{\nu+n+1}(-i\xi)P_{\nu}^{\nu+n'+1}(i\xi)}{1+\xi^2} d\xi = 0, \quad \text{for } n \neq n' \quad (3.2.24)$$

となる. しかし,  $n = n'$  のとき, すなわち, 同じ固有値になるときは, (3.2.20) 式そのものが許されなくなるのでそう簡単ではない. 公式集を探したが, これに相当する積分は見当たらない. そこで, この (3.2.24) 式の積分で,  $n = n'$  のときを,  $\xi = \tan x$  として元の変数に戻して,

$$\int_{-\pi/2}^{\pi/2} P_{\nu}^{\nu+n+1}(-i \tan x) P_{\nu}^{\nu+n+1}(i \tan x) dx = N_n^2 \quad (3.2.25)$$

としたうえで, (3.2.16) 式で求めた  $n = 0, 1, 2, 3, 4$  の場合に限って実行してみよう. ベータ関数  $B$  を用いた積分公式<sup>18</sup>

$$\int_0^{\pi/2} \cos^{\alpha}(x) \sin^{\beta}(x) dx = \frac{1}{2} B\left(\frac{\alpha+1}{2}, \frac{\beta+1}{2}\right) \quad (3.2.26)$$

を使って, 実行してみると,

$$\begin{aligned} N_0^2 &= \frac{2^{2\nu+2}}{[\Gamma(-\nu)]^2} \frac{\Gamma(\nu+\frac{3}{2})\Gamma(\frac{1}{2})}{\Gamma(\nu+2)}, & N_1^2 &= \frac{2^{2\nu+4}}{[\Gamma(-\nu-1)]^2} \frac{\Gamma(\nu+\frac{3}{2})\Gamma(\frac{3}{2})}{\Gamma(\nu+3)}, \\ N_2^2 &= \frac{2^{2\nu+6}}{[\Gamma(-\nu-2)]^2} \frac{\Gamma(\nu+\frac{5}{2})\Gamma(\frac{3}{2})}{(\nu+2)\Gamma(\nu+4)}, & N_3^2 &= \frac{2^{2\nu+8}}{[\Gamma(-\nu-3)]^2} \frac{\Gamma(\nu+\frac{5}{2})\Gamma(\frac{5}{2})}{(\nu+3)\Gamma(\nu+5)}, \\ N_4^2 &= \frac{2^{2\nu+11}}{[\Gamma(-\nu-4)]^2} \frac{\Gamma(\nu+\frac{7}{2})\Gamma(\frac{5}{2})}{(\nu+3)(\nu+4)\Gamma(\nu+6)} \end{aligned} \quad (3.2.27)$$

<sup>18</sup> 「数学公式 1」(岩波全書) p.243

と一見、まとまりのない式がでてくる。この種の計算は、 $n$  番号が増えるにしたがい急速に面倒な計算を強いられるので、数式処理ソフトでも使わないかぎり、手計算ではこの辺が限度であろう。ここで、変数が半整数のガンマ関数のところに実際の値を代入し、さらに、ガンマ関数に関する倍数公式

$$\Gamma(z)\Gamma(z + \frac{1}{2}) = \frac{2\sqrt{\pi}}{2^{2z}}\Gamma(2z) \quad (3.2.28)$$

を用いると、

$$\begin{aligned} N_0^2 &= \frac{2\pi}{[\Gamma(-\nu)]^2} \frac{\Gamma(2\nu+2)}{\Gamma(\nu+1)\Gamma(\nu+2)}, & N_1^2 &= \frac{2\pi}{[\Gamma(-\nu-1)]^2} \frac{\Gamma(2\nu+3)}{\Gamma(\nu+2)\Gamma(\nu+3)}, \\ N_2^2 &= \frac{2\pi}{[\Gamma(-\nu-2)]^2} \frac{2\Gamma(2\nu+4)}{\Gamma(\nu+3)\Gamma(\nu+4)}, & N_3^2 &= \frac{2\pi}{[\Gamma(-\nu-3)]^2} \frac{3!\Gamma(2\nu+5)}{\Gamma(\nu+4)\Gamma(\nu+5)}, \\ N_4^2 &= \frac{2\pi}{[\Gamma(-\nu-4)]^2} \frac{4!\Gamma(2\nu+6)}{\Gamma(\nu+5)\Gamma(\nu+6)} \end{aligned} \quad (3.2.29)$$

と規則性が見える式に書き換えられる。これから、一般の  $n$  に対する  $N_n^2$  の形を推定すると、

$$N_n^2 = \frac{2\pi}{[\Gamma(-\nu-n)]^2} \frac{n!\Gamma(2\nu+n+2)}{\Gamma(\nu+n+1)\Gamma(\nu+n+2)} \quad (3.2.30)$$

となる。あるいは、ガンマ関数の公式  $\Gamma(1-z)\Gamma(z) = \pi/\sin(\pi z)$  を用いて分母を整理すると、

$$N_n^2 = \frac{2\sin^2(\pi\nu)n!\Gamma(2\nu+n+2)}{\pi(\nu+n+1)} \quad (3.2.31)$$

となる。ここではこの一般の  $n$  に対する規格化定数  $N_n^2$  の証明はしないが、以下、正しいものとして扱う。

以上の結果をまとめると、固有関数の直交性の式、

$$\int_{-\pi/2}^{\pi/2} P_\nu^{\nu+n+1}(-i\tan x)P_\nu^{\nu+n'+1}(i\tan x)dx = N_n^2\delta_{n,n'}, \quad n, n' = 0, 1, 2, \dots \quad (3.2.32)$$

が得られたことになる。これから、 $P_\nu^{\nu+n+1}(i\tan x)/N_n$  が規格化された固有関数になる。(3.2.15) 式の Legendre 関数の定義にある  $\Gamma(-\nu-n)$  はここでは余計なものであるが、規格化した固有関数にしたときはこの因子が消えることを見るには、 $N_n^2$  の定義として (3.2.30) 式の方が良いかもしれない。

固有関数の完全性の式は、

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{P_\nu^{\nu+n+1}(-i\tan x)P_\nu^{\nu+n+1}(i\tan x')}{N_n^2} = \delta(x-x'), \quad -\frac{\pi}{2} < x, x' < \frac{\pi}{2} \quad (3.2.33)$$

となる。

### 3.3 おわりに

ここで扱ったポテンシャルをさらに拡張したものに、Teller-Pöschel ポテンシャルがある。これは、 $V_1, V_2 > 0$  とし、 $0 < x < \pi/2$  の範囲内で、

$$V(x) = \frac{V_1}{\cos^2(x)} + \frac{V_2}{\sin^2(x)} \quad (3.3.1)$$

と定義される。このポテンシャルでは、エネルギー固有値を求めることは可能であるが、波動関数は Legendre 関数では表されないで、ここではこの片割れである 1 項目だけを採用したものを解析してきた。

今回の計算を通じて、(3.2.25) 式の積分ができなかったばかりに、これほど面倒な計算を強いられたことはない。公式集を探しても載っていない、最後は、残念ながら推定式で終わることになってしまった。しかし、先

の見える計算をしているときが、私にとって最も至福のときなのだから、これも本望としか言いようがない。

[ 謝辞 ]

今回もこの原稿を書くにあたって、京都大学名誉教授の中西襄先生にご精読いただき、たくさんのコメントをいただきました。特に、一般の  $n$  に対する規格化定数の推定式 (3.2.29) - (3.2.31) は先生からいただいたご助言によるものです。ここに、謹んで感謝いたします。

# 五元数の非存在と八元数

## Nonexistence of Quintuplet and Octonions

森田 克貞<sup>19</sup>

Katsusada MORITA<sup>20</sup>

### 要約

結合的な三元数の非存在から結合的な四元数が導かれたのと同様、非結合的な五元数の非存在から、交代的な八元数が導かれることを示す。

### 4.1 はじめに

複素数  $z = x + iy = (x, y)$  は 2 次元であるが、それを 3 次元に拡張した三元数  $x + iy + jz = (x, y, z)$  は、2 つの独立な虚数単位  $\{i, j\}$  の存在を仮定し、その絶対値  $|x + iy + jz| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$  は位置ベクトル  $(x, y, z)$  の長さで与えられるとする。また、その偏角  $\theta$  ( $x$ -軸の正方向から測った  $2\pi$  を法とする角度) は  $\tan \theta = \sqrt{y^2 + z^2}/x$  で与えられる。ベクトルの記号を使えば  $\{1 \equiv (1, 0, 0), i \equiv (0, 1, 0), j \equiv (0, 0, 1), i^2 = j^2 = (-1, 0, 0) \equiv -1\}$  となるが、その積  $(x, y, z)(x', y', z')$  は、対応する三元数の積  $(x + iy + jz)(x' + iy' + jz')$  を、 $i^2 = j^2 = -1$  を使って、項別に掛け算することにより与えられるとする。これは複素数の場合  $(x, y)(x', y') = (x + iy)(x' + iy') = xx' - yy' + i(xy' + yx')$  の一般化であるが、決定的に異なるのは、結果が再び三元数に戻らない場合があるということである。実際、三元数の積には、 $ij$  とか  $ji$  のような積 (を区別すべきことは Hamilton に始まる) が出て来て、これらが  $\{1, i, j\}$  で表せない限り、一般には三元数の枠をはみ出す。それをコントロールするのは、複素数の場合になり立つ「絶対値の法則」 $|(x + iy)(x' + iy')| = |x + iy||x' + iy'|$  の一般化である。けれども、一般化された「絶対値の法則」 $|(x + iy + jz)(x' + iy' + jz')| = |x + iy + jz||x' + iy' + jz'|$  が三元数一般に対して成り立つかどうかは別問題である。なぜなら、この式の右辺は、定義によって、直ちに計算出来るが、左辺には  $ij$  や  $ji$  の項をどう取り扱うかという未解決の問題が残っているから。

ところが、幸いにも、同じ三元数に対する「絶対値の法則」 $|(x + iy + jz)^2| = |x + iy + jz|^2$  は  $(ij + ji)yz = 0$  を要求するだけで満たされることがわかる。複素数の幾何学的解釈が確立した後、19 世紀前半にその 3 次元への一般化を考えた数学者の中で、Hamilton はこの事実に注目し、 $ij = ji = 0$  は考えにくい、むしろ  $\{i, j\}$  は反可換  $ij + ji = 0$  であると仮定すればよいことに気づいた。当時の代数学の常識を覆す、この反可換性の仮定こそ、三元数から四元数への飛躍 (についての日本語による丁寧な解説が文献 [1] にある) の第 1 歩であった。即ち、積の可換性を犠牲にすることによって、矛盾のない新しい数体系を探し求めたのである。しかし、異なる三元数の積には一般に  $ij$  に比例する項が残る。即ち、三元数は積のもとで閉じていない (結合則を仮定すれば、 $ij$  が  $\{1, i, j\}$  で表せないことは直ぐ解る。これに関する Hamilton による推論については、次節で述

<sup>19</sup>名古屋大学大学院理学研究科物理学教室客員研究員

<sup>20</sup>kmorita@cello.ocn.ne.jp

べる). 言い換えれば,  $ij$  は幾何学的には,  $\{1, i, j\}$  と直交する空間ベクトルに対応することになるが, 空間は 3 次元なので最早そのようなベクトルの存在する余地がない.

三元数が積のもとで閉じていない理由を代数的に言えば,  $\{i, j\}$  が一般性を失うことなく反可換に出来る [2] ことによる. その結果, 結合則を用いれば,  $ij$  は  $\{i, j\}$  とは独立な虚数単位になるからである. それ故, 積のもとで閉じた代数は,  $\{1, i, j, k = ij\}$  によって張られ, Hamilton の関係  $ijk = -1$  により, 結合則及び「絶対値の法則」を満たす, 積のもとで閉じた Hamilton の四元数が導かれる. Hamilton の虚数単位  $\{i, j, k\}$  は互いに反可換なので, 四元数は非可換であるが,  $\{i, j, k\}$  に独立な虚数単位  $l$  は, 結合則を仮定する限り, 存在しない (代数学における Frobenius の定理). それは,  $l$  は一般性を失うことなく  $\{i, j, k\}$  と反可換に出来, Hamilton の関係  $ijk = -1$  に加え, 結合則および可除性の公理を使えば,  $l = 0$  となってしまうからである (あるいは,  $l$  は  $\{i, j, k\}$  に 1 次従属になる [2]). にも拘わらず, 特定のパターンで結合則を破れば,  $l$  は存在する. そのような  $l$  を仮定しても,  $\{1, i, j, k, l\}$  によって張られる非結合的な五元数は積のもとで閉じない. 即ち, 五元数は代数として存在しない. 積のもとで閉じた代数は  $\{1, i, j, k, li, lj, lk, l\} \equiv \{1, e_A\}_{A=1,2,\dots,7}$  によって張られる ( $\{li, lj, lk\}$  も虚数単位であるとする). このとき,  $\{1, e_A\}$  の 1 次独立性により, 一般性を失うことなく,  $\{e_A\}$  は互いに反可換になることが示され, それを満たすため,  $l$  と  $\{i, j, k\}$  の間の積で 3 つあるいは 4 つの虚数単位を含むものは結合則と非結合則の混合である準結合則 (quasi-associativity)[3] を満たさねばならないことがわかる. その結果, 交代性を満たす組成代数である八元数が導かれる.

## 4.2 三元数の非存在と四元数

この節では, 前節で述べた, Hamilton による, 三元数から四元数への飛躍について, 代数計算を追加してやや詳しく説明する.

空間ベクトル  $(x, y, z)$  に対応する三元数 (triplet) は, 複素数の拡張として,

$$x + iy + jz \quad (4.2.1)$$

と表わされる. 但し  $x, y, z$  は実数で, 虚数単位  $\{i, j\}$  ( $i^2 = j^2 = -1$ ) は実数と可換とする. また, 実数の乘法に関する単位元を 1 とすれば,  $\{1, i, j\}$  は互いに 1 次独立であると仮定する. 三元数の相等・和は

$$x + iy + jz = x' + iy' + jz' \rightarrow x = x', y = y', z = z' \quad (4.2.2a)$$

$$(x + iy + jz) + (x' + iy' + jz') = (x + x') + i(y + y') + j(z + z') \quad (4.2.2b)$$

で定義されるが, 積は, 項別の掛け算をすることにより,

$$(x + iy + jz)(x' + iy' + jz') = (xx' - yy' - zz') + i(xy' + yx') + j(xz' + zx') + ij(yz') + ji(zy') \quad (4.2.2c)$$

で与えられるとする. それ故, 前節で述べたように, もし  $ij, ji$  が  $\{1, i, j\}$  で表されなければ, 三元数は積のもとで閉じていない. 初め, Hamilton は  $ij = ji = 0$  の場合も考えたと言うが, 次には,  $ij, ji$  の項を残したまま, それらが旨く消える組み合わせを考えた.

まず, 同じ三元数の積は

$$(x + iy + jz)^2 = (x^2 - y^2 - z^2) + 2ixy + 2jxz + (ij + ji)yz \quad (4.2.2d)$$

となる. 空間ベクトルと三元数の幾何学的関係から, 最後の項は消えなくてはならない. なぜなら, 三元数  $x + iy + jz$  に対応するベクトルの長さの自乗の平方は  $(x^2 + y^2 + z^2)^2 = (x^2 - y^2 - z^2)^2 + (2xy)^2 + (2xz)^2$  で与えられねばならないが, この右辺は丁度, (4.2.2d) の最後の項を落としたときの三元数に対応するベクトルの長さの自乗である. つまり, ベクトルの長さの比較という点で, (4.2.2d) の最後の項は邪魔になるのである.

それを落とせば、偏角も比較できて丁度 2 倍になる。Hamilton は、 $ij = ji = 0$  とするのは考えにくいとし、 $\{i, j\}$  が反可換

$$ij + ji = 0 \quad (4.2.2e)$$

とすれば、(4.2.2d) の最後の項が消えることに気付いた。このとき、(4.2.2c) は

$$(x + iy + jz)(x' + iy' + jz') = (xx' - yy' - zz') + i(xy' + yx') + j(xz' + zx') + ij(yz' - zy') \quad (4.2.2f)$$

に移行する。以降、三元数の積と言えば、この式を言うことにする。(4.2.2f) によれば、特に、 $y = y', z = z'$  の時でも、 $ij$  の項が消える。

$$(x + iy + jz)(x' + iy + jz) = (xx' - y^2 - z^2) + i(x + x')y + j(x + x')z \quad (4.2.3a)$$

この場合の三元数と複素数に対応する平面ベクトルとの対応関係を次に見よう。点  $(x, y, z)$  を表す三元数  $x + iy + jz$  は 3 次元空間の位置ベクトルに対応するが、それと、実部だけ異なるもう 1 つの三元数  $x' + iy + jz$  は  $x$ - 軸を含む同一平面内にある位置ベクトルに対応する。その平面内に  $x$ - 軸を 90 度だけ時計とは逆向きに回転して得られる直交軸を取る。元の  $x$ - 軸とこの直交軸の作る平面を複素平面とみなすと、 $x + iy + jz = x + mu$ ,  $x' + iy + jz = x' + mu$ ,  $m^2 = -1$ ,  $u \in \mathbb{R}$  とおける。実際、(4.2.2e) のため、 $u^2 = y^2 + z^2 \geq 0$ 。それ故、ベクトルの長さも変わらない： $r^2 = x^2 + y^2 + z^2 = x^2 + u^2$ ,  $r'^2 = x'^2 + y^2 + z^2 = x'^2 + u^2$ 。その結果、考えている三元数の積は  $(x + iy + jz)(x' + iy + jz) = (x + mu)(x' + mu) = (re^{m\theta_1})(r'e^{m\theta_2}) = rr'e^{m(\theta_1 + \theta_2)}$  で与えられる。一方、 $(x + iy + jz)(x' + iy + jz) = Re^{m\theta}$ ,  $R = rr'$ ,  $\theta = \theta_1 + \theta_2$ , は位置ベクトル  $(xx' - y^2 - z^2, (x + x')y, (x + x')z)$  に対応する。ただし、

$$R^2 = (xx' - y^2 - z^2)^2 + [(x + x')y]^2 + [(x + x')z]^2 = (x^2 + y^2 + z^2)(x'^2 + y^2 + z^2) = r^2 r'^2 \quad (4.2.3b)$$

は確かに成り立つ。また、偏角の関係  $\theta = \theta_1 + \theta_2$  は

$$\tan \theta = (x + x')\sqrt{y^2 + z^2}/(xx' - y^2 - z^2), \quad \tan \theta_1 = \sqrt{y^2 + z^2}/x, \quad \tan \theta_2 = \sqrt{y^2 + z^2}/x' \quad (4.2.3c)$$

から確かめられる ( $\theta_{1,2} \in [0, 2\pi)$  なので、 $\theta_1 + \theta_2$  は  $2\pi$  を超えることがあり得るが、 $4\pi$  は超えない。一方、 $\theta$  と  $\theta + 2\pi$  は同じと見なせるので、 $\theta = \theta_1 + \theta_2 \in [0, 2\pi)$  となる)。

結合則を仮定すれば、積  $ij$  は  $\{1, i, j\}$  で書けないことが簡単に証明できる。あらかじめ結合則を仮定しないで、この独立性を見抜いた Hamilton の議論は後で説明する。この独立性ため、一般に異なる三元数の積 (4.2.2f) はもはや三元数でない。

第 1 節でも述べたが、Hamilton が見出した反可換性 (4.2.2e) は、19 世紀前半までの代数学の常識を覆したものである。後ほど Dickson[2] に従って、代数的な方法で、(4.2.2e) は一般性を失うことなく成り立つことを見る。それ故、以降、(4.2.2e) は (4.2.6) を含む文節までは、断りなく使うことにする。(4.2.2f) の最後の項があるため、三元数は積のもとで閉じていないと言ったが、組成法則

$$|(x + iy + jz)(x' + iy' + jz')|^2 = |x + iy + jz|^2 |x' + iy' + jz'|^2 \quad (4.2.4)$$

は成り立つ。ここで、三元数の共役

$$\overline{x + iy + jz} = x - iy - jz \quad (4.2.5a)$$

から、三元数のノルムの自乗は

$$|x + iy + jz|^2 = (x + iy + jz)\overline{(x + iy + jz)} = x^2 + y^2 + z^2 \quad (4.2.5b)$$

で与えられる。また，三元数（や四元数・五元数・八元数）の積の共役は積の順序が逆転する：

$$\begin{aligned}
 \overline{(x + iy + jz)(x' + iy' + jz')} &= \overline{(xx' - yy' - zz') + i(xy' + yx') + j(xz' + zx') + ij(yz' - zy')} \\
 &= (xx' - yy' - zz') - i(xy' + yx') - j(xz' + zx') - ij(yz' - zy') \\
 &= \overline{(x' + iy' + jz')} \overline{(x + iy + jz)}
 \end{aligned} \tag{4.2.5c}$$

以下，(4.2.4) に類する式を組成法則というが，(4.2.4) の左辺は 4 平方和であるに対し，右辺は 3 平方和の積である。結合則を仮定すれば，(4.2.2e) から  $\{i, j, ij\}$  は互いに反可換な虚数単位になることを使い，具体的に書けば，

$$(xx' - yy' - zz')^2 + (xy' + yx')^2 + (xz' + zx')^2 + (yz' - zy')^2 = (x^2 + y^2 + z^2)(x'^2 + y'^2 + z'^2) \tag{4.2.6}$$

となる（ここで，結合則を仮定したと言ったが，Hamilton のオリジナルな推論 [1] では，結合則には触れずに，等式 (4.2.6) の左辺を与える (4.2.4) の左辺はその絶対値の中味にある三元数の積に現れる  $\{1, i, j, ij\}$  の係数の平方和とみなしている。これは  $k = ij$  が  $\{1, i, j\}$  と独立であることを意味する。特に， $k$  は実数ではない。もし実数だとすれば， $\{1, i, j\}$  と独立にはならない。(4.2.6) が成り立つことから，3 次元ではなく，4 次元の空間を考えるべきだと言う，この洞察が (4.2.2e) に続く第 2 の飛躍であった。そして， $k = ij$  の値を「絶対値の法則」で決めるという第 3 の飛躍に進んだ。(4.2.6) は「3 平方和の定理」が成り立たないことを示す具体例<sup>21</sup> である（「 $n$  平方和の定理」は  $n = 1, 2, 4, 8$  の時のみ成り立つと言う Hurwitz の定理がある）。明らかに， $ij$  が  $\{1, i, j\}$  で表せない限り，三元数は積のもとで閉じていない。つまり，三元数は代数を張らない。なお， $\mathbf{a} = x + iy + jz$  の逆は， $\mathbf{a} \neq 0$  のとき， $\mathbf{a}^{-1} = \bar{\mathbf{a}}/|\mathbf{a}|^2$ ， $|\mathbf{a}|^2 = x^2 + y^2 + z^2$  で与えられる。また， $\mathbf{a}, \mathbf{b}$  を（逆を持つ）任意の三元数としたとき，方程式  $\mathbf{a}\mathbf{x} = \mathbf{b}$ ， $\mathbf{y}\mathbf{a} = \mathbf{b}$  を満たす  $\mathbf{x}, \mathbf{y}$  は一般に三元数の範囲で解を持たない。即ち，三元数は可除的な代数でない。

次に，(4.2.2e) が一般性を失うことなく成り立つことを代数的に見よう。いま，三元数の実部の自乗は非負 ( $x^2 \geq 0$ ) であるが，虚部の自乗が実数であるとするれば，非正である。<sup>22</sup> すなわち，

$$(iy + jz)^2 \leq 0 \tag{4.2.7}$$

が成り立つ。なぜなら，もし  $(iy + jz)^2 > 0$  なら，ゼロでないある実数  $w$  が存在して， $w^2 = (iy + jz)^2$  と書ける。この式を変形して，虚数単位は実数と可換であることを使うと， $w^2 - (iy + jz)^2 = [w - (iy + jz)][w + (iy + jz)] = 0$  となるが，これから， $w = \pm(iy + jz)$  のいずれかが成り立たねばならない。ところがこれは基底  $\{1, i, j\}$  が 1 次独立であるという仮定に反する。もちろん，(4.2.7) が成り立つためには，その左辺が実数になることが必要である。そのためには， $ij + ji$  が実数であればよいが，これは，三元数のノルムの自乗 ((4.2.5b) と違って， $i, j$  の公差項を残す)

$$|x + iy + jz|^2 = (x + iy + jz)\overline{(x + iy + jz)} = x^2 + y^2 + z^2 - (ij + ji)yz \tag{4.2.8}$$

が実数であることからわかる。

ところで，(4.2.7) において，等号が成り立つのは， $iy + jz = 0$  のときのみであるが， $\{i, j\}$  は独立なので， $y = z = 0$  でなければならない。従って，特に，

$$(i \pm j)^2 < 0 \tag{4.2.9}$$

である。その結果， $\alpha$  を絶対値が 1 より小さい実数として，

$$ij + ji = 2\alpha, \quad -1 < \alpha < 1 \tag{4.2.10}$$

<sup>21</sup>(4.2.6) の特別な場合として， $(1^2 + 1^2 + 1^2)(4^2 + 2^2 + 1^2) = 1^2 + 6^2 + 5^2 + 1^2 = 63$  がある。しかし， $63 = 8 \cdot 7 + 7$  は決して，3 平方和に書けないことがわかっている [4]。

<sup>22</sup>これから先の議論 ( $k^2 = -1$  にまつわる，Hamilton のオリジナルな推論の簡単な紹介の部分を除いて) は文献 [3] の八元数に関する部分 (行列表示は除く) に焦点を合わせ詳しい計算を追加したもの。

が成り立つ。実際、 $(i \pm j)^2 < 0 \rightarrow -2 \pm (ij + ji) < 0$  なので、 $ij + ji = 2\alpha$  と置けば、 $-2 \pm 2\alpha < 0$  故、 $\alpha$  は実数 ( $\alpha \in \mathbb{R}$ ) で、 $|\alpha| < 1$  を満たす。同じ結論を Dickson は別の方法で導いている [2]。

$\alpha = 0$  の場合は  $\{i, j\}$  は既に反可換なので、以下、 $\alpha \neq 0$  とする。そこで、 $a, b$  を実数として、

$$\begin{pmatrix} I \\ J \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ a & b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} i \\ j \end{pmatrix} \quad (4.2.11a)$$

$$I^2 = J^2 = -1, \quad IJ + JI = 0 \quad (4.2.11b)$$

とおく。  $I^2 = i^2 = -1$  は明らかであるが、(4.2.11b) の残りの 2 つの方程式から、 $a, b$  は共通の符号を除いて、一意的に決まる。この解  $a = \pm\alpha/\sqrt{1-\alpha^2}, b = \pm 1/\sqrt{1-\alpha^2}$  (複合同順) は (代数学における) Frobenius の定理を証明する際、Dickson[2] が与えている。(4.2.11a) から、

$$iy + jz = (i, j) \begin{pmatrix} y \\ z \end{pmatrix} = (I, J) \begin{pmatrix} 1 & -a/b \\ 0 & 1/b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y \\ z \end{pmatrix} \equiv (I, J) \begin{pmatrix} y' \\ z' \end{pmatrix} = Iy' + Jz'$$

となるので、元の三元数 (4.2.1) は

$$x + iy + jz = x + Iy' + Jz', \quad x, y, z, y', z' \in \mathbb{R} \quad (4.2.12)$$

と書き直せる。従って、 $x + Iy' + Jz'$  を改めて  $x + iy + jz$  と書き直せば、一般に (4.2.2e) が成り立つのである。

以上から、(4.2.1) に現れる虚数単位は初めから反可換 (4.2.2e) と仮定して、一般性を失わない。(4.2.2e) を仮定として出発し、3次元ではなく4次元への更なる拡張の必要性を見て取った Hamilton は、次に、下の (4.2.13) 式で表される「絶対値の法則」が成り立つためには、 $k = ij$  は新しい虚数単位 ( $k^2 = -1$ ) でなければならないことを証明した (この証明 [1] を読めば、Hamilton があらゆる可能性を調べ尽くしたうえで、如何に正解に到達し得たかがわかる)。積のもとで閉じることと「絶対値の法則」を用いた Hamilton のオリジナルな推論 [1] は、有名な公式  $i^2 = j^2 = k^2 = ijk = -1$  に導いた。これから、 $k = ij = -ji, j = ki = -ik, i = jk = -kj$  が得られる。それ故、 $\{i, j, k\}$  は互いに反可換な虚数単位で、結合則が成り立つ。例えば、 $k^2 = (ij)^2 = i(ji)ij = -i^2j^2 = -1$  など (Hamilton は  $k^2 = -1$  を結合則を仮定して導いたのではなく、「絶対値の法則」から得た)。これが、Hamilton による第 3 の最終的な飛躍であった。即ち、この結果が結合則と「絶対値の法則」を満たす Hamilton の非可換な四元数を与える。従って、独立な虚数単位が 2 つ  $\{i, j\}$  の場合、積のもとで閉じた代数を作るには、 $\{i, j, k = ij\}$  を 1 次独立な虚数単位と考えねばならないことが分かる。Hamilton の四元数に対する組成法則

$$|(x + iy + jz + kw)(x' + iy' + jz' + kw')|^2 = |(x + iy + jz + kw)|^2 |(x' + iy' + jz' + kw')|^2 \quad (4.2.13)$$

は「4 平方和の定理」となる。(4.2.4) は (4.2.13) で  $w = w' = 0$  と置いた (退化した四元数 [1]) の場合に相当する。

### 4.3 Frobenius の定理と非結合的な五元数

(代数学における) Frobenius の定理によれば、実数体上の線形で結合的な可除多元環 (可除的な代数) は実数体  $\mathbb{R}$ 、複素数体  $\mathbb{C}$ 、および、四元数体  $\mathbb{H}$  に限られる。この定理は代数学の本に広く紹介されているが、 $\mathbb{R}, \mathbb{C}$  については言うまでもないので、ここでは、 $\mathbb{H}$  に焦点を当て、文献 [3] に従い、次のような道歩もう。

Hamilton の虚数単位  $\{i, j, k\}$  に独立な虚数単位  $l$  は結合則を仮定する限り存在しないことを証明すれば、Frobenius の定理の証明になっていると考える。もし、そのような  $l$  が存在するとすれば 4.2 で見たように、 $(i \pm l)^2 < 0, (j \pm l)^2 < 0, (k \pm l)^2 < 0$  が成り立つので、次式が得られる。

$$il + li = 2a, \quad jl + lj = 2b, \quad kl + lk = 2c, \quad a, b, c \in \mathbb{R}, \quad |a|, |b|, |c| < 1 \quad (4.3.1)$$

ところが, 4.2 と類似の議論によって,  $a, b, c$  は一般性を失うことなくゼロに出来る. すなわち, 今, 実線形変換

$$\begin{pmatrix} i \\ j \\ k \\ L \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ \alpha & \beta & \gamma & \delta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} i \\ j \\ k \\ l \end{pmatrix} \quad (4.3.2a)$$

を次の条件

$$L^2 = -1, Li + iL = Lj + jL = Lk + kL = 0 \quad (4.3.2b)$$

のもとで探す. この 4 つの条件は 4 つの実数の未知数,  $\alpha, \beta, \gamma, \delta$  を符号を除いて一意的に決める (具体的な証明は, 文献 [3] の補遺 B で与えた). それ故, (4.3.2b) で,  $L \rightarrow l$  と置き換えれば, 一般性を失うことなく

$$\begin{cases} i^2 = j^2 = k^2 = ijk = l^2 = -1 \\ ij + ji = jk + kj = ki + ik = 0 \\ il + li = jl + lj = kl + lk = 0 \end{cases} \quad (4.3.3)$$

と置ける (ここで, Hamilton の虚数単位の定義も復習した).

次に, 結合則を仮定すれば,

$$lk = l(ij) = (li)j = -(il)j = -i(lj) = i(jl) = (ij)l = kl \quad (4.3.4)$$

となり, 元々  $lk + kl = 0$  だったから,  $kl = -kl \rightarrow 2kl = 0$  が得られ, さらに, 可除性を仮定すれば  $k \neq 0$  故,  $l = 0$  となる<sup>23</sup>( $li, lj$  を用いても同じ). つまり, 結合則と可除性を仮定すれば, Hamilton の虚数単位  $\{i, j, k\}$  に独立な虚数単位は存在し得ない. 即ち,  $\mathbb{H}$  より次元の大きな, 線形で可除的な結合的代数は存在しない.

しかし, 結合則を特定のパターンで破れば, 四元数を上記の方法で拡大して, 結合的ではない五元数 (quintuplet) を得る. 上で述べたように,  $\{i, j, k\}$  と反可換な虚数単位  $l$  の存在を許すためには, 積の結合則を諦めねばならない. では, どのような形で, 積の結合則を破るのが望ましいか, そのヒントは (4.3.4) の変形に見られる. つまり, (4.3.4) の代わりに, 次のような計算をすれば,  $lk = 0$  という結論は避けられる.

$$lk = l(ij) = (lj)i = -(jl)i = j(li) = -j(il) = -(ij)l = -kl \quad (4.3.5a)$$

この式は,  $k, l$  の反可換性を再度導いているに過ぎない. 従って, 確かに  $l = 0$  と言う結論は避けられるが, (4.3.5a) の変形では, 2, 4, 6 番目の等式が結合則を破っていることに注意されたい. けれども, 単位元は  $l$  と可換でなければならないから, 例えば,

$$l(ii) = (li)i = -(il)i = -i(li) = i(il) = (ii)l \quad (4.3.5b)$$

と言う計算により,  $i^2 = -1$  は新しい虚数単位  $l$  と交換することを保証しなければならない<sup>24</sup>. このように, 特定のパターンで, 結合則を破れば, 互いに反可換な虚数単位は  $\{i, j, k, l\}$  の 4 つに増え,  $\{1, i, j, k, l\}$  を基底とする非結合的な五元数が得られるが, 代数は定義により, 積のもとで閉じていなければならないから,  $\{li, lj, lk\}$  も独立な虚数単位の仲間に入れてやる必要がある. それ故, これから定義しようとしている超複素数の次元は,

<sup>23</sup> $l$  が  $\{i, j, k\}$  と反可換になること, 及び,  $2kl = 0$  は許されないことは, 文献 [5] でより厳密な代数的方法で証明されている. なお,  $a, b, c$  が実であるということだけ使って, 結合則を仮定すれば,

$$lk = l(ij) = (li)j = (2a - il)j = 2aj - i(lj) = 2aj - i(2b - jl) = 2aj - 2bi + kl \rightarrow l = -ai - bj - ck$$

に導かれ,  $l$  は  $\{i, j, k\}$  と 1 次従属になる. これが Dickson[2] による Frobenius の定理の証明. ここで,  $a = b = c = 0$  と置けば, テキストの結論  $l = 0$  と一致する.

<sup>24</sup>(4.3.5) には符号の任意性があるように見える. 例えば, (4.3.5a) を  $l(ij) = -(lj)i = (jl)i = -j(li) = j(il) = -(ij)l$  と変えたとき, (4.3.5b) は  $l(ii) = -(li)i = (il)i = i(li) = -i(il) = (ii)l$  とすれば, 同じ結論が生まれるように出来る. しかし, この場合,  $(li)j - l(ij) = -l(ji + ij)$  は  $i \leftrightarrow j$  の入れ替えの元で符号が代わらず, 特に,  $(li)i - l(ii) \neq 0$  になる. これは, 次節で述べる交代性を破るので, この段階で, 排除される.

$1 + (3 + 1 + 3) = 8$  となり, 丁度八元数の次元と同じになる. このようにして, 8次元の超複素数, 八元数を導くためには, 7つの独立な虚数単位  $\{i, j, k, li, lj, lk, l\} = \{e_A\}_{A=1,2,\dots,7}$  が互いに反可換でなくてはならない. それは,  $\{1, e_A\}_{A=1,2,\dots,7}$  が 1次独立であることから来る結果である. 証明は補遺に回した.

次節に移る前に, 非結合的な五元数の性質の 1つを述べておく. 五元数を

$$\chi = x_0 + e_i x_i + l x_4, \quad \eta = y_0 + e_i y_i + l y_4, \quad x_0, x_4, y_0, y_4, x_i, y_i (i = 1, 2, 3) \in \mathbb{R} \quad (4.3.6a)$$

と置く. ここで,  $(1, i, j, k) = (1, e_1, e_2, e_3)$  として, この式および以下の式で Einstein の和の規約を使えるようにした.  $\chi\eta$  は  $e_i l = -l e_i$  の項を持つので, 最早, 五元数には治まっていない. けれども, 組成法則

$$|\chi\eta|^2 = |\chi|^2 |\eta|^2 \quad (4.3.6b)$$

は成り立つ. なお,  $\chi$  の共役は  $\bar{\chi} = x_0 - e_i x_i - l x_4$  であるが, そのノルムの自乗は (4.3.3) から

$$|\chi|^2 = \chi\bar{\chi} = \bar{\chi}\chi = x_0^2 + x_i^2 + x_4^2 \quad (4.3.6c)$$

で与えられる ( $\eta$  に対しても同様). (4.3.6b) の証明の際, (4.3.3) の他に, 次節で本格的に定義される準結合則により証明出来る (4.4.3b) (の最初の式は (4.3.3) に含まれる) および (4.4.4b) を使った. あるいは,  $\chi\eta$  に現れる,  $\{1, e_i, l e_i, l\}$  の係数の平方和として求めたと言う方が分かり易い. 即ち,  $\{1, e_i, l e_i, l\}$  を独立とみなしており, 三元数の場合の (4.2.4) の左辺を計算する Hamilton の方法の一般化である. 具体的な表式は

$$\begin{aligned} & (x_0 y_0 - x_i y_i - x_4 y_4)^2 + (x_0 y_i + x_i y_0 + \epsilon_{ijk} x_j y_k)^2 \\ & + (x_i y_4 - x_4 y_i)^2 + (x_0 y_4 + x_4 y_0)^2 = (x_0^2 + x_i^2 + x_4^2)(y_0^2 + y_i^2 + y_4^2) \end{aligned} \quad (4.3.6d)$$

となる. (4.3.6b)=(4.3.6d) の左辺は, 8平方和, 右辺は5平方和の積なので, これは, 「5平方和の定理」が成り立たない例になっている. このように五元数は可除的な代数として存在しないが,  $\{li, lj, lk\}$  を  $\{i, j, k\}$  と独立な虚数単位に加えることにより積のもとで閉じた代数を定義し, (4.3.6b) が, 「8平方和の定理」に格上げされることを見る.

## 4.4 準結合則と八元数

ところで, 補遺で証明される,  $\{e_A\}_{A=1,2,\dots,7}$  の反可換性を保証するには, 結合則と非結合性を適当に組んだ計算のルールを確立する必要がある.

新たに生まれた虚数単位を次のように置く.

$$(li, lj, lk) \equiv (E_1, E_2, E_3) \rightarrow (il, jl, kl) \equiv (-E_1, -E_2, -E_3) \quad (4.4.1a)$$

このとき,  $E_i (i = 1, 2, 3)$  が純虚であることを保証するには, 次の結合則を仮定する必要がある.

$$E_i(-E_i) = (l e_i)(e_i l) = l(e_i e_i)l = -l^2 = 1 \rightarrow E_i^2 = -1 \quad (\text{添え字 } i \text{ については和を取らない}) \quad (4.4.1b)$$

(4.4.1b) と (4.3.5a),(4.3.5b) の違いは, 積に含まれる  $l$  の個数であるから, 新しい計算規則を次のように置く

$(i, j, k = 1, 2, 3)$ :

積の中に含まれる  $l$  の個数が 1 つの時には

$$\begin{cases} (le_i)e_j = l(e_j e_i) \\ e_i(e_j l) = (e_j e_i)l \end{cases} \quad (4.4.2a)$$

積の中に 2 個の  $l$  が含まれる時には

$$\begin{cases} l(le_j) = l^2 e_j = -e_j, & (e_j l)l = e_j l^2 = -e_j \\ (le_i)(e_j l) = l(e_i e_j)l = l(-\delta_{ij} + \epsilon_{ijk} e_k)l = +\delta_{ij} + \epsilon_{ijk} e_k = -e_j e_i \end{cases} \quad (4.4.2b)$$

この計算ルールは (4.4.2a) の  $i = j$  のケースと (4.4.2b) では結合則を満たし, (4.4.2a) の  $i \neq j$  ケースは結合則を破っていて, 結合則と非結合則が共存しているので, 以下, この計算ルールを準結合則 [3] と呼ぶことにする.

7 つの虚数単位  $\{e_1, e_2, e_3, E_1, E_2, E_3, l\}$  は, 互いに反可換でなければならない (補遺参照).

$$e_i e_j + e_j e_i = E_i E_j + E_j E_i = 0 \quad (i \neq j) \quad (4.4.3a)$$

$$l e_i + e_i l = l E_i + E_i l = e_i E_j + E_j e_i = 0 \quad (4.4.3b)$$

(4.4.3a) は Hamilton の積法則

$$e_i e_j = -\delta_{ij} + \epsilon_{ijk} e_k \quad (4.4.4a)$$

と, 結合則 (4.4.2b) により,

$$E_i E_j = (le_i)(le_j) = -(le_i)(e_j l) = -l(e_i e_j)l = e_j e_i \quad (4.4.4b)$$

が成り立つので, 満たされる. (4.4.3b) の最初の式は (4.3.3) の 3 列目の式で, 準結合則 (4.4.2a) により ( $l = e_7$ )

$$e_i E_j = e_i (le_j) = -e_i (e_j l) = -(e_j e_i)l = -(-\delta_{ji} + \epsilon_{jik} e_k)l = \delta_{ij} e_7 - \epsilon_{ijk} E_k \quad (4.4.4c)$$

$$E_j e_i = (le_j)e_i = l(e_i e_j) = l(-\delta_{ij} + \epsilon_{ijk} e_k) = -\delta_{ij} e_7 + \epsilon_{ijk} E_k \quad (4.4.4d)$$

が得られるから, (4.4.3b) の最後の式が得られる<sup>25</sup>. また, (4.4.2b) から

$$\begin{cases} E_i l = (le_i)l = -(e_i l)l = e_i \rightarrow E_i e_7 = e_i \\ -l E_i = -l(le_i) = e_i \rightarrow e_7 E_i = -e_i \end{cases} \quad (4.4.4e)$$

が導けるから, (4.4.3b) の真ん中の式も証明された. その結果, 準結合則 (4.4.2a),(4.4.2b) により, 虚数単位の反可換性 (4.4.3) が証明された.

さらに, 準結合則 (4.4.2a),(4.4.2b) は反可換性 (4.4.3) を導くだけでなく, 八元数の代数構造も決めている. 即ち,  $\{1, e_i, E_i = e_7 e_i, e_7 = l\}_{i=1,2,3}$  は, (4.4.4a)~(4.4.4e) を乗積表とする八元数の基底になっている. 乗積表 (4.4.4a)~(4.4.4e) を, よく知られた記号  $\{1, e_i, E_i = e_7 e_i = e_{3+i}, e_7\}_{i=1,2,3} \equiv \{e_0, e_A\}_{A=1,2,\dots,7}$  を使って

<sup>25</sup>(4.3.5a) の 4 番目の式  $-(jl)i = j(li)$  は  $E_j e_i = e_j E_i$  ( $i \neq j$ ) を要求するが, これは, (4.4.4c), (4.4.4d) によって満たされている. 同様に, (4.3.5b) の 3 番目の式  $-(il)i = -i(li) \rightarrow E_i e_i = -e_i E_i$  も.

まとめると、次の積法則が得られる.

$$\begin{aligned}
e_0^2 &= e_0 \\
e_0 e_A &= e_A e_0 \\
e_A e_B &= -\delta_{AB} e_0 + a_{ABC} e_C \\
a_{ABC} &\text{は添字 } (A, B, C) \text{ に関して完全反対称で,} \\
&\text{次の添え字の組に対して } +1, \text{ 他の組に対して, } 0 \text{ の値を取る} \\
(A, B, C) &= (123), (147), (165), (257), (246), (367), (354)
\end{aligned} \tag{4.4.4f}$$

そして,

$$\left\{ \begin{array}{l} e_i(e_j e_k) + e_j(e_i e_k) = -2\delta_{ij} e_k \\ e_i(e_j E_k) + e_j(e_i E_k) = -2\delta_{ij} E_k \\ E_i(E_j e_k) + E_j(E_i e_k) = -2\delta_{ij} e_k \\ E_i(E_j E_k) + E_j(E_i E_k) = -2\delta_{ij} E_k \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} e_i(e_j l) + e_j(e_i l) = -2\delta_{ij} l \\ E_i(E_j l) + E_j(E_i l) = -2\delta_{ij} l \\ l(l e_i) + l(l e_i) = -2e_i \\ l(l E_i) + l(l E_i) = -2E_i \end{array} \right. \tag{4.4.5a}$$

が, 公式

$$\epsilon_{ijk} \epsilon_{ilm} = \delta_{jl} \delta_{km} - \delta_{jm} \delta_{kl} \tag{4.4.5b}$$

を使って示される. (4.4.5a) に載っていない他の組み合わせ, 例えば,  $E_i(e_j e_k) + e_j(E_i e_k)$  などはすべてゼロになる. (4.4.5a) は, ゼロになる他の組み合わせと一緒にして, 次式 [6] を与える.

$$e_A(e_B e_C) + e_B(e_A e_C) = -2\delta_{AB} e_C \tag{4.4.5c}$$

任意の八元数は一般に

$$X = x_0 + e_i x_i + E_i x_{3+i} + l x_7 \equiv x_0 + e_A x_A, \quad x_0, x_A \quad (A = 1, 2, \dots, 7) \in \mathbb{R} \tag{4.4.6a}$$

とかけるが, その実部, 共役, および, ノルムの自乗は

$$\text{Re } X = x_0, \quad \bar{X} = x_0 - e_A x_A, \quad e_A x_A = X - x_0 = x_0 - \bar{X}, \quad \overline{XY} = \bar{Y} \bar{X}, \quad |X|^2 = \bar{X} X = X \bar{X} = x_0^2 + x_A^2$$

で与えられる. 特に,  $\overline{e_A e_B} = \bar{e}_B \bar{e}_A = (-e_B)(-e_A) = e_B e_A$  であるから, (4.4.5c) の共役を取って,  $C \leftrightarrow A$  と置き換えれば,

$$(e_A e_B) e_C + (e_A e_C) e_B = -2\delta_{BC} e_A \tag{4.4.6b}$$

を得る. (4.4.5c) に  $x_A x_B y_C$  を掛け, また, (4.4.6b) に  $x_A y_B y_C$  を掛けて,  $A, B, C$  について和を取ると, 八元数の交代性

$$X^2 Y = X(XY), \quad (XY)Y = XY^2 \tag{4.4.7}$$

が導かれる. 結合子

$$(X, Y, Z) = (XY)Z - X(YZ) \tag{4.4.8}$$

を用いて, (4.4.7) を書き直せば,

$$(X, X, Y) = (X, Y, Y) = 0 \tag{4.4.9a}$$

となる. この第 2 式で,  $Y \rightarrow X + Y$  と置き代えて, (4.4.9a) を使えば,

$$(X, Y, X) = 0 \tag{4.4.9b}$$

を得る. この polarization の方法を (4.4.9a),(4.4.9b) で利用すれば, 一般に結合子の交代性が導かれる.

$$(X, Y, Z) = (Y, Z, X) = (Z, X, Y) = -(Y, X, Z) = -(Z, Y, X) = -(X, Z, Y) \quad (4.4.9c)$$

さらに,  $(X, X, Y) = -(\bar{X}, X, Y) = 0$  を使えば,

$$\bar{X}(XY) = |X|^2 Y \quad (4.4.10)$$

が得られる. それ故, もし,

$$\operatorname{Re}[(XY)Z] = \operatorname{Re}[X(YZ)] \quad (4.4.11)$$

が成り立てば, これから, 組成法則

$$|XY|^2 = \operatorname{Re}[\overline{XY}(XY)] = \operatorname{Re}[(\bar{Y}\bar{X})(XY)] = \operatorname{Re}[\bar{Y}(\bar{X}(XY))] = |X|^2|Y|^2 \quad (4.4.12)$$

が導かれることになる. ところが, (4.4.11) は結合子  $(e_A, e_B, e_C)$  が純八元数であることを意味する:

$$\overline{(e_A, e_B, e_C)} = -(e_A, e_B, e_C) \longrightarrow \operatorname{Re}(e_A, e_B, e_C) = 0 \quad (4.4.13)$$

これは, (4.4.4f) から容易に示せるが, 今の文脈でこれを確かめるには, 次のような計算も必要になる.

$$\left\{ \begin{array}{l} (e_i, e_j, e_k) = 0 \\ (e_i, e_j, E_k) = 2\delta_{jk}E_i - 2\delta_{ik}E_j + 2\epsilon_{ijk}l \\ (e_i, E_j, E_k) = -2\delta_{ij}e_k + 2\delta_{ik}e_j \\ (E_i, E_j, E_k) = -2\epsilon_{ijk}l \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} (l, e_i, e_j) = -2\epsilon_{ijk}E_k \\ (l, e_i, E_j) = -2\epsilon_{ijk}e_k \\ (l, l, e_i) = (l, l, E_i) = 0 \\ (l, l, l) = 0 \end{array} \right. \quad (4.4.14)$$

これに,  $(e_A, e_B, e_C)$  が  $(ABC)$  について, 完全反対称であるという, 交代性を確かめて, (4.4.13) の成り立つ事がわかる (実際, 虚数単位に対する交代性は直接示す事も出来る, つまり, (4.4.9a) は (4.4.5c), (4.4.6b) に基づかなくても (4.4.4) からの直接証明も出来ることに注意しておく). 以上から, 準結合則によって, 八元数の交代性と組成法則が示されたことになる (組成法則は交代性から polarization の方法で導くことも出来る).

このようにして, 八元数を非結合的な五元数の非存在から, 準結合則を用いて, 手数を踏んで導いたが, これは, Cayley-Dickson の二重化法に導く. 実際,

$$X = x_0 + x_A e_A = x_0 + x_i e_i + x_{3+i}(e_7 e_i) + x_7 e_7 = q + e_7 Q, \quad q = x_0 + x_i e_i, \quad Q = x_7 + x_{3+i} e_i \in \mathbb{H} \quad (4.4.15a)$$

$$Y = y_0 + y_A e_A = y_0 + y_i e_i + y_{3+i}(e_7 e_i) + y_7 e_7 = p + e_7 P, \quad p = y_0 + y_i e_i, \quad P = y_7 + y_{3+i} e_i \in \mathbb{H} \quad (4.4.15b)$$

とにおいて, 八元数  $X, Y$  の積が

$$XY = (q + e_7 Q)(p + e_7 P) = qp + (e_7 Q)p + q(e_7 P) + (e_7 Q)(e_7 P) = qp - P\bar{Q} + e_7(\bar{q}P + pQ) \quad (4.4.15c)$$

を満たすことが準結合則 (4.4.2a),(4.4.2b) を用いて示せる [3]. (4.4.15a),(4.4.15b) に基づく八元数の積法則 (4.4.15c) は Cayley-Dickson の 2 重化法に他ならないが, その形は, 組成法則を用いても導ける [7] し, 交代性を用いても導ける [8]. この節では, 同じ積法則が虚数単位  $\{e_A\}_{A=1,2,\dots,7}$  に対する反可換性を保証する準結合則によっても導ける [3] ことを改めて説明して来た. そのため, 計算が冗長になった嫌いはあるが, 八元数の存在が Frobenius の定理を回避する簡単な方法に基づくことが明らかになった.

## 4.5 8 平方和の定理

八元数およびその共役及びノルム (の自乗) の定義により,

$$\left\{ \begin{array}{l} |X|^2 = x_0^2 + x_A^2, |Y|^2 = y_0^2 + y_A^2 \\ XY = (x_0 + e_A x_A)(y_0 + e_B y_B) = x_0 y_0 + (x_0 y_C + y_0 x_C) e_C + (e_A e_B) x_A y_B \\ \quad = x_0 y_0 - x_A y_A + (x_0 y_C + y_0 x_C + a_{ABC} x_A y_B) e_C \\ \overline{XY} = x_0 y_0 - x_A y_A - (x_0 y_C + y_0 x_C + a_{ABC} x_A y_B) e_C \\ |XY|^2 = (x_0 y_0 - x_A y_A)^2 + (x_0 y_C + y_0 x_C + a_{ABC} x_A y_B)^2 \end{array} \right. \quad (4.5.1)$$

となるが, (4.4.5b) の一般化とみなせる公式<sup>26</sup>

$$a_{ABC} a_{DEC} = \delta_{AD} \delta_{BE} - \delta_{AE} \delta_{BD} + f_{ABDE}, \quad f_{ABDE} \text{ は添え字に関して完全反対称} \quad (4.5.2)$$

が成り立つため,  $a_{ABC}$  が添え字に関して完全反対称であることを使うと, 組成法則 (4.4.12) は

$$\begin{aligned} |XY|^2 &= (x_0 y_0 - x_A y_A)^2 + (x_0 y_C + y_0 x_C + a_{ABC} x_A y_B)^2 \\ &= (x_0 y_0 - x_A y_A)^2 + (x_0 y_C + y_0 x_C)^2 + (a_{ABC} x_A y_B)^2 \\ &= (x_0 y_0 - x_A y_A)^2 + (x_0 y_C + y_0 x_C)^2 + (x_A x_A y_B y_B - x_A y_A x_B y_B) \\ &= (x_0 y_0)^2 + (x_A y_A)^2 + (x_0 y_B)^2 + (y_0 x_A)^2 + x_A^2 y_B^2 - (x_A y_A)^2 \\ &= (x_0^2 + x_A^2)(y_0^2 + y_B^2) = |X|^2 |Y|^2 \end{aligned} \quad (4.5.3)$$

のように成分を使って証明出来る. これは「8 平方和の定理」[9]である. なお, (4.5.2) で定義された  $f_{ABDE}$  の性質は (4.4.5c), (4.4.6b) に (4.4.4f) の積法則を代入すれば, 証明出来る (その際, 再び  $a_{ABC}$  が添え字に関して完全反対称であることを使う. もっとも, (4.5.3) の証明だけなら,  $f_{ABDE} = -f_{DBAE}$  を (4.4.5c) から示すだけで十分). (4.4.5c), (4.4.6b) からは八元数の交代性が証明出来た. つまり, 八元数は非結合的であるが, 交代的なので, 組成法則が成り立ち, それが「8 平方和の定理」を意味する. 十六元数やその拡張は最早交代的ではないので, 組成法則は成り立たない. 勿論,  $|XY|^2 = |X|^2 |Y|^2$  が成り立つこと, およびそれが「8 平方和の定理」を意味することは (4.4.15a)~(4.4.15c) からも明らかである.

## 4.6 終わりにかけて

普通, 八元数の積法則 (4.4.15c) は組成法則や交代性を用いて導かれる. どちらも, 有名な Cayley-Dickson の 2 重化法に基づく. しかし, 基底  $\{e_A\}$  の反可換性を保証する準結合則を定義すれば, 組成法則にも交代性にもよらない八元数の積法則の初歩的な導き方があること, その方法は, 一般の Cayley-Dickson 代数にも応用できることを文献 [3] で示した. この小論では, そのうち八元数だけに着目して, その交代性や組成法則が, どのようにして, 準結合則 [3] から導かれるかを, やや詳しく議論してきた. 準結合則の方法は Cayley-Dickson の 2 重化法に導くが, 一般の非結合的 (特に flexible<sup>27</sup> な) Cayley-Dickson 代数の積法則は定義として出発点に置くものではなく, 準結合則を用いて導かれるという立場に立つことになる.

<sup>26</sup>(4.4.5b) の右辺には, 完全反対称テンソル  $\epsilon_{jklm} = 0$  ( $j, k, l, m$  は 1, 2, 3 を走る) が存在していると見なせる.

<sup>27</sup>任意の元  $U, V$  が  $(U, V, U) = 0$  を満たす非結合的な代数を flexible な代数という.

## 4.7 補遺. $e_A(A = 1, 2, \dots, 7)$ の反可換性

8次元超複素数を

$$X = x_0 + \sum_{A=1}^7 e_A x_A \equiv x_0 + e_A x_A$$

と置く. 但し,  $x_0, x_A (A = 1, \dots, 7)$  は実数で,  $e_A (A = 1, 2, \dots, 7)$  は実数と可換な虚数単位 ( $e_A^2 = -1$ ) で  $\{1, e_A\}$  は互いに1次独立とする. この補遺では, これらの虚数単位が互いに反可換であることを示す.

$\{1, e_A\}$  が互いに1次独立であること, および  $e_A e_B + e_B e_A$  が実数になることから, 可除性の仮定を使えば,

$$(e_1 x_1 + e_2 x_2 + \dots + e_7 x_7)^2 \leq 0$$

が成り立つ. 次に,  $\{e_A\}_{A=1,2,\dots,7}$  が互いに1次独立であることより, 上式で等号が成り立つのは, 再び可除性の仮定により,  $x_1 = \dots = x_7 = 0$  の場合だけである. それ故,  $(e_A \pm e_B)^2 < 0, A, B = 1, 2, \dots, 7, A \neq B$  が成り立つ. 即ち,  $\alpha_{AB}$  を絶対値が1より小さい実数とすれば,

$$e_A e_B + e_B e_A = 2\alpha_{AB}, \quad A \neq B, \quad (A, B = 1, 2, \dots, 7)$$

が成り立つ. ところが,  $(e_1, e_2, e_3) \rightarrow (I, J, K)$  によって, 互いに反可換な虚数単位  $(I, J, K)$  に変換出来る (この小論の第2節の一般化で, 文献[3]の§3で詳細に述べた). この際, 反可換になった  $(I, J, K)$  を改めて,  $(e_1, e_2, e_3)$  と記すことにし, 単に,  $(e_1, e_2, e_3)$  は反可換に出来た, 即ち,  $\alpha_{12} = \alpha_{23} = \alpha_{31} = 0$  とできたと称することにする. 同様に,  $(e_4, e_5, e_6)$  も反可換に出来る (即ち,  $\alpha_{45} = \alpha_{56} = \alpha_{64} = 0$  とできた). さらに,  $e_7$  は  $(e_1, e_2, e_3)$  とも,  $(e_4, e_5, e_6)$  とも反可換に出来る (この小論の第3節, 即ち,  $\alpha_{17} = \alpha_{27} = \alpha_{37} = \alpha_{47} = \alpha_{57} = \alpha_{67} = 0$ ). さらに, 同じような方法で,  $(e_1, e_2, e_3)$  を  $e_4$  とも  $e_5$  とも  $e_6$  とも反可換に出来る ( $\alpha_{14} = \alpha_{24} = \alpha_{34} = \alpha_{15} = \alpha_{25} = \alpha_{35} = \alpha_{16} = \alpha_{26} = \alpha_{36} = 0$  とできた). つまり, 初めから, 全ての  $A, B (A \neq B)$  について対称な  ${}_7C_2 = 21$  通りの組み合わせに対して,  $\alpha_{AB} = 0$  と置いて, 一般性を失わないのである.

## 参考文献

- [1] 矢野 忠, ‘四元数に近づく’, 「数学・物理通信」, 第 1 巻, 第 9 号 (2011.9), 18-23.  
 ‘四元数の発見へ’, 「数学・物理通信」, 第 1 巻, 第 11 号 (2011.12), 16-23.  
 ‘四元数の発見へ 2’, 「数学・物理通信」, 第 2 巻, 第 1 号 (2012.3), 14-24.  
 『四元数の発見』, (海鳴社, 2014).
- [2] L. E. Dickson, *Linear Algebra*, Cambridge Univ. Press, (1914), §11.
- [3] K. Morita, ‘Quasi-associativity and Cayley-Dickson algebras’, *Prog. Theor. Exp. Phys.*, 2014, 013A03.
- [4] B. L. van der Waerden, ‘Hamilton’s Discovery of Quaternions’, *Mathematics Magazine*, **49**, no. 5 (Nov. 1976), 227-234.
- [5] ポントリャーギン, 宮本敏雄・保坂秀正訳, 『数概念の拡張』 (森北出版, 1995), 77-85.  
 ポントリャーギン, 柴岡泰光・杉浦光夫・宮崎功訳, 『連続群論 (上)』 (岩波書店, 1979), 169-173.
- [6] J. Tiomno, ‘OCTONIONS AND SUPER-GLOBAL SYMMETRY’, in *Theoretical Physics (1962 Trieste Seminar)*, (Vienna, 1963), 251-264.
- [7] I. L. Kantor and A. S. Solodovnikov 著, 浅野洋監訳・笠原久弘訳, 『超複素数入門—多元環へのアプローチ』 (森北出版, 1999).
- [8] R. D. Schafer, *An Introduction to Nonassociative Algebra*, Academic Press (1966).
- [9] L. E. Dickson, ‘On Quaternions and their generalization and the history of the eight square theorem’, *Ann. Math.* **20**(1918), 155-171.

## 編集後記

先日、5巻1号を出したばかりだが、立て続けに5巻2号を発行する。それだけ投稿原稿が多いということである。編集者がお願いしても投稿が増えるわけではないので、全く投稿者の方々のお蔭である。編集発行人としては投稿者の皆様に深く感謝を申し上げる。

今号は36ページとなった。いま調べてみると昨年の4巻2号がやはり35ページであるので、どうも春にページ数の多い号が出る傾向が2年続いたことになる。別に印刷して配布するわけではないのでページ数は関係なさそうだが、毎号を30ページ以下に抑えるように編集者としては努力している。

この号はなかなか内容豊富になった。角度の単位の設定法が無限にあることを示された、新関さんの論文には角度の単位に何の疑問ももたなかった自分を反省させられた。世戸さんの数学の才には、いつものことながら、驚かされる。また、森田さんにはライフワークである、多元数への関心の深さを感じさせられる。

(矢野 忠)