

数学・物理通信

5卷6号 2015年9月

編集 新関章三・矢野 忠

2015年9月2日

目次 (Contents)

1. 分数冪微分で現れた群と離散デルタ・ポテンシャル	浅田 明	2
2. 量子力学における Rosen-Morse ポテンシャル問題 (2)	世戸憲治, 中西 襄	16
3. 三角関数の冪乗の有限和 2	中西 襄	27
4. 編集後記	新関章三	32
1. A Group arising from Fractional Calculus and Discrete Delta Potential	Akira ASADA	2
2. Rosen-Morse Potential Problem in Quantum Mechanics(2)	Kenji SETO, Noboru NAKANISHI	16
3. Finite Sums of Powers of Trigonometrical Functions, II	Noboru NAKANISHI	27
4. Editorial Comments	Shozo NIIZEKI	32

分数冪微分で現れた群と 離散デルタ・ポテンシャル

浅田 明¹

A Group arising from Fractional Calculus and Discrete Delta Potential

Akira ASADA²

要約

[2] で分数冪微分を変数の平行移動に移す積分変換 \mathcal{R} を導入した. このような変換が有ることは定義域を適当にとれば $\{\frac{d^a}{dx^a} | a \in \mathbb{R}\}$ が 1 経数群になる事を示している. この群と x^a を掛け算作用素 $(x^a f)(x) = x^a f(x)$ と見て得られる 1 経数群 $\{x^a | a \in \mathbb{R}\}$ で生成される群 $G_{\mathbb{R}}$ は, それ自体意味があるとともに, a を固定した時 $\frac{d^a}{dx^a}$ と x^a をあるヒルベルト空間の上の変形消滅・生成作用素とみる事 (cf.[11]) との関係が期待される.

$G_{\mathbb{R}}$ は離散な群だが その「リー環」のような $\log(\frac{d}{dx})$ と掛け算作用素 $\log x$ で生成されたリー環 $\mathfrak{g}_{\mathbb{R}}$ の構造と $G_{\mathbb{R}}$ の構造は \mathcal{R} を利用して解る. 特に $G_{\mathbb{R}}$ は自由アーベル群 $A_{\mathbb{R}}$ の \mathbb{R} による拡大である. ただし $G_{\mathbb{R}}$ と $\mathfrak{g}_{\mathbb{R}}$ が忠実な表現加群を持つかは問題でそれについての議論は必要になる.

更に $G_{\mathbb{R}}$ と $\mathfrak{g}_{\mathbb{R}}$ との関係をしらべると $G_{\mathbb{R}}$ に (拡張された) ボレル変換 \mathcal{B} を添加した群 $G_{\mathbb{R}}^{\mathcal{B}}$ がその背後にあることが見える. $G_{\mathbb{R}}^{\mathcal{B}}$ は \mathbb{R} の上の離散デルタ・ポテンシャルの加群 $D_{\mathbb{R};Z}$ の中に写される. $D_{\mathbb{R};Z}$ の適当な完備化と \mathbb{R} の上の 1 粒子の量子状態との関係を指摘した論文も有るので ([6]), この方面と分数冪微分も関係するかもしれない.

なお読者の便宜のため分数冪微分と変換 \mathcal{R} の概略を §1 に, $\frac{d^a}{dx^a}$ と x^a を変形消滅・生成作用素と見る話を §2 に書いた. §2 では $P(\frac{d^a}{dx^a})$ の形の定数係数分数冪微分方程式の解について [2] に書いた事の補足も与える.

目次

- §1. 分数冪微分と変換 \mathcal{R} .
- §2. 消滅作用素の変形としての分数冪微分
- §3. $G_{\mathbb{R}}$ の構造
- §4. $\log x$ と $\log(\frac{d}{dx})$ で生成されたリー環
- §5. $A_{\mathbb{R}}$ と離散デルタ・ポテンシャル
- §6. 多変数の場合

1 分数冪微分と変換 \mathcal{R}

$\Re a > 0$ のとき a -階の不定積分は

$$I^a(f(s))(x) = \frac{1}{\Gamma(a)} \int_0^x (x-s)^{a-1} f(s) ds$$

で定義される. $I^a(s^c)(x) = \frac{\Gamma(1+c)}{\Gamma(1+c+a)} x^{c+a}$ だから (a, c で解析接続して)

$$\frac{d^a}{dx^a} x^c = \frac{\Gamma(1+c)}{\Gamma(1+c-a)} x^{c-a}$$

¹元信州大学

²asada-a@poporo.ne.jp

と定義しこれを線形に拡張して a -階の微分を定義する;

$$\frac{d^a}{dx^a} \left(\sum_n b_n x^{c_n} \right) = \sum_n \frac{\Gamma(1+c_n)}{\Gamma(1+c_n-a)} b_n x^{c_n-a}.$$

(分数幂微積一般については [8], または [2] 参照).

積分変換 \mathcal{R} を

$$\mathcal{R}[f(s)](x) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^s}{\Gamma(1+s)} f(s) ds$$

で定義する. $x < 0$ のときは $x^s = |x|^s e^{-i\pi a}$, または $|x|^s e^{i\pi a}$ とする. x を複素数とするときは $\mathcal{R}[f(s)](x)$ は $\mathbb{C} \setminus \{x \in \mathbb{R}, x < 0\}$ で定義された関数と見る (あるいは $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ の多価関数と見る). \mathcal{R} の適切な定義域についてはいろいろ問題があるが省略する ([4],[5] 参照).

両側ラプラス変換 $\mathcal{L}[g(t)](y) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{ty} g(t) dt$ を用いて変換 \mathcal{N} ;

$$\mathcal{N}[f(s)](x) = \mathcal{L}[f(s)](\log x) = \int_{-\infty}^{\infty} x^s f(s) ds$$

を導入すれば

$$\mathcal{R}[f(s)](x) = \mathcal{N} \left[\frac{f(s)}{\Gamma(1+s)} \right] (x)$$

である. ラプラス変換は逆を持つから \mathcal{R} は関数のうえで定義されていれば逆をもつ. しかし定義域を超関数まで拡張すれば

$$\ker \mathcal{R} = \{\delta_{-n} | n \in \mathbb{N}\}$$

だから必ずしも逆は無い. ただし $\delta_a(s) = \delta(s-a)$ とする.

なおボレル変換 $\mathcal{B}[\phi(\zeta)](z) = \frac{1}{2\pi i} \oint \frac{e^{z/\zeta}}{\zeta} \phi(\zeta) d\zeta$ とその逆変換 $\mathcal{B}^{-1}[f(s)](x) = \int_0^\infty e^{-s} f(sx) ds$ を用いた拡張を使うと

$$\mathcal{R} = \mathcal{B} \circ \mathcal{N}$$

という分解ができる ([4]). 拡張されたボレル変換 ([2],[9]) については

$$\ker \mathcal{B} = \{s^{-n} | n \in \mathbb{N}\}$$

である. これは $\ker \mathcal{R}$ に対応する.

$\frac{f(s)}{\Gamma(1+s)}$ が急減少であれば

$$\begin{aligned} \frac{d^a}{dx^a} \mathcal{R}[f(s)](x) &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\Gamma(1+s)}{\Gamma(1+s-a)} \frac{x^{s-a}}{\Gamma(1+s)} f(s) ds \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^{s-a}}{\Gamma(1+s-a)} f((s-a)+a) ds \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^t}{\Gamma(1+t)} f(t+a) dt \end{aligned}$$

$t = s - a$, だから

$$\frac{d^a}{dx^a} \mathcal{R}[f(s)](x) = \mathcal{R}[\tau_a f(s)](x), \quad \tau_a f(s) = f(s+a)$$

である. この式から定義域をたとえば $\mathcal{R}(\mathcal{H})$, \mathcal{H} は $\frac{f(s)}{\Gamma(1+s)}$ が $s \rightarrow \pm\infty$ で急減少となる関数 $f(s)$ の空間, ととれば

$\left\{\frac{d^a}{dx^a} \mid a \in \mathbb{R}\right\}$ は 1 経数群になる. その生成作用素;

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \left(\frac{d^h}{dx^h} - I \right), \text{ は } \log \left(\frac{d}{dx} \right);$$

$$\log \left(\frac{d}{dx} \right) f(x) = - \left[\gamma f(x) + \int_0^x \log(x-t) \frac{df_+(t)}{dt} dt \right],$$

$$f_+(x) = \begin{cases} f(x), & x \geq 0, \\ 0, & x < 0. \end{cases}$$

である ([2],[10]). ただし $\frac{df_+(t)}{dt}$ は超関数の意味での微分とする. $\log \left(\frac{d}{dx} \right)$ については

$$\log \left(\frac{d}{dx} \right) \mathcal{R}[f(s)](x) = \mathcal{R} \left[\frac{df(s)}{ds} \right](x)$$

が成立する.

注意. 一般的には $\frac{d^a}{dx^a} \frac{d^b}{dx^b} = \frac{d^{a+b}}{dx^{a+b}}$ は必ずしも成立しない. たとえば

$$\frac{d^{1/2}}{dx^{1/2}} \left(\frac{d^{1/2}}{dx^{1/2}} x^{-1/2} \right) = 0 \neq \frac{d}{dx} x^{-1/2}.$$

H 以外に有用な関数空間として $\log x$ の整関数の作る空間 F_{\log} がある. $(\log x)^n = \frac{\partial^n}{\partial c^n} x^c \Big|_{c=0}$ だから

$$\begin{aligned} \frac{d^a}{dx^a} (\log x)^n &= \frac{\partial^a}{\partial x^a} \left(\frac{\partial^n}{\partial c^n} x^c \right) \Big|_{c=0} \\ &= \frac{\partial^n}{\partial c^n} \left(\frac{\partial^a}{\partial x^a} x^c \right) \Big|_{c=0} = \frac{\partial^n}{\partial c^n} \left(\frac{\Gamma(1+c)}{\Gamma(1+c-a)} x^{c-a} \right) \Big|_{c=0} \end{aligned}$$

である. これから

$$\frac{d^a}{dx^a} (\log x)^n = \sum_{k=0}^n \frac{n!}{k!(n-k)!} \left[\frac{\partial^k}{\partial c^k} \left(\frac{\Gamma(1+c)}{\Gamma(1+c-a)} \right) \right] (\log x)^{n-k} x^{c-a} \Big|_{c=0}$$

となるから $\frac{d^a}{dx^a}$ は F_{\log} に作用する. a が整数であればこの右辺は意味がないが $a \rightarrow n$ の極限を取れば普通の微分の公式が再現される. また $\log \left(\frac{d}{dx} \right)$ も F_{\log} に作用する.

また a を固定した時は次節で導入するヒルベルト空間 $H_{a;k}$ が有用である.

なお多変数の場合も

$$\mathcal{R}[f(s_1, \dots, s_n)](x_1, \dots, x_n) = \int_{\mathbb{R}^n} \prod_{i=1}^n \frac{x_i^{s_i}}{\Gamma(1+s_i)} f(s_1, \dots, s_n) ds_1 \cdots ds_n$$

等と定義して同様の事がえられる.

2 消滅作用素の変形としての分数冪微分

$a > 0$ とする. k を $a = \frac{q}{p}$ のときは $1 \leq k \leq q$ となる整数, a が有理数でないときは任意の自然数としヒルベルト空間 $H_{a;k}$ を

$$H_{a;k} = \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} c_n z^{an-k} \mid \sum_{n=0}^{\infty} |c_n|^2 < \infty \right\}$$

で定義する. ここで $z = re^{i\theta}$ は複素数で内積は

$$(z^{na-k}, z^{ma-k}) = \frac{a}{2\pi} \int_{-\pi/a}^{\pi/a} e^{(na-k)\theta} \overline{e^{(ma-k)\theta}} d\theta = \delta_{n,m}$$

で定義する. 定義から a が正の実数のときミッターハ・レフラー型関数 $E_\rho(x; \mu) = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{x^i}{\Gamma(\mu + i/\rho)}$ ([7]) について

$$x^{a-k} E_{1/a}(\lambda x; a-k) \in H_{a;k} \quad (2.1)$$

である. ミッターハ・レフラー関数は指数関数の変形と解釈できる.

k の取り方から

$$\begin{aligned} \frac{d^a}{dz^a} z^{a-k} &= 0, \\ \frac{d^a}{dz^a} z^{na-k} &= \frac{\Gamma(na+1-k)}{\Gamma((n-1)a+1-k)} z^{(n-1)a-k} \neq 0, \quad n \geq 2, \end{aligned}$$

である. これから

$$\left(\frac{d^a}{dz^a} \right)^n z^{am-k} = 0, \quad m \leq n,$$

だから $\left(\frac{d^a}{dz^a} \right)^n$ は必ずしも $\frac{d^{na}}{dz^{na}}$ と一致しない.

$\frac{d^a}{dx^a}$ と掛け算作用素 $x^a : x^a(x^{na-k}) = x^{a(n+1)a-k}$ を $H_{a;k}$ に働く変形消滅・生成作用素と見る. 定義から

$$\left[\frac{d^a}{dx^a}, x^a \right] x^{an-k} = \left(\frac{\Gamma(a(n+1)-k)}{\Gamma(an-k)} - \frac{\Gamma(an-k)}{\Gamma(a(n-1)-k)} \right) x^{an-k}$$

である. a, x を正の実数とすればスターリングの公式から $x \rightarrow \infty$ のとき

$$\begin{aligned} \frac{\Gamma(x+a)}{\Gamma(x)} &= \frac{e^{-(x+a)}(x+a)^{x+a}}{e^{-x}x^x} + O\left(\frac{1}{x}\right) \\ &= e^{-a}x^a \left(1 + \frac{a}{x}\right)^{x+a} + O\left(\frac{1}{x}\right) = x^a \left(1 + \frac{a}{x}\right)^a + O\left(\frac{1}{x}\right) \end{aligned}$$

である. よって

$$\frac{\Gamma(x+a)}{\Gamma(x)} - \frac{\Gamma(x)}{\Gamma(x+a)} = O(x^{a-1}), \quad x \rightarrow \infty, \quad a < 1 \quad (2.2)$$

である. 他方 $a > 1$ であれば $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{\Gamma(x+a)}{\Gamma(x)} - \frac{\Gamma(x)}{\Gamma(x-a)} \right) = \infty$ となる. これらから $C_a = \left[\frac{d^a}{dx^a}, x^a \right]$ として

定理 1. C_a は自己共役で $a < 1$ の時コンパクト, $q > \frac{1}{1-a}$ であれば C_a^q はトレース級である (cf.[12]). 一方 $a > 1$ の時は非有界になる.

$H_{a;k}$ での $\frac{d^a}{dx^a}$ に関する定数係数分数微分方程式の解は以下のようにミッターハ・レフラー関数 (とその導関数) を使って求められる.

$P(x) = X^m + c_1 X^{m-1} + \dots + c_m = \prod_{\sum_i j_i = m} (X - \lambda_i)^{j_i}$ とすれば $H_{a;k}$ に働く作用素としては

$$P\left(\frac{d^a}{dx^a}\right) = \left(\frac{d^a}{dx^a}\right)^m + \dots + c_m = \prod_i \left(\frac{d^a}{dx^a} - \lambda_i\right)^{j_i},$$

である. $P(X)^{-1} = \sum_i \sum_j c_{j_i} (X - \lambda_i)^{-j_i}$ とすれば 方程式 $P\left(\frac{d^a}{dx^a}\right) y = 0$ の $H_{a;k}$ での解として

$$y(x) = \sum_i \sum_j c_{j_i} \mathcal{B} \left[\frac{1}{(t-a - \lambda_i)^{j_i}} t^{-k} \right] (x)$$

が得られる. ミッターハ・レフラー関数を使えば

$$\mathcal{B}[(t^{-a} - \lambda_i)^{-1}t^{-k}](x) = x^{a-k} E_{1/a}(\lambda_i x^a; a-k)$$

である. $\frac{d^{n-1}}{d\lambda^{n-1}} \frac{t^{-k}}{t^{-a} - \lambda} = \frac{(n-1)!t^{-k}}{(t^{-a} - \lambda)^n}$ だから $\frac{d^n}{dx^n} E_\rho(x; \mu) = E_\rho^{(n)}(x; \mu)$ とすれば

$$\mathcal{B}\left[\frac{t^{-k}}{(t^{-a} - \lambda)^n}\right](x) = \frac{x^{an-k}}{(n-1)!} E_{1/a}^{(n-1)}(\lambda x^a; a-m) \quad (2.3)$$

である. よって

$$y(x) = \sum_i \sum_j \frac{c_{ij}}{(j_i - 1)!} x^{aj_i - k} E_{1/a}^{(j_i - 1)}(\lambda_i x^a; a-k) \quad (2.4)$$

となる.

この例のように $H_{a;k}$ は a を固定して $\frac{d^a}{dx^a}$ を扱うには便利だが $a \neq 1$ の時は $\frac{d^a}{dx^a}$ と x^a で生成されるリー環の構造は簡単ではない. しかしある意味では $a \rightarrow 0$ の極限とも解釈される $\log\left(\frac{d}{dx}\right)$ と $\log x$ で生成されるリー環 $\mathfrak{g}_\mathbb{R}$ とそれに対応する「リー群」ともみられる群 $G_\mathbb{R}$ の構造は \mathcal{R} を利用してわかる. 以下それを説明する.

3 $G_\mathbb{R}$ の構造

補題 1. $\mathcal{R}[f(s)](x)$, $\mathcal{R}\left[\frac{\Gamma(1+s)}{\Gamma(1+s-a)}\tau_{-a}f(s)\right](x)$ がともに定義できれば

$$x^a \mathcal{R}[f(s)](x) = \mathcal{R}\left[\frac{\Gamma(1+s)}{\Gamma(1+s-a)}\tau_{-a}f(s)\right](x), \quad (3.1)$$

である.

証明. 仮定から次の計算ができる.

$$\begin{aligned} x^a \mathcal{R}[f(s)](x) &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^{s+a}}{\Gamma(1+s)} f(s) ds \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^t}{\Gamma(1+t)} \frac{\Gamma(1+t)}{\Gamma(1+t-a)} f(t-a) dt, . \end{aligned}$$

$t = s + a$. よって $t + a$ を s と書き換えて補題を得る.

補題の仮定をみたま関数の空間としては

$$\begin{aligned} H_a &= H_{a;1} = \\ &= \{f(s) | f(s) = 0, s = a - n, n \in \mathbb{N}, \\ &\quad \frac{f(s)}{\Gamma(1+s)} \text{ is rapidly decreasing at } |s| \rightarrow \pm\infty\}, \end{aligned}$$

がある. H_a の各 $a - n$ で m 位の零点をもつ部分空間を $H_{a;m}$,

$$\bigcap_{m \geq 1} H_{a;m} = H_{a;\infty};$$

$$H_{a_1, \dots, a_k; m} = \bigcap_{j=1, \dots, k} H_{a_j; m} \quad H_{a_1, \dots, a_k; \infty} = \bigcap_{j=1, \dots, k} H_{a_j; \infty}$$

とおく. $H_{a_1, \dots, a_k; \infty}$ では任意の n について $\Gamma(1+s-a_i)^n, 1 \leq i \leq k$ を掛けることが中への写像になる. しかしこれらの空間と $H_{a;k}$ との関係は解っていない.

簡単のため

$$\Gamma_b^a(s) = \Gamma_b^a = \frac{\Gamma(1+s+a)}{\Gamma(1+s+b)}$$

と置く. この記法では $x^a \mathcal{R}[f](x) = \mathcal{R}[\Gamma_{-a}^0 \tau_{-a} f](x)$ である. 定義から

$$\Gamma_a^a = 1, \Gamma_b^a \Gamma_c^b = \Gamma_c^a, \tau_a \Gamma_c^b = \Gamma_{c+a}^{b+a} \tau_a \quad (3.2)$$

である. (5), (6) から

定理 2 ([3],[5]). $\{x^a | a \in \mathbb{R}\}$ と $\{\frac{d^a}{dx^a} | a \in \mathbb{R}\}$ から生成される群 $G_{\mathbb{R}}$ は $\{\Gamma_0^a | a \in \mathbb{R}\}$ から乗法で生成される群 $A_{\mathbb{R}}^b$ と $\{\tau_a | a \in \mathbb{R}\} \cong \mathbb{R}$ から生成される群 $G_{\mathbb{R}}^b$ と同型である. $A_{\mathbb{R}} = \mathcal{R} A_{\mathbb{R}}^b \mathcal{R}^{-1}$ は $G_{\mathbb{R}}$ の正規部分群だが $\mathbb{R} \cong \{\frac{d^a}{dx^a} | a \in \mathbb{R}\}$ は正規部分群ではなく

$$G_{\mathbb{R}} = A_{\mathbb{R}} \rtimes \mathbb{R} \quad (3.3)$$

である.

証明. (2) から $\Gamma_b^a = \Gamma_0^a (\Gamma_0^b)^{-1}$ だから任意の実数列 $a_1, \dots, a_k, b_1, \dots, b_k$ と整数列 n_1, \dots, n_k について

$$(\Gamma_{b_1}^{a_1})^{n_1} \dots (\Gamma_{b_k}^{a_k})^{n_k} \in A_{\mathbb{R}}^b$$

である. よって $G_{\mathbb{R}}^b$ は $A_{\mathbb{R}}^b$ と \mathbb{R} で生成される. また $\tau_a \Gamma_c^b \tau_{-a} = \Gamma_{c+a}^{b+a}$ だから $A_{\mathbb{R}}^b$ は $G_{\mathbb{R}}^b$ の正規部分群だが $\Gamma_0^a \tau_b \Gamma_0^a = \Gamma_0^a \Gamma_{a+b}^b \tau_b \notin \mathbb{R}$ だから \mathbb{R} は $G_{\mathbb{R}}^b$ の正規部分群ではない. よって定理が得られる.

以下では必要がなければ簡単のため $G_{\mathbb{R}}, A_{\mathbb{R}}$ と $G_{\mathbb{R}}^b, A_{\mathbb{R}}^b$ を同一視し, $G_{\mathbb{R}}$ 等と書く. ただし $A_{\mathbb{R}}^b$ は原点に極をもつ解析関数の芽の加群に作用できるが この加群に \mathcal{R} は定義できないので $A_{\mathbb{R}}$ にはこのような表現加群は無い (らしい).

定理 3. 任意の 0 でない実数列 a_1, \dots, a_k と整数列 n_1, \dots, n_k について関係

$$(\Gamma_0^{a_1})^{n_1} \dots (\Gamma_0^{a_k})^{n_k} = 1 \quad (3.4)$$

が成立することは無い.

証明. $\vartheta f(s) = \frac{d}{ds} \log(f(s))$ とすれば $\vartheta(\Gamma_0^a) = \Psi(1+s+a) - \Psi(1+s)$ により (8) から

$$\begin{aligned} & \vartheta((\Gamma_0^{a_1})^{n_1} \dots (\Gamma_0^{a_k})^{n_k}) \\ &= n_1(\Psi(1+s+a_1) - \Psi(1+s)) + \dots + \\ & \quad + n_k(\Psi(1+s+a_k) - \Psi(1+s)) = 0 \end{aligned}$$

となる. しかし $\Psi(1+s+a)$ は $s = -a-1, -a-2, \dots$ でのみ 1 位の極を持つので $a_1 < a_2 < \dots < a_k$ としたとき

$$n_1 \Psi(1+s+a_1) + \dots + n_k \Psi(1+s+a_k) - (n_1 + \dots + n_k) \Psi(1+s),$$

a_1, \dots, a_k は 0, 1 でない実数, は $s = -1 - a_1$ で 1 位の極を持つから関数として 0 にはならない. よって補題が成立する.

系. $A_{\mathbb{R}}^b$ は $\Gamma_0^a; a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ を生成元とする自由アーベル群である:

$$A_{\mathbb{R}}^b \cong \sum_{a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}} \mathbb{Z} \Gamma_0^a. \quad (3.5)$$

定義から任意の a について $H_a \subset H$ である. A_{a_1, \dots, a_k}^b を $A_{\mathbb{R}}^b$ の $\Gamma_0^{a_1}, \dots, \Gamma_0^{a_k}$ で生成された部分群とし A_{a_1, \dots, a_k} を対応する 分数冪オイラー微分

$$E_r^{a_j} = x^{-a_j} \frac{d^{-a_j}}{dx^{-a_j}}$$

で生成された群 ($G_{\mathbb{R}}$ の部分群) とすれば A_{a_1, \dots, a_k} は $\mathcal{R}(H_{a_1, \dots, a_k; \infty})$ の変換群として同型に表現される.

しかし $\{a_1, a_2, \dots\}$ が無限集合であれば $\cap_{a_1, a_2, \dots} H_{a_i; \infty}$ は $\{0\}$ になる場合もあるのでこのようなことは言えない. よって H またはその部分空間から $A_{\mathbb{R}}$ の忠実な表現加群は得られないようである.

定義 1. G を群, M をベクトル空間で G の元 x の M (の部分空間) への作用 $\mu = \mu(x)$ が定められているとする.

G の有限個の元 $\{x_1, \dots, x_k\}$ から生成される G の部分群を G_{x_1, \dots, x_k} に対し M の部分空間 M_{x_1, \dots, x_k} があり G_{x_1, \dots, x_k} は μ により M_{x_1, \dots, x_k} からの変換群として同型に表現されるとき (M, μ) を G の忠実な局所表現加群と呼ぶ.

この定義に従えば

命題 1. $\mathcal{R}(H)$ は $A_{\mathbb{R}}$ の忠実な局所表現加群である.

しかし τ_a の作用を入れると $\mathcal{R}(H)$ は局所表現加群とはならない ($G_{\mathbb{R}}$ の忠実な局所表現加群にはならない).

注意. $A_{\mathbb{R}}^b$ は原点で極を持つ解析関数の芽の加群を忠実な表現加群として持つ. しかしこの加群には \mathcal{R} が定義できないのでこれから $A_{\mathbb{R}}$ の表現は得られない (らしい).

また $G_{\mathbb{R}}^b$ も実軸上の離散な集合にだけ極をもつ有理型関数 (の実軸上の芽) の加群が忠実な表現加群になるがこれから $G_{\mathbb{R}}$ の表現は得られないようである.

$x^a = e^{a \log x}$ だから x^{a_1}, \dots, x^{a_k} の多項式は F_{\log} にふくまれる. α を $n_1 a_1 + \dots + n_k a_k + \alpha$ がすべての $n_1, \dots, n_k \in \mathbb{Z}$ について負の整数にならないように取れば

$$F_{a_1, \dots, a_k; \alpha} = \left\{ \sum_{n_1, \dots, n_k} c_{n_1, \dots, n_k} x^{n_1 a_1 + \dots + n_k a_k + \alpha} \in F_{\log} \right\}$$

は $G_{\mathbb{R}}$ の $x^{a_1} \frac{d^{a_1}}{dx^{a_1}}, \dots, x^{a_k} \frac{d^{a_k}}{dx^{a_k}}$ で生成された部分群の忠実な表現加群になる. 従って F_{\log} から $A_{\mathbb{R}}$ の忠実な局所表現加群がえられる. 分数冪微分方程式を扱うには F_{\log} のほうが $\mathcal{R}(H)$ より役に立つ.

4 $\log x$ と $\log \left(\frac{d}{dx} \right)$ で生成されたリ一環

補題 2. $\log x \mathcal{R}[f(s)](x)$ が定義でき

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial a} \mathcal{R} \left[\frac{\Gamma(1+s)}{\Gamma(1+s-a)} \tau_{-a} f(s) \right] (x) \\ &= \mathcal{R} \left[\frac{\partial}{\partial a} \left(\frac{\Gamma(1+s)}{\Gamma(1+s-a)} \tau_{-a} f(s) \right) \right] (x) \end{aligned}$$

が成立し, $\mathcal{R} \left[\left(\Psi(1+s) - \frac{d}{ds} \right) f(s) \right] (x)$ が定義できれば

$$\log x \mathcal{R}[f(s)](x) = \mathcal{R} \left[\left(\Psi(1+s) - \frac{d}{ds} \right) f(s) \right] (x) \quad (4.1)$$

が成立する.

証明. 仮定と $\frac{\partial}{\partial a} x^a = \log x \cdot x^a$ と $\frac{\partial}{\partial a} \tau_a = \frac{d}{dx} \tau_a$ から

$$\begin{aligned} \log x \mathcal{R}[f(s)](x) &= \frac{\partial}{\partial a} x^a \mathcal{R}[f(s)](x)|_{a=0} \\ &= \mathcal{R} \left[\frac{\partial}{\partial a} \left(\frac{\Gamma(1+s)}{\Gamma(1+s-a)} \tau_{-a} f(s) \right) \right] (x)|_{s=0} \\ &= \mathcal{R} \left[\frac{\Gamma(1+s)\Gamma'(1+s-a)}{(\Gamma(1+s-a))^2} \tau_{-a} f(s) - \frac{\Gamma(1+s)}{\Gamma(1+s-a)} \frac{d}{ds} \tau_{-a} f(s) \right] (x)|_{a=0} \\ &= \mathcal{R} \left[\left(\frac{\Gamma'(1+s)}{\Gamma(1+s)} - \frac{d}{ds} \right) f(s) \right] (x) \end{aligned}$$

となって補題が成立する.

この補題が成立する \mathcal{R} の定義域となる関数空間としては $H_{0;\infty}$ がとれる.

$$\log \left(\frac{d}{dx} \right) \mathcal{R}[f(s)](x) = \mathcal{R} \left[\frac{d}{ds} f(s) \right] (x)$$

であり \mathcal{R} は H を定義域とすれば逆をもつから 掛け算作用素 $\log x$ と $\log \left(\frac{d}{dx} \right)$ で生成されるリー環 $\mathfrak{g}_{\mathbb{R}}$ は $\frac{d}{ds}$ と $\Psi(1+s)$ から生成されるリー環 $\mathfrak{g}_{\mathbb{R}}^b$ と同型である. 簡単のため使い分ける必要がなければ $\mathfrak{g}_{\mathbb{R}}^b$ も $\mathfrak{g}_{\mathbb{R}}$ と書く. $G_{\mathbb{R}}^b$ と違って $\mathfrak{g}_{\mathbb{R}}^b$ は $H_{0;\infty}$ を忠実な表現空間としてもつ. よって

命題 2. $\mathfrak{g}_{\mathbb{R}}$ は $\mathcal{R}(H_{0;\infty})$ を忠実な表現空間としてもつ.

この命題から $\mathfrak{g}_{\mathbb{R}}$ については局所表現を考える必要はない.

$\mathfrak{g}_{\mathbb{R}}^b$ は微分作用素と正則関数で定義されているので 原点での正則関数 (または実解析関数) の芽と微分作用素で定義できる (局所的である). これに対応する表示が $\mathfrak{g}_{\mathbb{R}}$ でも得られるかはこれからの問題である. 以下では取扱いが簡単なので $\mathfrak{g}_{\mathbb{R}}^b$ 等をつかい $\mathfrak{g}_{\mathbb{R}}$ 等とかく.

$$\left[\frac{d}{ds}, \Psi^{(k)}(1+s) \right] = \Psi^{(k+1)}(1+s), \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

であり $\Psi^{(k)}(1+s)$ は $s = -1, -2, \dots$ にだけ位数 $k+1$ の極をもつから $\{\Psi^{(n)}(1+s) | n = 0, 1, 2, \dots\}$ は 1 次独立である. よって $\mathfrak{g}_{\mathbb{R}}$ は $\frac{d}{ds}$ と $\Psi(1+s), \Psi'(1+s), \dots, \Psi^{(n)}(1+s), \dots$ を基底とするベクトル空間である. $\mathfrak{a}_{\mathbb{R};k}$ を $\{\Psi^{(n)}(1+s) | n > k\}$ で張られる部分空間とすれば $\mathfrak{a}_{\mathbb{R};k}$ は $\mathfrak{g}_{\mathbb{R}}$ のイデアルである;

$$\left[\frac{d}{ds}, \mathfrak{a}_{\mathbb{R};k} \right] = \mathfrak{a}_{\mathbb{R};k+1}.$$

定理 4. $\mathfrak{a}_{\mathbb{R}} = \mathfrak{a}_{\mathbb{R};0}$ は極大イデアルであり

$$\mathfrak{g}_{\mathbb{R}}/\mathfrak{a}_{\mathbb{R}} \cong \mathbb{R}, \quad \mathfrak{g}_{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \frac{d}{ds} \oplus \mathfrak{a}_{\mathbb{R}} \quad (4.2)$$

である.

$\mathbf{c} = \sum_k c_k \Psi^{(k)}(1+s) \in \mathfrak{a}_{\mathbb{R}}$ に適当なノルム $\|\mathbf{c}\|$, 例えば

$$\|\mathbf{c}\|_1 = \sum_k |c_k|,$$

を入れそのノルムによる完備化を $\bar{\mathfrak{a}}_{\mathbb{R}}$ とする.

注意. $\Psi^{(n)}(1+s)$ は負の整数の所で位数 $n+1$ の極を持つから、こうしたノルムを適当な \mathbb{R} の上などでの積分で表示する事は難しいようである。

以下では $\bar{\mathbf{a}}_{\mathbb{R}}$ には任意の $c > 0$ について

$$\mathbf{c}(a) = \left(1, a, \frac{a^2}{2!}, \dots, \frac{a^n}{n!}, \dots\right)$$

が入っているとする。 $|a|$ が小さければ

$$\psi(\mathbf{c}(a))(s) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a^n}{n!} \Psi^{(n)}(1+s) = \Psi(1+s+a), \quad |s+a| < 1$$

である。

$\mathbf{c} = (c_0, c_1, \dots)$ とし $\mathbf{c} \sim \mathbf{c}'$ を $c'_n = c_n t^n$ で同値関係を定義する。この同値類を $[\mathbf{c}]$ とし $c_0 = 1$ ($c_k = 1, c_0 = \dots = c_{k-1} = 0, c_k \neq 0$ のとき) となる \mathbf{c}_1 をその代表とする。定義から $\mathbf{c} = (\mathbf{c}_1, t)$ とあらわされるが $|t|$ が小さいとき

$$\psi((\mathbf{c}_1, t))(s) = \sum_n c_{1,n} t^n \Psi^{(n)}(1+s),$$

だから $\mathbf{c}_1 = (\dots, c_{1,n}, \dots)$ が $\bar{\mathbf{a}}_{\mathbb{R}}$ の位相で収束し $t = t_0$ まで解析接続されれば

$$\psi(\mathbf{c})(s) = \psi((\mathbf{c}_1, t_0))(s), \quad \mathbf{c} = (\mathbf{c}_1, t_0)$$

で $\psi(\mathbf{c})(s)$ を定義する。この定義では

$$\psi((a))(s) = \Psi(1+s+a) \tag{4.3}$$

である。

定理 5. ϑ を

$$\vartheta f(x) = \frac{d}{dx}(\log(f(x))) = \frac{f'(x)}{f(x)}$$

で定義すれば $\phi \in \mathbf{A}_{\mathbb{R}}$ であれば $\vartheta(\phi)$ は ψ の像に入り

$$\psi^{-1}\vartheta : \mathbf{A}_{\mathbb{R}} \rightarrow \bar{\mathbf{a}}_{\mathbb{R}}$$

は中への同型である。詳しくは $\mathbf{A}_{\mathbb{R}}$ の像は $\bar{\mathbf{a}}_{\mathbb{R};2}$ に含まれる。

$\bar{\mathbf{a}}_{\mathbb{R}}$ は位相ベクトル空間であり $\psi^{-1}\vartheta$ は中への埋め込みだから $\bar{\mathbf{a}}_{\mathbb{R}}$ から $\mathbf{A}_{\mathbb{R}}$ に位相が誘導できる。具体的にはこの位相は $\prod_{n=1}^{\infty} (\Gamma_0^{a_0})^{c_n}$ の形の無限積を考えることになる。この形の無限積であらわされる関数はどのようなものかは問題である。

また $\bar{\mathbf{a}}_{\mathbb{R}}$ の定義は一意でないので、どのような $\bar{\mathbf{a}}_{\mathbb{R}}$ が適切なかの調べるのも今後の問題であり次節でも触れる。またこうして誘導された位相と $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ での広義一様収束で入れた位相との関係も問題である。

$\bar{\mathbf{a}}_{\mathbb{R}}$ から $\mathbf{A}_{\mathbb{R}}$ に誘導された位相で $\mathbf{A}_{\mathbb{R}}$ を完備化した時この完備化がバナハ・リー群になるか？ またバナハ・リー群になれば $\bar{\mathbf{a}}_{\mathbb{R}}$ はそのリー代数になるかも今後の問題である。

$\sum_{n=0}^{\infty} c_n \Psi^{(n)}(1+s) \in \bar{\mathbf{a}}_{\mathbb{R}}$ が関数 $f(s)$ に収束していれば $\psi^{-1}\vartheta$ の逆として 方程式

$$\frac{dy(s)}{ds} - f(s)y(s) = 0$$

の解を使うことが考えられる。この方程式の初期条件の決定は次節で扱う。

5 $A_{\mathbb{R}}$ と離散デルタ・ポテンシャル

$A_{\mathbb{R}}$ は $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ を生成元とする自由アーベル群であり, その $\psi^{-1}\vartheta$ による像は $\bar{a}_{\mathbb{R};2}$ にふくまれる. これは $A_{\mathbb{R}}$ (または $G_{\mathbb{R}}$) には欠如した部分が有る事を示唆する. ここではこの欠如が現象論的には (拡張された) ポレル変換 \mathcal{B} を $A_{\mathbb{R}}$ に添加することによって補充されること, 更にこの補充と \mathbb{R} の上の離散デルタポテンシャルと関係が有る事を示す.

補題 3. $\mathcal{R}^{-1} \circ \Gamma(1+s) \circ \mathcal{R} = \mathcal{B}^{-1}$ である.

証明. $\mathcal{R} = \mathcal{B} \circ \mathcal{N}$ と $\mathcal{R}[g(s)] = \mathcal{R} \left[\frac{g(s)}{\Gamma(1+s)} \right]$ から

$$\mathcal{R}[\Gamma(1+s)f(s)](x) = \mathcal{N}[f(s)](x)$$

である. よって補題が成立する.

定義 2. $G_{\mathbb{R}}^{\sharp}, A_{\mathbb{R}}^{\sharp}$ を G_{\sharp}, A_{\sharp} と \mathcal{B} で生成された群とする. また

$$G_{\mathbb{R}}^{\natural} = \mathcal{R}^{-1}G_{\mathbb{R}}^{\sharp}\mathcal{R}, \quad A_{\mathbb{R}}^{\natural} = \mathcal{R}^{-1}A_{\mathbb{R}}^{\sharp}\mathcal{R}$$

と置く.

定理 6. 次の事がなりたつ.

1. $G_{\mathbb{R}}^{\natural}$ は $G_{\mathbb{R}}^{\flat}$ と $\Gamma(1+s)$ で生成される.
2. $A_{\mathbb{R}}^{\natural}$ は $\{\Gamma(1+s+a) | a \in \mathbb{R}\}$ から乗法で生成される自由アーベル群である.
3. $A_{\mathbb{R}}^{\natural}$ は $G_{\mathbb{R}}^{\natural}$ の正規部分群で $G_{\mathbb{R}}^{\natural} = A_{\mathbb{R}}^{\natural} \rtimes \mathbb{R}$, $\mathbb{R} = \{\tau_a | a \in \mathbb{R}\}$ である.
4. $A_{\mathbb{R}}^{\natural}$ は ϑ で $\bar{a}_{\mathbb{R}}^{\flat}$ の中に写される.

証明. 補題 3 と $\Gamma_0^a\Gamma(1+s) = \Gamma(1+s; a)$ から 1 と 2 が得られる. 3 は $\tau_a\Gamma(1+s+b)^m = \Gamma(1+s+a+b)^m\tau_a$ から得られる. 4 は $\vartheta\Gamma(1+s) = \Psi(1+s)$ から従う.

定理 6 の 2 から $A_{\mathbb{R}}^{\natural}$ は $\{\Gamma(1+s+a) | a \in \mathbb{R}\}$ から乗法で生成された自由アーベル群である. これと同型な群として $\{\delta_a = \delta(s-a) | a \in \mathbb{R}\}$ から加法で生成される自由アーベル群 $D_{\mathbb{R};Z}$ がある. $\tau_c\delta_a = \delta_{a-c}$ だから $\mathbb{R} = \{\tau_a | a \in \mathbb{R}\}$ は $D_{\mathbb{R};Z}$ に作用し この作用による $D_{\mathbb{R};z}$ の \mathbb{R} による拡大は $G_{\mathbb{R}}^{\natural}$ と同型である.

$D_{\mathbb{R};Z}$ と $A_{\mathbb{R}}^{\natural}$ の同型を具体的につくるため $|t|$ が小さいとき, 原点の近傍で正則な $f(x)$ について

$$f(x+ta) = \delta_{ta}f(x+s) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-ta)^n}{n!} \delta^{(n)}f(x+s) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-ta)^n}{n!} \frac{d^n f(x)}{dx^n}$$

となる事を利用する. これと t に関する解析接続により f が \mathbb{C} で有理型であれば $\delta_a f(x+s) = f(x+a)$ と $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{a^n}{n!} \frac{d^n f(x)}{dx^n}$ を (発散級数であっても) 同一視する. そして $\Psi(1+x+s)$ を $f(x+s)$ と取って $D_{\mathbb{R};Z}$ を $A_{\mathbb{R}}^{\natural}$ に写す写像を以下のように定義する.

$$\begin{aligned} \int_0^s \Psi(1+x+t)dt &= \log[\Gamma(1+x+s)] - \log[\Gamma(1+x)], \\ \int_{-x}^s \Psi(1+x+t)dt &= \log[\Gamma(1+x+s)] - \log[\Gamma(1)] \\ &= \log[\Gamma(1+x+s)]. \end{aligned}$$

だから

$$\exp\left(\sum_k n_k \delta_{a_k} \int_0^s \Psi(1+x+t) dt\right) = \prod_k \left[\frac{\Gamma(1+x+a_k)}{\Gamma(1+x)}\right]^{n_k}, \quad (5.1)$$

$$\exp\left[\sum_k n_k \int_{-x}^s \Psi(1+x+t) dt\right] = \prod_k [\Gamma(1+x+a_k)]^{n_k} \quad (5.2)$$

である.

定義 3. $T = \sum_k n_k \delta_{a_k} \in D_{\mathbb{R};Z}$ とする.

$$\mu_{0;\Psi} T = e^{T \int_0^s \Psi(1+s+t) dt}, \quad \mu_{-x;\Psi} T = e^{T \int_{-x}^s \Psi(1+x+t) dt} \quad (5.3)$$

で 写像 $\mu_{0;\Psi}$ と $\mu_{-x;\Psi}$ を定義する.

(13) と (14) から

定理 7. $\mu_{0;\Psi}$ は $D_{\mathbb{R};Z}$ から $A_{\mathbb{R}}^b$ の上への準同型であり

$$\ker \mu_{0;\Psi} = \mathbb{Z}\delta. \quad (5.4)$$

である. また $\mu_{-x;\Psi}$ は $D_{\mathbb{R};Z}$ から $A_{\mathbb{R}}^b$ への同型である.

注意. この節の議論では $\Psi(1+s)$ が重要だったが使用したのは次の性質だけである.

1. $\Psi(1+s)$ は \mathbb{C} で有理型で 原点で正則である.
2. 任意のあい異なる実数 a_1, \dots, a_k について $\Psi(1+a+a_1), \dots, \Psi(1+s+a_k)$ は複素数上 1 次独立である.

従ってこの 2 性質を持つ $f(s)$ を使っても同様の議論が出来る. ほかの $f(s)$ と $\Psi(1+s)$ を区別するものを探るのは問題かもしれない.

$\mu_{0;\Psi}$ と $\mu_{-x;\Psi}$ は $D_{\mathbb{R};Z} \otimes \mathbb{R}$ から $A^b \otimes \mathbb{R}$ と $A^b \otimes \mathbb{R}$ への写像に拡張できる. $D_{\mathbb{R};Z} \otimes \mathbb{R}$ の適当な位相による完備化の元を \mathbb{R} 上の 1 粒子の量子状態と見なすという論文もあり ([6]), これが $\mathfrak{g}_{\mathbb{R}}^b$ の良い位相を考える上で役立つかもしれない.

6 多変数の場合

$\left\{ \frac{\partial^{a_1}}{\partial x_1^{a_1}}, \dots, \frac{\partial^{a_n}}{\partial x_n^{a_n}} \mid (a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^n \right\}$ と $\{x_1^{a_1}, \dots, x_n^{a_n} \mid (a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^n\}$ から生成される群を $G_{\mathbb{R}^n}$, $\left\{ \log\left(\frac{\partial}{\partial x_1}\right), \dots, \log\left(\frac{\partial}{\partial x_n}\right) \mid (a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^n \right\}$ と $\{\log x_1, \dots, \log x_n \mid (a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^n\}$ から生成されるリー環を $\mathfrak{g}_{\mathbb{R}^n}$ とする. 定義から座標系を固定して

$$G_{\mathbb{R}^n} \cong \overbrace{G_{\mathbb{R}} \times \cdots \times G_{\mathbb{R}}}^n, \quad \mathfrak{g}_{\mathbb{R}^n} \cong \overbrace{\mathfrak{g}_{\mathbb{R}} \oplus \cdots \oplus \mathfrak{g}_{\mathbb{R}}}^n$$

である. なお $G_{\mathbb{R}^n}^b$ 等も $G_{\mathbb{R}}^b$ 等と同様に定義する.

$\mathfrak{g}_{\mathbb{R}^n}^b$ は $\frac{\partial}{\partial x_i}, 1 \leq i \leq n$, と $\Psi(1+s_j), 1 \leq j \leq n$ で生成されるから 解析的な座標変換で同型なリー環に移る. よって M が実解析的なら M の接バンドルに從属した $\mathfrak{g}_{\mathbb{R}^n}^b$ をファイバーとするバンドル $\mathfrak{g}^b M$ が構成できる. しかし $G_{\mathbb{R}^n}$ は局所的な生成元を持たないので対応するバンドルなどは構成できないようである.

また仮想的に $\mathfrak{g}_{\mathbb{R}^n}$ をファイバーとするバンドルを構成するには \mathcal{R} に変数変換の影響があることから M の行列バンドルを $\det M$ として $\det M \oplus \mathfrak{g}^b M$ と同型なバンドルを考える必要があるようである.

以下では簡単のため $G_{\mathbb{R}^n}^b$ 等を $G_{\mathbb{R}^n}$ 等とかく. そして $G_{\mathbb{R}^n}$ に線形群が作用するよう拡大しそれを平坦な多様体に適用する.

$\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ とする. この記法では

$$\mathcal{R}[f(\mathbf{s})](\mathbf{x}) = \int_{\mathbb{R}^n} \prod_{i=1}^n \frac{x_i^{s_i}}{\Gamma(1+s_i)} f(\mathbf{s}) d\mathbf{s}$$

となる. $\mathbf{s} = (s_1, \dots, s_n) \in \mathbb{R}^{n+}$ である. よって T を正則行列で $\det T > 0$, $\mathbf{y} = (y_1, \dots, y_n) = T\mathbf{x}$, ${}^t T^{-1}\mathbf{s} = \mathbf{t} = (t_1, \dots, t_n)$ とすれば T の \mathcal{R} への作用は

$$\mathcal{R}[f(\mathbf{t})](\mathbf{y}) = \int_{\mathbb{R}^n} \prod_{i=1}^n \frac{y_i^{t_i}}{\Gamma(1+t_i)} \det T f(\mathbf{t}) dt. \quad (6.1)$$

となる.

$G_{\mathbb{R}^n} \cong \mathbb{R}^n \rtimes \mathbf{A}_{\mathbb{R}^n}$ で $\mathbb{R}^n = \{\tau_{\mathbf{a}} | \mathbf{a} \in \mathbb{R}^n\}$ であり $\mathbf{A}_{\mathbb{R}^n}$ は

$$\Gamma_{\mathbf{0}}^{\mathbf{a}}(\mathbf{s}) = \prod_{i=1}^n \Gamma_0^{a_i}(s_i), \quad (a_1, \dots, a_n) = \mathbf{a} \in \mathbb{R}^n$$

で生成される. (17) から

補題 4. T の $\Gamma_{\mathbf{0}}^{\mathbf{a}}(\mathbf{s})$ への作用 T^* は

$$T^* \Gamma_{\mathbf{0}}^{\mathbf{a}}(\mathbf{s}) = \det T \Gamma_{\mathbf{0}}^{{}^t T^{-1}\mathbf{a}}({}^t T^{-1}\mathbf{s}) \quad (6.2)$$

で与えられる.

定義 4. $T^* \Gamma_{\mathbf{0}}^{\mathbf{a}}(\mathbf{s})$, $T \in SL(n, \mathbb{R})$, $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^n$ で (関数の積により) 生成された群を $\mathbf{A}_{SL(n, \mathbb{R}), \mathbb{R}^n}^{\sharp}$ とし

$$\mathbf{A}_{SL(n, \mathbb{R}), \mathbb{R}^n}^{\sharp} = \mathbb{R}_+ \times \mathbf{A}_{SL(n, \mathbb{R}), \mathbb{R}^n}^{\sharp} \quad (6.3)$$

と定義する.

(19) での \mathbb{R}_+ は正の値を取る定数関数からなる群とみる. $\mathbb{R}^n = \{\tau_{\mathbf{a}} | \mathbf{a} \in \mathbb{R}^n\}$ として

定義 5. $\mathbf{A}_{SL(n, \mathbb{R}), \mathbb{R}^n}^{\sharp}$ の \mathbb{R}^n による拡大として群 $G_{SL(n, \mathbb{R}), \mathbb{R}^n}^{\sharp}$ を定義する:

$$G_{SL(n, \mathbb{R}), \mathbb{R}^n}^{\sharp} = \mathbf{A}_{SL(n, \mathbb{R}), \mathbb{R}^n}^{\sharp} \rtimes \mathbb{R}^n. \quad (6.4)$$

(12) の右辺の \mathbb{R}_+ は $G_{SL(n, \mathbb{R}), \mathbb{R}^n}^{\sharp}$ の中心になる.

定義から $SL(n, \mathbb{R})$ は $G_{SL(n, \mathbb{R}), \mathbb{R}^n}^{\sharp}$ の自己同型群にふくまれる.

同様に $\mathbf{a}_{SL(n, \mathbb{R}), \mathbb{R}^n}^{\sharp}$ を $\Psi(1+t_1), \dots, \Psi(1+t_n) | \mathbf{t} = {}^t T^{-1}\mathbf{s}, T \in sL(n, \mathbb{R})$ と作用 $\frac{\partial}{\partial t_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial t_n}$ で生成されたリー環,

$$\mathbf{a}_{SL(n, \mathbb{R}), \mathbb{R}^n}^{\sharp} = \mathbb{R} \oplus \mathbf{a}_{SL(n, \mathbb{R}), \mathbb{R}^n}^{\sharp}, \quad (6.5)$$

$$\mathfrak{g}_{SL(n, \mathbb{R}), \mathbb{R}^n}^{\sharp} = \mathbb{R}^n \oplus \mathbf{a}_{SL(n, \mathbb{R}), \mathbb{R}^n}^{\sharp} \quad (6.6)$$

$\mathbb{R}^n = \{a_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + \dots + a_n \frac{\partial}{\partial x_n} | (a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^n\}$, と定義すれば $SL(n, \mathbb{R})$ は $\mathfrak{g}_{SL(n, \mathbb{R}), \mathbb{R}^n}^{\sharp}$ のリー環としての自己同型群にふくまれる. なお (13) の右辺の \mathbb{R} は (11) の右辺の \mathbb{R}_+ に対応する項である.

$f(\mathbf{x}) \in \mathbf{A}_{SL(n,\mathbb{R}),\mathbb{R}^n}^\sharp$ であれば

$$f(\mathbf{x}) = \prod_j \Gamma(c_j + \sum_i c_{ji} x_i)^{n_j}$$

の形である. よって

補題 5. $\vartheta_n f(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i} \log(f(\mathbf{x}))$ とすれば $f(\mathbf{x}) \in \mathbf{A}_{SL(n,\mathbb{R}),\mathbb{R}^n}^\sharp$ のとき

$$\vartheta_n f(\mathbf{x}) = \sum_j \left[a_{ji} \Psi(c_j + \sum_i c_{ji} x_i) \right] \quad (6.7)$$

となる.

補題 5 から $\mathbf{a}_{SL(n,\mathbb{R}),\mathbb{R}^n}^\sharp$ の適当なノルムによる完備化を $\bar{\mathbf{a}}_{SL(n,\mathbb{R}),\mathbb{R}^n}^\sharp$ とすれば 定理 3 と同様に写像

$$\psi^{-1} \vartheta_n : \mathbf{A}_{SL(n,\mathbb{R}),\mathbb{R}^n}^\sharp \rightarrow \bar{\mathbf{a}}_{SL(n,\mathbb{R}),\mathbb{R}^n}^\sharp$$

が定義され中への同型である. さらにこの写像は

$$\psi^{-1} \vartheta_n \tau_{\mathbf{a}} = \sum_{i=1}^n a_i \frac{\partial}{\partial x_i}, \quad \psi^{-1} \vartheta_n c = \log c,$$

と定義して

$$\psi^{-1} \vartheta_n : G_{SL(n,\mathbb{R}),\mathbb{R}^n}^\sharp \rightarrow \bar{\mathbf{g}}_{SL(n,\mathbb{R}),\mathbb{R}^n}^\sharp,$$

に拡張される.

注意. ϑ_n は f が特殊な形だから有効だったので一般的にはゲージ理論で使われる

$$\rho_\ell(g) = g^{-1} dg, \quad \rho_r(g) = dg \cdot g^{-1}$$

が意味のある作用素である ([1]). しかし ρ を使えば $\mathfrak{g}_{\mathbb{R}^n}^b$ をファイバーとするバンドルは TM でなく $\Lambda^p T^*M$ とする必要があるようである.

$\mathfrak{g}_{SL(n,\mathbb{R}),\mathbb{R}^n}^\sharp$ での \mathbb{R}^n は接空間とみられる. また $T \in SL(n, \mathbb{R}^n)$ は $\mathbf{a}_{SL(n,\mathbb{R}),\mathbb{R}^n}^\sharp$ に ${}^t T^{-1}$ で働く. M が向き付け可能で平坦なら M のデータナント・バンドルは 構造群が可縮な \mathbb{R}_+ だから自明になる. この事から $1 \oplus TM \oplus T^*M$, TM は M の接バンドル, に付随した $\mathfrak{g}_{SL(n,\mathbb{R}),\mathbb{R}^n}^\sharp$ をファイバーとしたバンドル $\mathfrak{g}^\sharp M$ が構成できるが このバンドルの幾何学的, 解析的意味はまだ解らない. またより簡単に構成できる $\mathfrak{g}^b M$ との関係も問題である.

参考文献

- [1] Andersson, S.I.: Nonabelian Hodge theory via heat flow, Lect. Notes in Math. 1209, eds. Naveira, A.M. Fereñandez, A. Masacará, F. 8-36, Springer, 1986. Asada, A.: Non Abelian de Rham Theory, Prospects of Mathematical Science, eds. Mitsui, T. Nagasaka, K. Kano, T., 13-40. World Sci. 1988.
- [2] Asada, A.: 関数を 1/2 回微分する. 数理の玉手箱, 藤井一幸編 90-131, 遊星社, 2010, Asada, A.: 分数冪微分に関係した積分変換とその応用, 数学・物理通信 5 巻 3 号 (2015), 22-34.
- [3] Asada, A.: Fractional calculus and Gamma function, Geometric Theory of Dynamical Systems and Related Topics, eds. Iwai, T. Tanimura, S. Yamguchi, Y. 17-38. RIMS Koukyuuroku 1692(2010), Asada, A.: Lie algebra generated by logarithm and logarithm of differentiation, Balkan J. Geom. and Its Appl. 16(2011), 1-11.

- [4] Asada,A.: Extended Borel transform and fractional calculus, to appear in Fractional Calculus, History, Theory and Applications, eds. Daou,R. Xavier,M. Nova Publishers, Asada,A.: An integral transform arising from fractional calculus, to appear in Fractional Calculus with Applications to Dynamical System, eds. Cario,C. Yang,X,J. De Gruyter Open.
- [5] Asada,A.: Groups and Lie algebras arising from Fractional Calculus, Proc. IMBIC 3, eds. Adhikari,A. Adhikari,M.R. 1-12, Inst.Math. Bio-inf. Inf.-tec.and Comp.-sci. Kolkata,2014.
- [6] Canarutto,D.: Frölicher-smooth geometries, quantum jet bundels and BRST symmetry, J. Geom. Phys. 88(2015), 113-128.
- [7] Erdéli,A. Magnus,W. Oberbettinger,F. Tricomi,F. G.: Higher Transcendental Functions, New York 1981, Degital Library of Mathematical Functions, <http://dlmf.nist.gov>.
- [8] Herrman,R.: Fractional Calculus; An Introduction to Physicists, World Sci. 2012.
- [9] Maltineau, A.: Sur les fonctionelles analytique et transform de Fourier-Borel, J. Ann. Math. 11(1963), 1-164.
- [10] Nakanishi,N.: Logarithmic type function of the differential operators, Yokohama J. Math. 55(2010), 149-163.
- [11] Purishehay,M.S.: Deformed Heisenberg algebras, fractional spin fields, and supersymmetry without fermions, Ann. Phys. 245(1996), 339-360.
- [12] Simon,B.: Trace Ideals and Their Applications, Cambridge, 1979.

量子力学における Rosen-Morse ポテンシャル問題 (2)

世戸 憲治¹ 中西 襄²

Rosen-Morse Potential Problem in Quantum Mechanics (2)

Kenji SETO³ Noboru NAKANISHI⁴

1 はじめに

前回の「量子力学における Rosen-Morse ポテンシャル問題」(「数学・物理通信」5巻4号)では、量子力学におけるポテンシャル $V(x)$ として、

$$V(x) = V_1 \tanh(x/x_0) - \frac{V_2}{\cosh^2(x/x_0)}, \quad -\infty < x < \infty \quad (1.1)$$

の形のもの扱った。今回は、ここに現れる2つの双曲線関数を三角関数とした

$$V(x) = V_1 \tan(x/x_0) + \frac{V_2}{\cos^2(x/x_0)}, \quad -\pi/2 < x/x_0 < \pi/2 \quad (1.2)$$

の場合について解析する。ここに、 x_0 は長さの次元を持つ正定数とする。また、 V_1, V_2 はエネルギーの次元を持つ定数であり、 V_2 は必ず正とするが、 V_1 は正負どちらでもよいものとする。(1.1) 式のを双曲型 Rosen-Morse ポテンシャルというのに対し、(1.2) 式のを三角型 Rosen-Morse ポテンシャルという。ただし、(1.1) 式と (1.2) 式では V_2 の符号を意図的に変えてある。

このときの Schrödinger 方程式は、電子の質量、エネルギーを、それぞれ、 m, E としたとき、

$$\left[-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2}{dx^2} + V_1 \tan(x/x_0) + \frac{V_2}{\cos^2(x/x_0)} \right] \Psi = E\Psi \quad (1.3)$$

と書かれる。以下、数式簡素化のため、座標変数 x 、および、ポテンシャルの大きさ V_1, V_2 、エネルギー E を無次元化し、改めて、

$$\frac{x}{x_0} \rightarrow x, \quad \frac{2mx_0^2}{\hbar^2} V_1 \rightarrow V_1, \quad \frac{2mx_0^2}{\hbar^2} V_2 \rightarrow V_2, \quad \frac{2mx_0^2}{\hbar^2} E \rightarrow E \quad (1.4)$$

と置き直すことにする。このときの方程式は、

$$\left[-\frac{d^2}{dx^2} + V_1 \tan(x) + \frac{V_2}{\cos^2(x)} \right] \Psi = E\Psi, \quad -\pi/2 < x < \pi/2 \quad (1.5)$$

となり、また、このときの無次元化されたポテンシャル

$$V(x) = V_1 \tan(x) + \frac{V_2}{\cos^2(x)} \quad (1.6)$$

は、 $x = \arctan[-V_1/(2V_2)]$ で最小値

$$V_{\min} = V_2 \left(1 - \frac{V_1^2}{4V_2^2} \right) \quad (1.7)$$

を持ち、 $x \rightarrow \pm\pi/2$ で無限大となる図1に示すようなものになる。

¹ 北海学園大学名誉教授

² 京都大学名誉教授

³ seto@pony.ocn.ne.jp

⁴ nbr-nak@trio.plala.or.jp

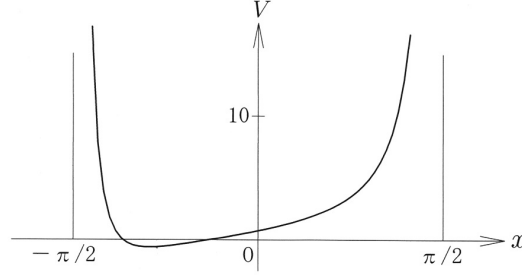


図1 Rosen-Morse ポテンシャル ($V_1 = 2, V_2 = 3/4$ とした場合)

以下, この方程式 (1.5) を用い, 有限領域 $(-\pi/2, \pi/2)$ の範囲での束縛状態としての解を求める.

2 方程式の解法

初めに波動関数 Ψ を, 実数 a を用いて,

$$\Psi = e^{ax}\Phi \quad (2.1)$$

と変換し, 方程式 (1.5) を

$$\left[\frac{d^2}{dx^2} + 2a \frac{d}{dx} - V_1 \tan(x) - \frac{V_2}{\cos^2(x)} + E + a^2 \right] \Phi = 0 \quad (2.2)$$

の形にしておく. その上で, 独立変数 x を ξ に,

$$\xi = \tan(x) \quad (2.3)$$

と変換すると, 方程式は,

$$\left[(1 + \xi^2) \frac{d^2}{d\xi^2} + 2(\xi + a) \frac{d}{d\xi} - V_2 + \frac{E + a^2 - V_1 \xi}{1 + \xi^2} \right] \Phi = 0 \quad (2.4)$$

となる. ここでさらに, 実数 b を用いて, Φ から φ に変換

$$\Phi = (1 + \xi^2)^{b/2} \varphi \quad (2.5)$$

を施すと,

$$\left[(1 + \xi^2) \frac{d^2}{d\xi^2} + 2[(b+1)\xi + a] \frac{d}{d\xi} + b - V_2 + \frac{b^2 \xi^2 + (2ab - V_1)\xi + E + a^2}{1 + \xi^2} \right] \varphi = 0 \quad (2.6)$$

となる. ここまで, a, b の値については何も述べてこなかったが, ここで, この式の大括弧中最後の項が, ξ の整式になるように,

$$2ab = V_1, \quad b^2 - a^2 = E \quad (2.7)$$

を要請する. このとき方程式は,

$$\left[(1 + \xi^2) \frac{d^2}{d\xi^2} + 2[(b+1)\xi + a] \frac{d}{d\xi} + b(b+1) - V_2 \right] \varphi = 0 \quad (2.8)$$

となる. さらに, この方程式を超幾何関数の方程式にするため, 虚数単位 i を用いて, 独立変数を ξ から ζ に

$$\zeta = \frac{1}{2}(1 + i\xi) \quad (2.9)$$

と変換すると，方程式は，

$$\left[\zeta(1-\zeta) \frac{d^2}{d\zeta^2} + [b+1-ai-2(b+1)\zeta] \frac{d}{d\zeta} + V_2 - b(b+1) \right] \varphi = 0 \quad (2.10)$$

となる．これに対し，超幾何関数 $u = F(\alpha, \beta, \gamma; \zeta)$ は

$$F(\alpha, \beta, \gamma; \zeta) = \frac{\Gamma(\gamma)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\Gamma(\alpha+k)\Gamma(\beta+k)}{\Gamma(\gamma+k)} \frac{\zeta^k}{k!} \quad (2.11)$$

で定義され，微分方程式

$$\left[\zeta(1-\zeta) \frac{d^2}{d\zeta^2} + [\gamma - (\alpha + \beta + 1)\zeta] \frac{d}{d\zeta} - \alpha\beta \right] u = 0 \quad (2.12)$$

を満たす．ここでこの方程式 (2.10) をこれに一致させるためには，これらの係数間に

$$\alpha + \beta = 2b + 1, \quad \alpha\beta = b(b+1) - V_2, \quad \gamma = b + 1 - ai \quad (2.13)$$

の関係があるとよい．

以上をまとめると，初めの波動関数 Ψ は規格化定数を除いて，

$$\Psi(x) = e^{ax} \cos^{-b}(x) F(\alpha, \beta, \gamma; \frac{1}{2}(1 + i \tan x)) \quad (2.14)$$

と解けたことになる⁵．ただし，この式に含まれる定数 $a, b, \alpha, \beta, \gamma$ を求めることがまだ残されている．

これら定数を求める前に，波動関数の境界条件について調べておこう．この波動関数 Ψ は $x \rightarrow \pm\pi/2$ でゼロに収束，すなわち，

$$\Psi \xrightarrow{x \rightarrow \pm\pi/2} 0 \quad (2.15)$$

を満たす必要がある．これを見積もるためには，(2.11) 式では不可能なので，超幾何関数の他の表示式

$$F(\alpha, \beta, \gamma; \zeta) = \frac{\Gamma(\gamma)\Gamma(\beta-\alpha)}{\Gamma(\beta)\Gamma(\gamma-\alpha)} (-\zeta)^{-\alpha} F(\alpha, \alpha-\gamma+1, \alpha-\beta+1; 1/\zeta) \\ + \frac{\Gamma(\gamma)\Gamma(\alpha-\beta)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\gamma-\beta)} (-\zeta)^{-\beta} F(\beta, \beta-\gamma+1, \beta-\alpha+1; 1/\zeta), \quad |\zeta| > 1 \quad (2.16)$$

を用いる．ここで， $\zeta = \frac{1}{2}(1 + i \tan x) = e^{ix}/(2 \cos x)$ として，(2.14) 式に代入すると，

$$\Psi(x) = e^{ax} \left[\frac{\Gamma(\gamma)\Gamma(\beta-\alpha)}{\Gamma(\beta)\Gamma(\gamma-\alpha)} (-e^{ix}/2)^{-\alpha} \cos^{\alpha-b}(x) F(\alpha, \alpha-\gamma+1, \alpha-\beta+1; 2e^{-ix} \cos(x)) \right. \\ \left. + \frac{\Gamma(\gamma)\Gamma(\alpha-\beta)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\gamma-\beta)} (-e^{ix}/2)^{-\beta} \cos^{\beta-b}(x) F(\beta, \beta-\gamma+1, \beta-\alpha+1; 2e^{-ix} \cos(x)) \right] \quad (2.17)$$

となる．以上のことを踏まえた上で，定数 $a, b, \alpha, \beta, \gamma$ を決めていくが，その前に，数式簡略化のため2個の定数

$$\mu = \frac{1}{2}V_1, \quad \nu = \frac{1}{2} + \sqrt{V_2 + \frac{1}{4}} \quad (> 1) \quad (2.18)$$

を定義しておく．初めに (2.13) の第1,2式から α, β を， b および， ν の関数として求めると，

$$\alpha = b + \nu, \quad \beta = b + 1 - \nu \quad (2.19)$$

となる．ここで， α, β を逆に定義することもできるが，超幾何関数 (2.11) 式は α, β の入れ替えに対し対称なので，これで一般性は失われない．このとき明らかに，不等式

$$\alpha - b = \nu > 1, \quad \beta - b = 1 - \nu < 0 \quad (2.20)$$

⁵超幾何関数の微分方程式 (2.12) にはもう1つ別の独立解が存在する．これについては「付録1」で述べることにするが，結果はまったく同じになる．

が成立することに注意し, (2.17) 式を用いて, $x \rightarrow \pm\pi/2$ の漸近形を求めてみる. このとき超幾何関数の部分は両方共に 1 となり, 大括弧中の 1 項目は, $\cos^{\alpha-b}(x)$ が存在するためゼロとなるので, その漸近形は

$$\Psi \sim \frac{\Gamma(\gamma)\Gamma(\alpha-\beta)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\gamma-\beta)} e^{ax} (-e^{ix}/2)^{-\beta} \cos^{\beta-b}(x) \quad (2.21)$$

となる. しかし, この式は $x \rightarrow \pm\pi/2$ で, $\beta-b < 0$ のために発散してしまう. これを防ぐには, $\Gamma(\alpha)$ あるいは, $\Gamma(\gamma-\beta)$ が極の位置にあるとよい. ここでは, $\Gamma(\alpha)$ が極になるものとして, 非負整数 n を用い α を,

$$\alpha = -n, \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (2.22)$$

とおく⁶. α の値が一旦決まると, (2.19) 式から b と β が決まり,

$$b = -(\nu+n), \quad \beta = 1 - 2\nu - n \quad (2.23)$$

と求められる. 残る a と γ は, (2.7) の第 1 式, および, (2.13) の第 3 式より,

$$a = -\frac{\mu}{\nu+n}, \quad \gamma = 1 - (\nu+n) + \frac{\mu}{\nu+n}i \quad (2.24)$$

となる. これですべての定数 $a, b, \alpha, \beta, \gamma$ が決まったが, γ だけは複素数になることに注意する. 最後に, このときの固有値としてのエネルギーは, (2.7) の第 2 式より,

$$E_n = (\nu+n)^2 - \frac{\mu^2}{(\nu+n)^2}, \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (2.25)$$

と決まる. 特に $n=0$ のときの基底エネルギーは,

$$E_0 = \nu^2 - \frac{\mu^2}{\nu^2} = \sqrt{V_2 + \frac{1}{4}} \left(1 + \frac{V_1^2}{4V_2^2}\right) + (V_2 + \frac{1}{2}) \left(1 - \frac{V_1^2}{4V_2^2}\right) \quad (2.26)$$

となるが, これは (1.7) 式で定義された V_{\min} より大きいことが証明される.

これまでに求められた定数を (2.14) 式に代入すると, 波動関数 Ψ は, 規格化定数を除いて,

$$\Psi_n(x) = e^{-p_n x} \cos^{\nu+n}(x) F\left(-n, 1 - 2\nu - n, 1 - (\nu+n) + p_n i; \frac{1}{2}(1 + i \tan x)\right) \quad (2.27)$$

と求められたことになる. ここに,

$$p_n = \frac{\mu}{\nu+n} \quad (2.28)$$

と定義する.

ここで求めた固有関数の規格化積分を実行してみる. この計算は (2.27) 式のままでは大変面倒になるので, 超幾何関数に関する Kummer の変換式,

$$F(\alpha, \beta, \gamma; \zeta) = (1-\zeta)^{-\alpha} F(\alpha, \gamma-\beta, \gamma; \zeta/(\zeta-1)) \quad (2.29)$$

を用いて,

$$\Psi_n(x) = 2^{-n} e^{-(p_n+i\nu)x} \cos^{\nu}(x) F\left(-n, \nu+p_n i, 1 - (\nu+n) + p_n i; -e^{2ix}\right) \quad (2.30)$$

と変換しておく. この超幾何関数の部分は e^{2ix} の n 次多項式となるので, 具体的に n の値を与えた上で, 絶対値の 2 乗を求め積分する. このときの積分には積分公式⁷

$$\int_{-\pi/2}^{\pi/2} e^{-2px} \cos^{2\nu}(x) dx = \frac{\pi \Gamma(2\nu+1)}{2^{2\nu} \Gamma(\nu+1+pi) \Gamma(\nu+1-pi)}, \quad \Re(\nu) > -1 \quad (2.31)$$

⁶ $\Gamma(\gamma-\beta)$ を極とした場合を「付録 2」に示すが, 結果はまったく同じになる.

⁷ 「新数学公式集 1」(丸善) p.448, 2.5.33, 2. の公式を, ここでの使用に使いやすく変形したもの.

が使える。しかし、 n 番号が大きくなるにつれ計算量は急激に増えていくので、ここでは、 $n = 0, 1, 2, 3$ の場合についてのみ実行することにする。結果は、規格化定数を

$$N_n^2 \equiv \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \overline{\Psi_n(x)} \Psi_n(x) dx \quad (2.32)$$

としたとき、

$$\begin{aligned} N_0^2 &= \frac{\pi \Gamma(2\nu + 1)}{2^{2\nu} \Gamma(\nu + 1 + p_0 i) \Gamma(\nu + 1 - p_0 i)} \\ N_1^2 &= \frac{\pi(\nu + 1) \Gamma(2\nu + 1)}{2^{2\nu+1} \Gamma(\nu + 2 + p_1 i) \Gamma(\nu + 2 - p_1 i)} \\ N_2^2 &= \frac{\pi(\nu + 2)(2\nu + 1) \Gamma(2\nu + 1)}{2^{2\nu+2} \Gamma(\nu + 3 + p_2 i) \Gamma(\nu + 3 - p_2 i)} \\ N_3^2 &= \frac{3\pi(\nu + 1)(\nu + 3)(2\nu + 1) \Gamma(2\nu + 1)}{2^{2\nu+3} \Gamma(\nu + 4 + p_3 i) \Gamma(\nu + 4 - p_3 i)} \end{aligned} \quad (2.33)$$

と求められる。これら式の導出過程は大変長くなるので、「付録 3」で述べることにする。この結果から、一般の n に対する推定式をたてると、

$$N_n^2 = \frac{\pi n! (\nu + n) \Gamma(2\nu + n)}{2^{2\nu+2n-1} \Gamma(\nu + n + 1 + p_n i) \Gamma(\nu + n + 1 - p_n i)} \quad (2.34)$$

になるものと考えられる。この式は証明されたものではないが、 $n = 0, 1, 2, 3$ の場合を無駄なく自然に再現するものであり、間違いなく正しいものとして扱って良いであろう。実際、 $p_n \rightarrow 0, \nu \rightarrow 0$ の極限では、(2.32) 式を任意の n につき直接計算できるが、それは確かに (2.34) 式の $p_n = \nu = 0$ のときの値と一致している (付録 4 参照)。これから、 $\Psi_n(x)/N_n$ が規格化された固有関数となる。

3 固有関数のグラフ表示

前節で求めた規格化された固有関数を、数値計算によりグラフ化してみる。グラフ化するときに 1 つ問題となるのは、(2.27) あるいは、(2.30) 式のままでは、波動関数が複素数になっているので、表示が面倒になる。そこで、 $n = 0, 1, 2$ の場合に限って、実部と虚部を分離したより具体的な表示式

$$\Psi_0(x) = e^{-p_0 x} \cos^\nu(x),$$

$$\Psi_1(x) = e^{-p_1 x} \cos^\nu(x) \frac{p_1 - \nu i}{\nu^2 + p_1^2} [p_1 \cos(x) + \nu \sin(x)],$$

$$\Psi_2(x) = e^{-p_2 x} \cos^\nu(x) \frac{\nu(\nu + 1) - p_2^2 + (2\nu + 1)p_2 i}{2(\nu^2 + p_2^2)[(\nu + 1)^2 + p_2^2]} \left[[\nu(\nu + 1) - p_2^2] \cos(2x) - (2\nu + 1)p_2 \sin(2x) - (\nu^2 + p_2^2) \right] \quad (3.1)$$

を導入する。さらに、この Ψ_1, Ψ_2 は、角度 θ_1, θ_2 、および、定数 C_2 を

$$\theta_1 = -\arctan\left(\frac{\nu}{p_1}\right), \quad \theta_2 = \arctan\left(\frac{(2\nu + 1)p_2}{\nu(\nu + 1) - p_2^2}\right), \quad C_2 = \sqrt{\frac{\nu^2 + p_2^2}{(\nu + 1)^2 + p_2^2}} \quad (3.2)$$

と定義すると、

$$\begin{aligned} \Psi_1(x) &= e^{-p_1 x} \cos^\nu(x) \cos(x + \theta_1) e^{i\theta_1}, \\ \Psi_2(x) &= \frac{1}{2} e^{-p_2 x} \cos^\nu(x) [\cos(2x + \theta_2) - C_2] e^{i\theta_2} \end{aligned} \quad (3.3)$$

とよりスマートに表すことができる。この式で分かるように、虚数は $e^{i\theta_n}$, ($n = 1, 2$) の形でしか含まれない。そこで、グラフ化するときには、この位相因子を除いた実数部分のみを表示することにする。

もう 1 つ問題となるのは、(2.33) 式に含まれる因子 $\Gamma(\nu + n + 1 + p_n i)\Gamma(\nu + n + 1 - p_n i)$ は確かに正定値ではあるが、数値計算をするとき複素ガンマ関数がプログラム言語では使えないことである。そこで、 ν は半整数のものに限定することにする。これは、公式

$$\begin{aligned} & \Gamma(\nu + n + 1 + p_n i)\Gamma(\nu + n + 1 - p_n i) \\ &= [(\nu + n)^2 + p_n^2][(\nu + n - 1)^2 + p_n^2] \cdots [(\frac{3}{2})^2 + p_n^2][(\frac{1}{2})^2 + p_n^2] \frac{\pi}{\cosh(\pi p_n)} \end{aligned} \quad (3.4)$$

が使えるようにするためである。

以上のことを踏まえ、数値計算にあたって、(1.6) 式におけるポテンシャルの大きさ V_1, V_2 , および、それから派生する (2.18) 式の変数 μ, ν の値を、

$$V_1 = 2, \quad V_2 = 3/4, \quad \Rightarrow \quad \mu = 1, \quad \nu = 3/2 \quad (3.5)$$

とおくことにする。

結果のグラフを以下の図 2 に示す。このときのポテンシャルは原点に対し対称ではないので、結果の固有関数も対称、あるいは反対称にはならない。各グラフとも x 軸を過ぎる回数はモード番号 (n 番号) と同じになることは通常固有関数の場合と同じである。

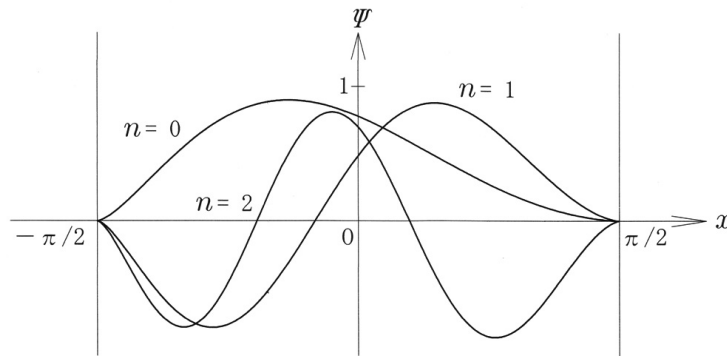


図 2 規格化された波動関数

4 おわりに

今回の稿を書くにあたって、最も苦心したのは、固有関数 $\Psi_n(x)$ の規格化積分 (2.32) 式をいかに簡潔な形で実行するかという点であった。初めは、この積分を (3.3) 式に基づいて実行していた。ところが、このときは被積分関数に指数関数と cosine 関数の他に sine 関数も入ってくるので、(2.31) 式よりさらに複雑な積分公式が必要になる。実際に実行してみると $\Psi_2(x)$ の規格化だけで、計算用紙が 10 枚ほど必要になる。規格化積分の n に対する一般形を予測するには、少なくとも $\Psi_3(x)$ までの積分が必要である。後になって、(2.29) 式に示す超幾何関数の Kummer の変換式を用いて固有関数を変換しておく、被積分関数は指数関数と cosine 関数だけになり、計算がかなりの程度緩和されることがわかった。とは言っても、実際に $\Psi_3(x)$ の規格化積分を実行するには、かなり大変な量の計算が必要となるが、努力の結果ここまでは求めることに成功した。さらにこれから、一般の n に対する規格化定数の推定式を求めることができたことは、現著者たちの大きな喜びである。

5 付録1：超幾何関数のもう1つの独立解について

超幾何関数が満たす微分方程式 (2.12) には, $u = F(\alpha, \beta, \gamma; \zeta)$ の他にもう一つの独立解

$$u = \zeta^{1-\gamma} F(\alpha - \gamma + 1, \beta - \gamma + 1, 2 - \gamma; \zeta) \quad (5.1)$$

が存在するので, この解を採用したときはどうなるかを考察してみよう. $\zeta = \frac{1}{2}(1 + i \tan x)$ として, これを (2.14) 式に代入すると, (2.13) の第3式より, $1 - \gamma = ai - b$ となるので,

$$\Psi(x) = 2^{b-ai} e^{-bix} \cos^{-ai}(x) F(\alpha - \gamma + 1, \beta - \gamma + 1, 2 - \gamma; \frac{1}{2}(1 + i \tan x)) \quad (5.2)$$

となる. これと (2.14) 式を比較すると, 係数と超幾何関数の部分を除いて, (2.14) 式の a, b を, それぞれ, $-bi, ai$ と置き換えたものになる. また, 超幾何関数の部分は,

$$\alpha' = \alpha - \gamma + 1, \quad \beta' = \beta - \gamma + 1, \quad \gamma' = 2 - \gamma \quad (5.3)$$

と置き換え, (2.13) 式を用いると,

$$\alpha' + \beta' = 2ai + 1, \quad \alpha'\beta' = ai(ai + 1) - V_2, \quad \gamma' = ai + 1 - b \quad (5.4)$$

となり, これは元の (2.13) 式と比べると, 前と同じく, a, b を, それぞれ, $-bi, ai$ と置き換えたものになっている. この置き換えは, (2.7) 式に含まれる因子 $ab, b^2 - a^2$ を不変に保つことに注意する. この (5.4) の第1, 2式から, α', β' を求めると, (2.18) 式で定義した ν を用いて,

$$\alpha' = ai + \nu, \quad \beta' = ai + 1 - \nu \quad (5.5)$$

となる. 一方, このときの波動関数の $x \rightarrow \pm\pi/2$ での漸近形を求めるには, (2.17) 式で, $\alpha, \beta, \gamma, a, b$ を, それぞれ, $\alpha', \beta', \gamma', -ib, ai$ で置き換え, $\alpha' - ai = \nu > 1$ を考慮すると1項目はゼロに収束するので,

$$\Psi \sim 2^{b-ai} \frac{\Gamma(\gamma')\Gamma(\alpha' - \beta')}{\Gamma(\alpha')\Gamma(\gamma' - \beta')} e^{-bix} (-e^{ix}/2)^{-\beta'} \cos^{\beta'-ai}(x) \quad (5.6)$$

となるが, $\beta' - ai = 1 - \nu < 0$ なのでこれは発散してしまう. これを救うためには, $\Gamma(\alpha')$ が極の位置にあるとよく⁸, 非負整数 n を用いて,

$$\alpha' = -n \quad (5.7)$$

となる. 以下, (2.22) 式から (2.25) 式までと同様に, (5.5) 式から,

$$ai = -(\nu + n), \quad \beta' = -2\nu + 1 - n \quad (5.8)$$

(2.7) 式から

$$-bi = -\frac{\mu}{\nu + n}, \quad E_n = (\nu + n)^2 - \frac{\mu^2}{(\nu + n)^2} \quad (5.9)$$

(5.4) の第3式から,

$$\gamma' = -(\nu + n) + 1 + \frac{\mu}{\nu + n} i \quad (5.10)$$

と求められる. ここで求めた $\alpha', \beta', \gamma', E_n$ は (2.22) - (2.25) 式までに求めた $\alpha, \beta, \gamma, E_n$ と同じになり, また, ここで求めた a, b は純虚数になり, $-bi, ai$ は前に求めた a, b と同じになる. この結果から, 超幾何関数のもう1つの解を採用した場合も, 波動関数にしたときは, 2節で求めた解と完全に一致する.

⁸もちろん, $\Gamma(\gamma' - \beta')$ が極になってもよいが, つぎの「付録2」で示すように結果は同じになる.

6 付録2 : $\Gamma(\gamma - \beta)$ を極とした場合

(2.21) 式のところで, $\Gamma(\gamma - \beta)$ が極になるものとする,

$$\gamma - \beta = -n, \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (6.1)$$

となり, (2.13) の第3式, (2.19) の第2式より, $\gamma - \beta = \nu - ai$ となるので, この式は,

$$ai = \nu + n \quad (6.2)$$

となる. さらに, (2.7) 式から

$$b = \frac{\mu}{\nu + n}i, \quad E_n = (\nu + n)^2 - \frac{\mu^2}{(\nu + n)^2} \quad (6.3)$$

となり, b が決まると, (2.19) 式から, α, β が

$$\alpha = \nu + \frac{\mu}{\nu + n}i, \quad \beta = 1 - \nu + \frac{\mu}{\nu + n}i \quad (6.4)$$

と決まる. 最後に, (2.13) 第3式から, γ が,

$$\gamma = 1 - (\nu + n) + \frac{\mu}{\nu + n}i \quad (6.5)$$

と決まる. これらの結果を, (2.14) 式に代入すると, (2.28) 式で定義した p_n を用いて,

$$\Psi_n(x) = e^{-(\nu+n)ix} \cos^{-p_n i}(x) F\left(\nu + p_n i, 1 - \nu + p_n i, 1 - (\nu + n) + p_n i; \frac{1}{2}(1 + i \tan x)\right) \quad (6.6)$$

となる. これは, 2節で求めた (2.27) 式とはまったく異なる形をしているが, 超幾何関数の Kummer の変換式

$$F(\alpha, \beta, \gamma; \zeta) = (1 - \zeta)^{\gamma - \alpha - \beta} F(\gamma - \alpha, \gamma - \beta, \gamma; \zeta) \quad (6.7)$$

を用いると,

$$\Psi_n(x) = 2^{\nu+n+p_n i} e^{-p_n x} \cos^{\nu+n}(x) F\left(-n, 1 - 2\nu - n, 1 - (\nu + n) + p_n i; \frac{1}{2}(1 + i \tan x)\right) \quad (6.8)$$

となって, これは, 定数係数を除いて, (2.27) 式と完全に一致する.

7 付録3 : 規格化積分の計算

ここでは, 規格化積分 (2.33) 式を導いた概略を述べることにする. $n = 0$ の場合は積分公式 (2.31) から自明.

$n = 1$ の場合 : (2.30) 式より,

$$\Psi_1(x) = 2^{-1} e^{-(p_1+i)x} \cos^\nu(x) \left(1 + \frac{\nu + p_1 i}{-\nu + p_1 i} e^{2ix}\right) \quad (7.1)$$

だから

$$|\Psi_1(x)|^2 = e^{-2p_1 x} \cos^{2\nu}(x) \cdot 2^{-2} \left(2 + \frac{\nu + p_1 i}{-\nu + p_1 i} e^{2ix} + \frac{\nu - p_1 i}{-\nu - p_1 i} e^{-2ix}\right). \quad (7.2)$$

積分公式 (2.31) を用いて,

$$N_1^2 = \frac{\pi \Gamma(2\nu + 1)}{2^{2\nu+2} \Gamma(\nu + 2 + p_1 i) \Gamma(\nu + 2 - p_1 i)} K_1, \quad (7.3)$$

ただし

$$K_1 \equiv 2(\nu + 1 + p_1 i)(\nu + 1 - p_1 i) - (\nu + p_1 i)(\nu + 1 - p_1 i) - (\nu - p_1 i)(\nu + 1 + p_1 i) = 2(\nu + 1). \quad (7.4)$$

したがって

$$N_1^2 = \frac{\pi(\nu+1)\Gamma(2\nu+1)}{2^{2\nu+1}\Gamma(\nu+2+p_1i)\Gamma(\nu+2-p_1i)} \quad (7.5)$$

となる.

$n=2$ の場合 : (2.30) 式より,

$$\Psi_2(x) = 2^{-2}e^{-(p_2+2i)x} \cos^\nu(x) \left(1 + \frac{2(\nu+p_2i)}{-\nu-1+p_2i} e^{2ix} + \frac{(\nu+p_2i)(\nu+1+p_2i)}{(-\nu-1+p_2i)(-\nu+p_2i)} e^{4ix} \right) \quad (7.6)$$

だから

$$\begin{aligned} |\Psi_2(x)|^2 &= e^{-2p_2x} \cos^{2\nu}(x) \cdot 2^{-4} \\ &\left(1 + \frac{4(\nu^2+p_2^2)}{(\nu+1)^2+p_2^2} + 1 + \frac{2(\nu+p_2i)}{-\nu-1+p_2i} e^{2ix} + \frac{2(\nu-p_2i)}{-\nu-1-p_2i} e^{-2ix} \right. \\ &+ \frac{2(\nu+p_2i)}{-\nu-1+p_2i} e^{2ix} + \frac{2(\nu-p_2i)}{-\nu-1-p_2i} e^{-2ix} \\ &\left. + \frac{(\nu+p_2i)(\nu+1+p_2i)}{(-\nu-1+p_2i)(-\nu+p_2i)} e^{4ix} + \frac{(\nu-p_2i)(\nu+1-p_2i)}{(-\nu-1-p_2i)(-\nu-p_2i)} e^{-4ix} \right). \end{aligned} \quad (7.7)$$

積分公式 (2.31) を用いて,

$$N_2^2 = \frac{\pi\Gamma(2\nu+1)}{2^{2\nu+4}\Gamma(\nu+3+p_2i)\Gamma(\nu+3-p_2i)} K_2, \quad (7.8)$$

ただし

$$\begin{aligned} K_2 &= \left[2((\nu+1)^2+p_2^2) + 4(\nu^2+p_2^2) \right] \left[(\nu+2)^2+p_2^2 \right] - 8(\nu^2+p_2^2) \left[(\nu+2)^2+p_2^2 \right] \\ &+ (\nu+p_2i)(\nu+1+p_2i)(\nu-1-p_2i)(\nu+2-p_2i) \\ &+ (\nu-p_2i)(\nu+1-p_2i)(\nu-1+p_2i)(\nu+2+p_2i). \end{aligned} \quad (7.9)$$

この計算は p_2 の冪ごとにやればよい. 奇数冪は虚数だから明らかに 0. p_2^4 の係数は $6-8+2=0$. p_2^2 の係数は

$$\begin{aligned} &2(\nu+1)^2 + 4\nu^2 + 6(\nu+2)^2 - 8\nu^2 - 8(\nu+2)^2 \\ &+ 2[-(\nu-1)(\nu+2) + (\nu+1)(\nu+2) + (\nu+1)(\nu-1) + \nu(\nu+2) + \nu(\nu-1) - \nu(\nu+1)] = 0. \end{aligned} \quad (7.10)$$

定数項は

$$[2(\nu+1)^2 + 4\nu^2](\nu+2)^2 - 8\nu^2(\nu+2)^2 + 2\nu(\nu^2-1)(\nu+2) = 4(\nu+2)(2\nu+1). \quad (7.11)$$

したがって

$$N_2^2 = \frac{\pi(\nu+2)(2\nu+1)\Gamma(2\nu+1)}{2^{2\nu+2}\Gamma(\nu+3+p_2i)\Gamma(\nu+3-p_2i)} \quad (7.12)$$

となる.

$n=3$ の場合 : (2.30) 式より,

$$\begin{aligned} \Psi_3(x) &= 2^{-3}e^{-(p_3+3i)x} \cos^\nu(x) \left(1 + \frac{3(\nu+p_3i)}{-\nu-2+p_3i} e^{2ix} + \frac{3(\nu+p_3i)(\nu+1+p_3i)}{(-\nu-2+p_3i)(-\nu-1+p_3i)} e^{4ix} \right. \\ &\left. + \frac{(\nu+p_3i)(\nu+1+p_3i)(\nu+2+p_3i)}{(-\nu-2+p_3i)(-\nu-1+p_3i)(-\nu+p_3i)} e^{6ix} \right) \end{aligned} \quad (7.13)$$

だから

$$\begin{aligned}
|\Psi_3(x)|^2 = & e^{-3p_3x} \cos^{2\nu}(x) \cdot 2^{-6} \left(1 + \frac{9(\nu^2 + p_3^2)}{(\nu + 2)^2 + p_3^2} + \frac{9(\nu^2 + p_3^2)}{(\nu + 2)^2 + p_3^2} + 1 \right. \\
& + \frac{6(\nu + p_3i)}{-\nu - 2 + p_3i} e^{2ix} + \frac{6(\nu - p_3i)}{-\nu - 2 - p_3i} e^{-2ix} + \frac{9(\nu^2 + p_3^2)(\nu + 1 + p_3i)}{((\nu + 2)^2 + p_3^2)(-\nu - 1 + p_3i)} e^{2ix} \\
& + \frac{9(\nu^2 + p_3^2)(\nu + 1 - p_3i)}{((\nu + 2)^2 + p_3^2)(-\nu - 1 - p_3i)} e^{-2ix} + \frac{6(\nu + p_3i)(\nu + 1 + p_3i)}{(-\nu - 2 + p_3i)(-\nu - 1 + p_3i)} e^{4ix} \\
& + \frac{6(\nu - p_3i)(\nu + 1 - p_3i)}{(-\nu - 2 - p_3i)(-\nu - 1 - p_3i)} e^{-4ix} + \frac{(\nu + p_3i)(\nu + 1 + p_3i)(\nu + 2 + p_3i)}{(-\nu - 2 + p_3i)(-\nu - 1 + p_3i)(-\nu + p_3i)} e^{6ix} \\
& \left. + \frac{(\nu - p_3i)(\nu + 1 - p_3i)(\nu + 2 - p_3i)}{(-\nu - 2 - p_3i)(-\nu - 1 - p_3i)(-\nu - p_3i)} e^{-6ix} \right). \tag{7.14}
\end{aligned}$$

積分公式 (2.31) を用いて,

$$N_3^2 = \frac{\pi \Gamma(2\nu + 1)}{2^{2\nu+6} \Gamma(\nu + 4 + p_3i) \Gamma(\nu + 4 - p_3i)} K_3 \tag{7.15}$$

ただし

$$\begin{aligned}
K_3 \equiv & 2((\nu + 1)^2 + p_3^2)((\nu + 2)^2 + p_3^2)((\nu + 3)^2 + p_3^2) \\
& + 18(\nu^2 + p_3^2)((\nu + 1)^2 + p_3^2)((\nu + 3)^2 + p_3^2) \\
& - 6(\nu^2 + p_3^2)((\nu + 3)^2 + p_3^2) \left[(\nu + 2 + p_3i)(\nu + 1 - p_3i) + (\nu + 2 - p_3i)(\nu + 1 + p_3i) \right] \\
& - 9(\nu^2 + p_3^2)((\nu + 3)^2 + p_3^2) \left[(\nu - p_3i)(\nu + 1 + p_3i) + (\nu + p_3i)(\nu + 1 - p_3i) \right] \\
& + 6(\nu^2 + p_3^2)((\nu + 3)^2 + p_3^2) \left[(\nu - 1 - p_3i)(\nu + 1 + p_3i) + (\nu - 1 + p_3i)(\nu + 1 - p_3i) \right] \\
& - \left[(\nu + p_3i)(\nu + 1 + p_3i)(\nu + 2 + p_3i)(\nu + 3 - p_3i)(\nu - 1 - p_3i)(\nu - 2 - p_3i) \right. \\
& \left. + (\nu - p_3i)(\nu + 1 - p_3i)(\nu + 2 - p_3i)(\nu + 3 + p_3i)(\nu - 1 + p_3i)(\nu - 2 + p_3i) \right]. \tag{7.16}
\end{aligned}$$

中央の4項をまとめると

$$-18(\nu + 1)(\nu^2 + p_3^2)((\nu + 3)^2 + p_3^2). \tag{7.17}$$

最後の [] 内を計算すると,

$$2 \left[p_3^6 + (3\nu^2 + 3\nu + 5)p_3^4 + (3\nu^4 + 6\nu^3 - 39\nu - 32)p_3^2 + (\nu - 2)(\nu - 1)\nu(\nu + 1)(\nu + 2)(\nu + 3) \right]. \tag{7.18}$$

これらを (7.16) 式に代入すれば

$$K_3 = 24(\nu + 1)(\nu + 3)(2\nu + 1). \tag{7.19}$$

したがって

$$N_3^2 = \frac{3\pi(\nu + 1)(\nu + 3)(2\nu + 1)\Gamma(2\nu + 1)}{2^{2\nu+3}\Gamma(\nu + 4 + p_3i)\Gamma(\nu + 4 - p_3i)} \tag{7.20}$$

となる.

以上の K_n ($n = 1, 2, 3$) の計算で, p_n 依存性がすべて消え, また ν の $n + 1$ 乗以上の冪がすべてキャンセルするのは見事で, この事実は計算途中の間違いを正すのに非常に好都合である.

8 付録4：推定式 (2.34) に対する1つの傍証

ここでは、一般の n に対し求められた規格化定数の推定式 (2.34) が、正しいと考えられる1つの傍証を与える。この (2.34) 式は、 $p_n \rightarrow 0, \nu \rightarrow 0$ という極限をとったとき、

$$N_n^2 = \pi, \text{ for } n = 0, \quad \pi/2^{2n-1}, \text{ for } n = 1, 2, 3, \dots \quad (8.1)$$

となる。一方、この極限を要請したときの波動関数は、(2.30) 式から簡単な形で求められるので、一般の n に対する規格化積分を実行することが可能になり、この (8.1) 式の結果を再現することを示す。

初めに、 $n = 0$ の場合、(2.30) 式の超幾何関数の部分は1となるので、この極限では $\Psi_0(x) = 1$ となり、規格化積分の結果が (8.1) 式になることは自明である。

以下、 $n \neq 0$ に対し、(2.30) 式に現れる超幾何関数を展開した形で書くと、

$$\begin{aligned} & F\left(-n, \nu + p_n i, 1 - \nu - n + p_n i; -e^{2ix}\right) \\ &= 1 + \frac{(-n)(\nu + p_n i)}{(1 - \nu - n + p_n i)}(-e^{2ix}) + \frac{(-n)(1-n)(\nu + p_n i)(1 + \nu + p_n i)}{(1 - \nu - n + p_n i)(2 - \nu - n + p_n i)} \frac{(-e^{2ix})^2}{2!} \\ & \quad \dots + \frac{(-n)(1-n) \cdots (-1)(\nu + p_n i)(1 + \nu + p_n i) \cdots (n-1 + \nu + p_n i)}{(1 - \nu - n + p_n i)(2 - \nu - n + p_n i) \cdots (-\nu + p_n i)} \frac{(-e^{2ix})^n}{n!} \end{aligned} \quad (8.2)$$

となる。ここで、 $\nu \rightarrow 0, p_n \rightarrow 0$ の極限をとると、右辺の第1項と最後の項を除いて、ゼロとなるので、

$$\lim_{\nu \rightarrow 0, p_n \rightarrow 0} F\left(-n, \nu + p_n i, 1 - \nu - n + p_n i; -e^{2ix}\right) = 1 + (-1)^n c_n e^{2inx} \quad (8.3)$$

となる。ただし、 c_n を

$$c_n = \lim_{\nu \rightarrow 0, p_n \rightarrow 0} \frac{\nu + p_n i}{\nu - p_n i}, \quad |c_n| = 1 \quad (8.4)$$

とおいた。この c_n は ν と p_n の極限の取り方に依存した形で決まる量であるが、その絶対値は必ず1となる。

以上の結果から、この極限を施したときの波動関数は、(2.30) 式から、

$$\Psi_n(x) = 2^{-n} e^{-inx} [1 + (-1)^n c_n e^{2inx}] \quad (8.5)$$

となり、またその絶対値の2乗は

$$|\Psi_n(x)|^2 = 2^{-2n} [2 + (-1)^n (c_n e^{2inx} + \bar{c}_n e^{-2inx})] \quad (8.6)$$

となる。これを x で積分すると、 c_n の値に無関係に

$$\int_{-\pi/2}^{\pi/2} |\Psi(x)|^2 dx = \pi/2^{2n-1} \quad (8.7)$$

となり、(8.1) 式の結果と一致する。もちろんこれは (2.34) 式を保証するものではないが、その正しさを強く支持するものである。

三角関数の冪乗の有限和 2

Finite Sums of Powers of Trigonometrical Functions, II

中西 襄^{*1}

Noboru Nakanishi

1 はじめに ($S_k(n)$ の場合)

筆者は数学・物理通信 5-4 において, いろいろな三角関数の冪乗の有限和を与える公式の証明が, 留数定理を用いる方法を使えば統一的に与えられることを示した. しかし残念ながら, この計算法は最も簡単というわけではない. 前論文 7 節において, 級数

$$S_k(n) \equiv \sum_{r=1}^n \cot^{2k} \left(\frac{r\pi}{2n+1} \right) \quad (1.1)$$

は, 初等的, かつより簡単に計算できることを示した. すなわち, ド・モアブルの公式の虚部を考えることにより, n 次代数方程式

$$\sum_{j=0}^n (-1)^j {}_{2n+1}C_{2j+1} x^{n-j} = 0 \quad (1.2)$$

の n 個の相異なる解は, $x = \alpha_r(n) \equiv \cot^2(r\pi/(2n+1))$ ($r = 1, 2, \dots, n$) であることが示せる. これから, 解と係数の関係により $\alpha_r(n)$ の m 次基本対称式 ($m = 1, 2, \dots, n$) が分かるので, $S_k(n)$ はそれらで表される:

$$\begin{aligned} S_1(n) &= \frac{{}_{2n+1}C_3}{2n+1}, \\ S_2(n) &= \left(\frac{{}_{2n+1}C_3}{2n+1} \right)^2 - 2 \cdot \frac{{}_{2n+1}C_5}{2n+1}, \\ S_3(n) &= \left(\frac{{}_{2n+1}C_3}{2n+1} \right)^3 - 3 \cdot \frac{{}_{2n+1}C_3 \cdot {}_{2n+1}C_5}{(2n+1)^2} + 3 \cdot \frac{{}_{2n+1}C_7}{2n+1}, \\ S_4(n) &= \left(\frac{{}_{2n+1}C_3}{2n+1} \right)^4 - 4 \cdot \frac{[{}_{2n+1}C_3]^2 \cdot {}_{2n+1}C_5}{(2n+1)^3} + 2 \cdot \left(\frac{{}_{2n+1}C_5}{2n+1} \right)^2 \\ &\quad + 4 \cdot \frac{{}_{2n+1}C_3 \cdot {}_{2n+1}C_7}{(2n+1)^2} - 4 \cdot \frac{{}_{2n+1}C_9}{2n+1}. \end{aligned} \quad (1.3)$$

$k = 1, 2, 3$ について計算した結果は,

$$\begin{aligned} S_1(n) &= \frac{1}{3}n(2n-1), \\ S_2(n) &= \frac{1}{45}n(2n-1)(4n^2+10n-9), \\ S_3(n) &= \frac{1}{945}n(2n-1)(32n^4+112n^3+8n^2-252n+135) \end{aligned} \quad (1.4)$$

であった.

本稿では, 他の 3 種の級数についてもこの方法が拡張できることを示す.

^{*1} 京都大学名誉教授

2 $\tilde{S}_k(n)$ の場合

前節の考察を少し変形するだけで

$$\tilde{S}_k(n) \equiv \sum_{r=1}^n \tan^{2k} \left(\frac{r\pi}{2n+1} \right) \quad (2.1)$$

も簡単に計算することができる. 要は, \tan が \cot の逆数だということに気付けばよい. (1.2) において $x^{-1} = y$ とおき y^n を掛ければ, y に関する n 次代数方程式を得る. 降冪の順に書き直すと,

$$\sum_{j=0}^n (-1)^j {}_{2n+1}C_{2(n-j)+1} y^{n-j} = 0 \quad (2.2)$$

となる. この方程式は n 個の相異なる解 $y = [\alpha_r(n)]^{-1} = \tan^2(r\pi/(2n+1))$ ($r = 1, 2, \dots, n$) をもつ. $[\alpha_r(n)]^{-1}$ の m 次基本対称式を $\tilde{\sigma}_m(n)$ と書けば, 解と係数との関係により,

$$\tilde{\sigma}_m(n) = {}_{2n+1}C_{2(n-m)+1} \quad (2.3)$$

が成り立つ. 前論文 (7.5) 式に相当する式から,

$$\begin{aligned} \tilde{S}_1(n) &= {}_{2n+1}C_{2n-1}, \\ \tilde{S}_2(n) &= [{}_{2n+1}C_{2n-1}]^2 - 2[{}_{2n+1}C_{2n-3}], \\ \tilde{S}_3(n) &= [{}_{2n+1}C_{2n-1}]^3 - 3[{}_{2n+1}C_{2n-1}][{}_{2n+1}C_{2n-3}] + 3[{}_{2n+1}C_{2n-5}], \\ \tilde{S}_4(n) &= [{}_{2n+1}C_{2n-1}]^4 - 4[{}_{2n+1}C_{2n-1}]^2[{}_{2n+1}C_{2n-3}] + 2[{}_{2n+1}C_{2n-3}]^2 \\ &\quad + 4[{}_{2n+1}C_{2n-1}][{}_{2n+1}C_{2n-5}] - 4[{}_{2n+1}C_{2n-7}] \end{aligned} \quad (2.4)$$

が得られる. 計算は \cot の場合よりずっと簡単で, $k = 1, 2, 3$ の結果は

$$\begin{aligned} \tilde{S}_1(n) &= n(2n+1), \\ \tilde{S}_2(n) &= \frac{1}{3}n(2n+1)(4n^2 + 6n - 1), \\ \tilde{S}_3(n) &= \frac{1}{15}n(2n+1)(32n^4 + 80n^3 + 40n^2 - 20n + 3) \end{aligned} \quad (2.5)$$

となる.

3 $U_k(n)$ の場合

前論文 (2.13) 式の

$$U_k(n) \equiv \sum_{r=1}^n \cot^{2k} \left(\frac{(2r-1)\pi}{4n} \right) \quad (3.1)$$

についても同様の計算法を考案しよう.

任意の整数 r について, $\exp(i(2r-1)\pi/2)$ は $\pm i$ であるから,

$$\Re \left[\exp \left(i \frac{(2r-1)\pi}{4n} \right) \right]^{2n} = 0 \quad (3.2)$$

である. $\sin((2r-1)\pi/(4n))$ が 0 でない実数であることを使うと, この式は

$$\Re \left[\cot \left(\frac{(2r-1)\pi}{4n} \right) + i \right]^{2n} = 0 \quad (3.3)$$

と書き直せる．これを展開すれば， n 次代数方程式

$$\sum_{j=0}^n (-1)^j {}_{2n}C_{2(n-j)} x^{n-j} = 0 \quad (3.4)$$

の n 個の相異なる解が， $x = \cot^2((2r-1)\pi/(4n))$ ($r = 1, 2, \dots, n$) であることがわかる．したがって，解と係数の関係から基本対称式が得られ，次のように $U_k(n)$ が求められる．

$$\begin{aligned} U_1(n) &= {}_{2n}C_{2n-2}, \\ U_2(n) &= [{}_{2n}C_{2n-2}]^2 - 2[{}_{2n}C_{2n-4}], \\ U_3(n) &= [{}_{2n}C_{2n-2}]^3 - 3[{}_{2n}C_{2n-2}][{}_{2n}C_{2n-4}] + 3[{}_{2n}C_{2n-6}], \\ U_4(n) &= [{}_{2n}C_{2n-2}]^4 - 4[{}_{2n}C_{2n-2}]^2[{}_{2n}C_{2n-4}] + 2[{}_{2n}C_{2n-4}]^2 \\ &\quad + 4[{}_{2n}C_{2n-2}][{}_{2n}C_{2n-6}] - 4[{}_{2n}C_{2n-8}]. \end{aligned} \quad (3.5)$$

$k = 1, 2, 3$ の結果は

$$\begin{aligned} U_1(n) &= n(2n-1), \\ U_2(n) &= \frac{1}{3}n(2n-1)(4n^2+2n-3), \\ U_3(n) &= \frac{1}{15}n(2n-1)(32n^4+16n^3-32n^2-16n+15) \end{aligned} \quad (3.6)$$

となる．

(3.4) は相反方程式であるから， $x^{-1} = y$ に関する方程式を考えても新たな結果は得られない．実際，前論文 (2.8) 式からわかるように，

$$U_k(n) = \sum_{r=1}^n \tan^{2k} \left(\frac{(2r-1)\pi}{4n} \right) \quad (3.7)$$

である．

4 $T_k(n)$ の場合

さらに

$$T_k(n) \equiv \sum_{r=1}^n \cot^{2k} \left(\frac{r\pi}{2(n+1)} \right) = \sum_{r=1}^n \tan^{2k} \left(\frac{r\pi}{2(n+1)} \right) \quad (4.1)$$

についても考察しよう．

$\exp(ir\pi)$ は ± 1 であるから，

$$\Im \left[\exp \left(i \frac{r\pi}{2(n+1)} \right) \right]^{2(n+1)} = 0 \quad (4.2)$$

である． $\sin(r\pi/2(n+1))$ が $0 < r < 2(n+1)$ で 0 でない実数であることを使うと，この式は

$$\Im \left[\cot \left(\frac{r\pi}{2(n+1)} \right) + i \right]^{2(n+1)} = 0 \quad (4.3)$$

と書き直せる．これを展開すれば，左辺は $\cot(r\pi/2(n+1))$ の $2n+1$ 次の多項式となるが，因子 $\cot(r\pi/2(n+1))$ で除することができる．ゆえに， n 次代数方程式

$$\sum_{j=0}^n (-1)^j {}_{2n+2}C_{2n-2j+1} x^{n-j} = 0 \quad (4.4)$$

の n 個の相異なる解が, $x = \cot^2(r\pi/2(n+1))$ ($r = 1, 2, \dots, n$) であることがわかる. したがって, 解と係数の関係から基本対称式が得られ, 次のように $T_k(n)$ が求められる.

$$\begin{aligned}
T_1(n) &= \frac{2n+2C_{2n-1}}{2n+2}, \\
T_2(n) &= \left(\frac{2n+2C_{2n-1}}{2n+2}\right)^2 - 2 \cdot \frac{2n+2C_{2n-3}}{2n+2}, \\
T_3(n) &= \left(\frac{2n+2C_{2n-1}}{2n+2}\right)^3 - 3 \cdot \frac{2n+2C_{2n-1} \cdot 2n+2C_{2n-3}}{(2n+2)^2} + 3 \cdot \frac{2n+2C_{2n-5}}{2n+2}, \\
T_4(n) &= \left(\frac{2n+2C_{2n-1}}{2n+2}\right)^4 - 4 \cdot \frac{[2n+2C_{2n-1}]^2 \cdot 2n+2C_{2n-3}}{(2n+2)^3} + 2 \cdot \left(\frac{2n+2C_{2n-3}}{2n+2}\right)^2 \\
&\quad + 4 \cdot \frac{2n+2C_{2n-1} \cdot 2n+2C_{2n-5}}{(2n+2)^2} - 4 \cdot \frac{2n+2C_{2n-7}}{2n+2}.
\end{aligned} \tag{4.5}$$

$k = 1, 2, 3$ の場合について計算すれば,

$$\begin{aligned}
T_1(n) &= \frac{1}{3}n(2n+1), \\
T_2(n) &= \frac{1}{45}n(2n+1)(4n^2+14n-3), \\
T_3(n) &= \frac{1}{945}n(2n+1)(32n^4+176n^3+224n^2-144n+27)
\end{aligned} \tag{4.6}$$

となる. この結果はもちろん, 前論文 (2.16) 式

$$T_k(n) = S_k\left(\frac{1}{2}n\right) + \tilde{S}_k\left(\frac{1}{2}n\right) \tag{4.7}$$

に (1.4) と (2.5) を代入して計算した結果と一致する.

5 相互関係

方程式 (1.2) を

$$\sum_{j=0}^n (-1)^j {}_{2n+1}C_{2n-2j} x^{n-j} = 0 \tag{5.1}$$

と書き直し, j に関する和の取り方は変えずに各項の n を $n + \frac{1}{2}$ に置き換え, さらに \sqrt{x} で割ると, 方程式 (4.4) が得られる. つまり, 「解と係数の関係により $S_k(n)$ を決める方程式」で形式的に n を $n + \frac{1}{2}$ に置き換えたものは, 「解と係数の関係により $T_k(n)$ を決める方程式」を正確に再現することがわかる. したがって, 形式的に

$$S_k\left(n + \frac{1}{2}\right) = T_k(n) \tag{5.2}$$

が成立する. $S_k(n)$ も $T_k(n)$ も n の多項式であることが分かっているから, (5.2) は実際に正しい関係式である. 同様にして (2.2) と (3.4) の比較から, 関係式

$$\tilde{S}_k\left(n - \frac{1}{2}\right) = U_k(n) \tag{5.3}$$

が得られる. これらの関係式は, (1.4) と (4.6), (2.5) と (3.6) を使ってチェックできる.

以上により, 4 種の級数和について (4.7), (5.2), (5.3) という 3 つの独立な関係式が成立することがわかった. ということは, そのうちのどれか 1 つを計算すれば, あとはこれらの関係式により求められるということである. ただし, 順次に求めるには, $S_k(n)$ か $T_k(n)$ を計算する必要がある.

付記

最近、世戸憲治氏に Maxima のインストールと使い方を教えてもらって、数式処理のソフトが使えるようになった。それでさっそく、やり残していた $k = 4$ の場合の和公式の計算を Maxima を使ってやってみた。(1.3), (2.4), (3.5), (4.5) それぞれの第 4 式の計算結果は次のようになった。

$$\begin{aligned} S_4(n) &= \frac{1}{14175}n(2n-1)(192n^6 + 864n^5 + 496n^4 - 2248n^3 - 1388n^2 + 3834n - 1575), \\ \tilde{S}_4(n) &= \frac{1}{315}n(2n+1)(1088n^6 + 3808n^5 + 3920n^4 + 280n^3 - 868n^2 + 322n - 45), \\ U_4(n) &= \frac{1}{315}n(2n-1)(1088n^6 + 544n^5 - 1520n^4 - 760n^3 + 852n^2 + 426n - 315), \\ T_4(n) &= \frac{1}{14175}n(2n+1)(192n^6 + 1440n^5 + 3376n^4 + 1384n^3 - 2756n^2 + 1314n - 225). \end{aligned}$$

等式 (4.7) の $k = 4$ の場合を確認できる。(1.3), (2.4), (4.5) からは, (4.7) が成立することはちょっと想像できないが。

なお, 前論文で考えた留数による計算方法を用いても, Maxima を使えば*² 容易に上の結果を出すことができる。

[謝辞] Maxima についてご指導頂いた世戸憲治氏に感謝します。

前論文の訂正

(3.10) 式の右辺の係数 $(2k-1)!$ は $1/(2k-1)!$ のミスプリント。

*² Taylor 展開のコマンドを使う。

編集後記

伊予路の今夏は、耐え難い程の暑い日も何日かあったが、けっこう曇りや雨の日も多く、特に8月の下旬の数日は初秋を思わせるほどであった。

さて、今回もまた編集後記を書く幸運に恵まれ、有難く思っている。これも、このサーキュラーへの各位の投稿意欲が高い証拠と考え、さらに投稿者の方々と共に編集者も何とか頑張って本誌を維持して行こうと思いを新たにしている。

今回も、いずれの論文も力作揃いで本誌を彩った。そのことにちがいはないのだけれど、ここに掲載された論文の量をページ数換算でみると、数学系と物理系の割合はおよそ1：2となっている。物理系の方が数学系よりも分量が多くなるのは、それぞれの学問の性質上やむを得ないのかも知れない。それにしてもせめて両者の分量の比が2：3程度の割合になってほしいものだと考えている。

とにかく編集者（特に数学系）自身も投稿者の増加に無関心ではいられない事態が来ている。本誌の維持継続のためには今後とも努力を怠ることはできない。

（新関章三）