数学・物理通信

5巻7号　　2015年9月

編集　新関章三・矢野　忠

2015 年 9 月 2 日

目次(Contents)

1. 最速降下曲線あれこれ

世戸憲治 2

2. 自然数のべき乗の級数

秋葉 敏男 9

3. 自然数のべき乗の級数の和 3

矢野　忠 23

4. 編集後記

矢野　忠 30

1. Varieties of Brachistochrone Curve

Kenji SETO 2

2. The Power Series of Natural Numbers

Tosio AKIBA 9

3. Power Series of Natural Numbers 3

Tadashi YANO 23

4. Editorial Comments

Tadashi YANO 30

最速降下曲線あれこれ

世戸 憲治[1]

Varieties of Brachistochrone Curve

Kenji SETO[2]

1　はじめに

もうかなり昔のことになるが，雑誌「数理科学」(サイエンス社，1988 年 1 月号) に,『最速降下曲線をめぐって』というタイトルで，ちょっとした文章を掲載したことがある．そのときの内容は，

(1) Johann Bernoulli は，鉛直面内に高さの違う 2 点を与え，高い方の点から低い方の点まで質点を落下させるとき，どのような曲線に沿って落下させると最も少ない時間で到達できるかという問題を考えた．彼はこの問題を，光の進路に関する Fermat の原理を力学の問題にすり替えることで，その解がサイクロイド曲線であることを証明した．ただし，ここでは摩擦抵抗や空気抵抗のようなものは一切考慮しないものとする．

(2) Euler は，この問題に端を発し，今日，変分法と言われる解析学の 1 分野を作り上げた．さらに，この Bernoulli の問題に抵抗を入れた場合はどうなるかということにかなりの時間をかけて研究したが，明確な解を得ることはできなかった．

(3) ここで，Euler の問題に挑戦し，速度の 2 乗に比例する空気抵抗を入れた場合を解析してみた．解くべき方程式を求めることはできるが，それを解析的に解くことは不可能と思われるため，数値計算で解くことにした．結果は，ほんの少しでも抵抗が入るとサイクロイド曲線とはまったく違うものになるという結論を得た．

の 3 点にまとめられる．そのとき，摩擦抵抗を入れた問題も提起しておいたが，これは宿題として残されたままになっていた．これを，いまになって思い出し，今回，初めて挑戦してみることにした．

2　通常の最速降下曲線

初めに，復習のつもりで，通常の最速降下曲線について述べる．鉛直下方に x 軸，水平方向に y 軸をとる．ただし，この y 軸は，正しくは円筒座標の動径座標である．質量 m の質点を，この原点から初速度無しで落下させ，与えられた終点 (x_0, y_0) に到達させるとき，どのような曲線に沿って行くと最短時間で行くことができるかという問題を考える．ただし，曲線に沿って動くとき一切の抵抗力は働かないものとする．重力加速度の値を g，曲線上の途中の点 (x, y) における速度を v とすると，位置エネルギーの減少分 mgx が運動エネルギーに変化するので，

$$mgx = \frac{1}{2}mv^2 \tag{2.1}$$

[1] 北海学園大学名誉教授
[2] seto@pony.ocn.ne.jp

となる．これから，速度 v は，

$$v = \sqrt{2gx} \tag{2.2}$$

となるので，点 (x, y) から曲線上で微小距離 ds だけ離れた点を $(x + dx, y + dy)$ とすると，この間を走る時間 dt は，$dt = ds/v = \sqrt{1 + y'^2}\,dx/v$ となり，これを積分して，出発点から終点までの所要時間 T は，

$$T = \int_0^{x_0} F(x, y, y')dx \tag{2.3}$$

となる．ここに，$y' = dy/dx$ で，被積分関数 F は

$$F(x, y, y') = \sqrt{\frac{1 + y'^2}{2gx}} \tag{2.4}$$

と定義する．ここでは，被積分関数 F は変数 y を含まないのであるが，一般性を持たせるために書いておいた．この積分値 T を最小にするには，変分法のやり方にしたがって，曲線の方程式 $y = y(x)$ の変分を $\delta y(x)$ として，所要時間 T の変分をとると，

$$\delta T = \int_0^{x_0} \Big(\frac{\partial F}{\partial y}\delta y + \frac{\partial F}{\partial y'}\delta y'\Big)dx \tag{2.5}$$

となるので，$\delta y' = d\,\delta y/dx$ として，部分積分し，条件 $\delta y(0) = \delta y(x_0) = 0$ を用いると，

$$\delta T = \int_0^{x_0} \Big[\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dx}\Big(\frac{\partial F}{\partial y'}\Big)\Big]\delta y dx \tag{2.6}$$

となる．これが，停留値をとるためには，

$$\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dx}\Big(\frac{\partial F}{\partial y'}\Big) = 0 \tag{2.7}$$

であればよい．この式を変分法における Euler-Lagrange の式という．この場合は，関数 F が変数 y を含まないので，

$$\frac{d}{dx}\Big(\frac{\partial F}{\partial y'}\Big) = 0 \tag{2.8}$$

となる．これはただちに積分できて，積分定数を c とすると，

$$\frac{\partial F}{\partial y'} = c \tag{2.9}$$

となり，(2.4) 式を代入すると，

$$\frac{y'}{\sqrt{2gx(1 + y'^2)}} = c \tag{2.10}$$

これから，$y' > 0$ として，y' を求めると，

$$y' = \sqrt{\frac{x}{2r - x}} \tag{2.11}$$

となる．ここに，r は，長さの次元を持つ量で，

$$r = \frac{1}{4gc^2} \tag{2.12}$$

と定義する．さらに，この (2.11) 式を積分して，

$$y = \int_0^x \sqrt{\frac{x}{2r - x}}dx \tag{2.13}$$

となるが，この右辺の積分は，積分変数を x から θ に

$$x = r - r\cos\theta \tag{2.14}$$

と置換し，三角関数の倍角公式を使うと，容易に積分でき，

$$y = r\theta - r\sin\theta \tag{2.15}$$

となる．これは，θ を媒介変数とするサイクロイド曲線の式であり，$\theta = 0$ のとき原点 $(0, 0)$ から出発し，積分定数 r は終点 (x_0, y_0) を通るように決められる．

以上が．摩擦無しの通常の最速降下曲線である．例えば，直線距離で約 400 km ある東京と大阪をサイクロイド型の地下トンネルで結んだとして，ジェットコースターで落下させると，$2\pi r = 400$ km より，$r = 63.662$ km で，その所要時間は，(2.3) (2.4) より，

$$T = \oint \sqrt{\frac{1 + y'^2}{2gx}} dx = 2\pi\sqrt{\frac{r}{g}} \cong 8.44 \text{ 分} \tag{2.16}$$

と，10 分もかからない驚くべき速さで着いてしまう．これは本当だろうか．実際には，摩擦抵抗や空気抵抗があるので，その損失分を補わなければならないが，これはどうも信じられないことである．初めて，この最速降下曲線を学んだとき，終点の位置がサイクロイドの最下点より手前にあるときはこれで良いとして，終点が最下点を超えた位置にあるときは何故か嘘っぽい感じがして仕方がなかった．図 1 に示すように，終点 P がサイクロイドの最下点を超え，y 軸に近いところにあるとき，少しでも摩擦や空気抵抗のようなものがあると，サイクロイドに沿ってきたのでは，途中のエネルギーロスのため，最短時間はおろか，到達不可能になるかもしれない．しかし，出発点と終点を直線で結んだ経路ならば，いかに抵抗があっても，その傾斜角が摩擦角以上であれば必ず，到達するからである．

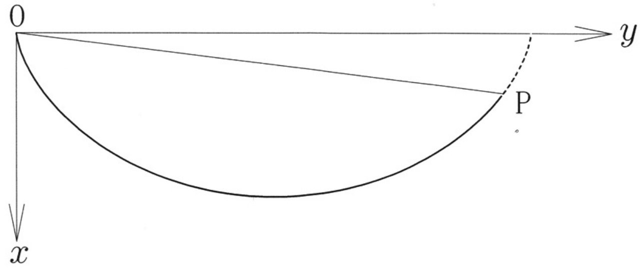

図 1　　サイクロイド経路と直線経路

次節では，これに摩擦抵抗が入った場合を考察してみる．

3　摩擦抵抗を考慮した場合

ここでは，前節で述べたごく普通の最速降下曲線に，摩擦抵抗を入れるとどうなるかを解析する．前と同じく，鉛直下方に x 軸，水平方向に y 軸をとるものとする．曲線上の点 (x, y) における速度を v とし，そこから微小距離 ds 離れた点 $(x + dx, y + dy)$ まで動くあいだに速度がどのように変化するかを考える．この間の位置エネルギーの減少分 $mgdx$ は，運動エネルギーの増加分 $\frac{1}{2}mdv^2$ と摩擦によるエネルギー損失分に変わる．このときの摩擦力は質点が斜面に与える垂直抗力で決まるが，この場合，垂直抗力は 2 種類あって，１つは重

力に起因するものと，2 つ目は遠心力に起因するものである．動摩擦係数を μ とすると，この摩擦によるエネルギー損失は，重力に起因する分が $\mu mgdy$，また，遠心力に起因する分が $\mu m\dfrac{v^2}{\rho}ds$ となる．ここに，ρ はこの点における曲率半径で，$\rho = \dfrac{(1+y'^2)^{3/2}}{y''}$ である．これから，エネルギー保存式は，

$$mgdx = \frac{1}{2}mdv^2 + \mu mgdy + \mu mv^2\frac{y''}{(1+y'^2)^{3/2}}ds \tag{3.1}$$

となる．実は，この重力に起因する摩擦エネルギーの損失分は，形式的に消すことが可能である．そのためには，次の座標回転を行う．すなわち，α を摩擦角

$$\tan\alpha = \mu \tag{3.2}$$

として，座標回転

$$\begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \tag{3.3}$$

をしたものを改めて (x, y) と記すことにする．この変換で，曲率半径や速度は変化しないので，(3.1) 式は

$$m\hat{g}dx = \frac{1}{2}mdv^2 + \mu mv^2\frac{y''}{(1+y'^2)^{3/2}}ds \tag{3.4}$$

と，(3.1) 式の右辺 2 項目が消去された形となる．ただし，$\hat{g}$ は

$$\hat{g} = \sqrt{1+\mu^2}\,g \tag{3.5}$$

と，摩擦係数を重力加速度に繰り込んだ形にしている．この (3.4) 式を，$ds = \sqrt{1+y'^2}\,dx$ を用い，v^2 に関する微分方程式になおすと，

$$\frac{dv^2}{dx} + 2\mu\frac{y''}{1+y'^2}v^2 = 2\hat{g} \tag{3.6}$$

となる．これは，v^2 に関する 1 階の非斉次線形微分方程式なので，定数変化法で解け，その解は，$x = 0$ で $v = 0$ とすると，

$$v^2 = 2\hat{g}\,\frac{p(x)}{p'(x)} \tag{3.7}$$

と解ける．ここに，$p(x)$ は

$$p(x) = \int_0^x e^{2\mu\arctan y'(x_1)}dx_1 \tag{3.8}$$

と定義する．これより，出発点の原点 $(0, 0)$ から終点の (x_0, y_0) までの所要時間を T とすると，

$$\sqrt{2\hat{g}}\,T = \int_0^{x_0} f(y')\sqrt{\frac{p'(x)}{p(x)}}dx \tag{3.9}$$

となる．ここに，

$$f(y') = \sqrt{1+y'^2} \tag{3.10}$$

と定義する．つぎに，ここで得た時間 T の $y(x)$ に関する変分をとることになるが，関数 $p(x)$ もその定義の中に $y(x)$ を含むことに注意して，

$$\sqrt{2\hat{g}}\,\delta T = \int_0^{x_0}\sqrt{\frac{p'}{p}}\Big[\delta f(y') + \frac{f(y')}{2}\Big(\frac{\delta p'}{p'} - \frac{\delta p}{p}\Big)\Big]dx \tag{3.11}$$

となるが，(3.10) (3.8) の定義から，δf, $\delta p'$, δp を求めると，

$$\delta f(y') = \frac{y'}{f(y')}\delta y', \qquad \delta p' = \frac{2\mu p'}{f^2(y')}\delta y' \tag{3.12}$$

および，

$$\delta p = 2\mu \int_0^x \frac{p'(x_1)}{f^2\big(y'(x_1)\big)}\delta y'(x_1)dx_1 \tag{3.13}$$

となる．これらの式を (3.11) 式に代入し，2 重積分になるところは，積分順序の変更をすると，

$$\sqrt{2\hat{g}}\,\delta T = \int_0^{x_0} \Big[\frac{y'+\mu}{f(y')}\sqrt{\frac{p'(x)}{p(x)}} - \mu\frac{p'(x)q(x)}{f^2(y')}\Big]\delta y'(x)dx \tag{3.14}$$

となる．ここに，

$$q(x) = \int_x^{x_0} \sqrt{\frac{p'(x_1)}{p^3(x_1)}} f\big(y'(x_1)\big)dx_1 \tag{3.15}$$

と定義する．さらに，$\delta y' = d\delta y/dx$ として，部分積分し，条件 $\delta y(0) = \delta y(x_0) = 0$ を用いると，

$$\sqrt{2\hat{g}}\,\delta T = -\int_0^{x_0} \frac{d}{dx}\Big[\frac{y'+\mu}{f(y')}\sqrt{\frac{p'(x)}{p(x)}} - \mu\frac{p'(x)q(x)}{f^2(y')}\Big]\delta y(x)dx \tag{3.16}$$

となり，これが停留値をとるためには，

$$\frac{d}{dx}\Big[\frac{y'+\mu}{f(y')}\sqrt{\frac{p'(x)}{p(x)}} - \mu\frac{p'(x)q(x)}{f^2(y')}\Big] = 0 \tag{3.17}$$

あるいは，一度積分し，積分定数を c として，

$$\frac{y'+\mu}{f(y')}\sqrt{\frac{p'(x)}{p(x)}} - \mu\frac{p'(x)q(x)}{f^2(y')} = c \tag{3.18}$$

となる．これが，摩擦抵抗が入った場合の最速降下曲線を求めるための方程式である．この式を見てわかるとおり，これは y' に関する複雑怪奇な積分方程式であり，その解曲線は，局所的な条件だけで決まるのではなく，関数 $p(x)$ をとおして自分が走ってきた過去を振り返りながら，関数 $q(x)$ によって未来を見据えることで決まることになる．

こんな方程式が解析的に解けるとは思えないが，この方程式には，1 つだけ自明な解がある．それは，終点が出発点の真下にある場合，すなわち，この回転した座標系では，終点が直線 $y = (\tan\alpha)x$ 上にある場合である．このときは，そのまま真っすぐ落下するのが最短時間になるので，(3.2) 式の $\tan\alpha = \mu$ を用いて，

$$y' = \mu, \quad f(y') = \sqrt{1+\mu^2}, \quad p(x) = e^{2\mu\alpha}x, \quad p'(x) = e^{2\mu\alpha}, \quad q(x) = -2\frac{\sqrt{1+\mu^2}}{e^{2\mu\alpha}}\Big(\frac{1}{\sqrt{x_0}} - \frac{1}{\sqrt{x}}\Big) \tag{3.19}$$

となる．これらの式を (3.18) 式に代入すると，積分定数 c が，

$$c = \frac{2\mu}{\sqrt{x_0(1+\mu^2)}} \tag{3.20}$$

と決まる．

以下では，この方程式 (3.18) を数値的に解くことを試みる．この式を，

$$y' = -\mu + f(y')\sqrt{\frac{p(x)}{p'(x)}}\Big(c + \mu\frac{p'(x)q(x)}{f^2(y')}\Big) \tag{3.21}$$

と変形しておく．ここで，x_0，μ の値を適当な値に固定し，c の値を (3.20) 式の値より大きなところに固定する．その上で，初期値として，$y' = \mu$ を仮定し，この右辺の値を求めたものを新しい y' とする．これを何度か繰り返すと y' の値が収束するはずなので，それを数値的に積分して，解曲線 $y = y(x)$ を求める．つまり，逐次近似法を用いる．この方法で，終点の y 座標は，積分定数 c に依存する形で，解曲線から，$y_0 = y(x_0)$ として決まることになる．

ここでは，数値計算をする上で，x_0，μ の値を

$$x_0 = 1, \quad \mu = 0.1 \tag{3.22}$$

と置いた場合を考察することにする．この設定で (3.20) 式の c は，$c = 0.199\cdots \cong 0.2$ となるので，c の値として，$c = 0.2$ から 1.6 まで，0.2 刻みで 8 通りの場合を求めることにする．また，(3.21) 式の逐次計算では，x の範囲 $[0, 1]$ を 100 等分し，各点ごとに 20 回の繰り返し計算をし収束する値を求める．結果を以下の図 2 に示す．

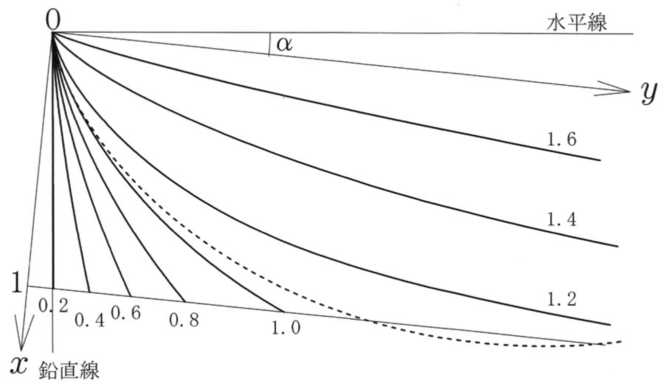

図 2　　$x_0 = 1$，$\mu = 0.1$ の場合の解曲線

各曲線の下に書かれた数字は c の値である．この値が，0.2 のときは，(3.20) 式で示した真っすぐ下に落下する場合で，この値が大きくなるにつれ，終点の y 座標である y_0 が大きくなることがわかる．この値をさらに大きくしていくとその軌道は水平線から角度 α だけ傾いた y 軸に近づいていくが，それ以上に，上にあがることはない．α は摩擦角なので，それ以上に傾きがなくなると落下しなくなるからである．なお，この図では比較のため，抵抗がまったく存在しないときのサイクロイド曲線を 1 つだけ点線で描いておいた．

いずれにしても，この摩擦力が入った場合の最速降下曲線は，サイクロイド曲線とはまったく違い，終点に向かって一方的に下がるだけで，途中で再び上にあがるということはないことを強調しておきたい．より正確な言い方をすると，終点の位置がサイクロイドの最下点より手前にあるときは，サイクロイドに近い曲線になるが，終点がサイクロイドの最下点を過ぎたところにあるときは，サイクロイドとはまったく違った形になる．このことは摩擦係数 μ の値を変えて，より小さい値にしたときもその傾向はまったく同じである．

また，別の言い方をすると，(3.18) 式で $\mu = 0$ とすると，$p(x) = x$ となるので，まったく抵抗が入らない場合の (2.10) 式になり，その解はサイクロイド曲線になるが，しかし，$\mu \neq 0$ のときの (3.18) の解で $\mu \to 0$ の極限をとっても抵抗がないときのサイクロイドの解には近づかないということである．つまり，これは，$\mu = 0$ の場合と，$(\mu \neq 0,\ \mu \to 0)$ の場合とではギャップがあることになり，これは一種の特異摂動と言えるものであろう．

4　おわりに

ここで扱った最速降下曲線は，私にとって，解析学に興味を持つ最初の切っかけを作ってくれたものである．それ故，何故か，いつも頭から離れないらしく，30 年近くも前にやったことを，いまだに，思い出してしまった．

もしかすると，彼の Euler も，抵抗が入った場合の最速降下曲線を研究したということなので，ここで得た (3.18) 式のようなものをすでに導いていたのかもしれない．しかし，当時は，もちろん，コンピュータなどというものは存在しなかったので，この式を手計算で数値的に解くことを面倒がっただけなのかもしれない．

話は変わるが，インターネットで最速降下曲線に関する記事を探してみたところ，放っておけないおかしなものが見つかってしまった．Weisstein, Eric W. “Brachistochrone Problem” Wolfram MathWorld というもので，この中で，ここで扱った摩擦抵抗が入った場合の最速降下曲線について述べているのだが，何故か，遠心力の効果をまったく考慮しないで結果を導いてしまっている．これは明らかに間違いであり，こんなものが世の中にまかり通っていることに驚きを隠せなかった．私が以前,「誤解をまねく古典力学の問題」（「数学・物理通信」3 巻 7 号）で述べたように，曲線上を動く質点には一般に遠心力が作用するため，垂直抗力はそのぶんだけ大きくなり，それに伴い摩擦力も増加する．このことはつぎのように考えると理解しやすい．すなわち，曲線を無限に小さな部分に分割した折れ線とみなし，その折れ線に沿って質点が動くときは，小さな衝突を繰り返しながら進むことになるので，各衝突ごとに反発力を受けることになる．これが遠心力効果であり，これを無視して，曲線上を動く質点の運動は考えられない．

[謝辞]

今回もこの原稿を書くにあたって，京都大学名誉教授の中西襄先生にご精読いただき，いくつかのコメントをいただきました．ここに，謹んで感謝いたします．

自然数のべき乗の級数

秋葉 敏男

The Power Series of Natural Numbers

Toshio Akiba[1]

1　はじめに

ここで取り扱うテーマは，自然数のべき乗の級数の和を論ずるもので，いまさら何の問題があるのかと思われるかも知れません．確かに，ベルヌーイ数を用いた多項式表現により，数学の問題としては完全に決着しています [1] [2] [3]．しかし，ベルヌーイ数というものは，なかなかつかみ難いもので，手軽に「和」の公式を求める計算方法が研究されて来たと思います．この「数学・物理通信」でも数回取り上げられており [4] [5] [6]，ネットへの投稿も少なくないようです [9].

それらで述べられているのは,「和」の計算式をべき乗数の漸化式で表現するものです．公式集などでは，せいぜい自然数の 10 乗の級数の和を表す多項式くらいまでを載せています [7]．それでは，あるべき乗の級数の和を直接求める計算式は，ないのでしょうか.

私は，まず「和を表示する関数（後示する $S_q(n)$）」の「べき乗数 q に関する漸化式」を求め，$S_q(n)$ が n の多項式である事から，その係数を導き出しました.

2　漸化式の導出

$$\sum_{k=0}^{n-1}(2k+1)^q=\sum_{k=1}^{n}(2k-1)^q$$

が成り立つことは自明です．これを

$$1-(2n+1)^q+\sum_{k=1}^{n}(2k+1)^q=\sum_{k=1}^{n}(2k-1)^q \tag{2.1}$$

と書き変え，左辺の $(2k+1)^q$ と右辺の $(2k-1)^q$ を二項展開すれば

$$1-(2n+1)^q+\sum_{k=1}^{n}\sum_{r=0}^{q}(2k)^r\left(\begin{array}{c}q\\r\end{array}\right)=\sum_{k=1}^{n}\sum_{r=0}^{q}(2k)^r\left(\begin{array}{c}q\\r\end{array}\right)(-1)^{q-r} \tag{2.2}$$

となります．ここで $S_r(n)=\sum\limits_{k=1}^{n}k^r$ に注意すれば

$$\sum_{r=0}^{q}2^r\left(\begin{array}{c}q\\r\end{array}\right)S_r(n)[(-1)^{q-r}-1]=1-(2n+1)^q \tag{2.3}$$

が得られます．これは $S_r(n),(r=0\sim q)$ の関係式です．どうしてこの関係式の導出をしたかは発見法的に関心があるかもしれませんので，付録 5.1 に述べます.

以下では，q が奇数の場合と偶数の場合とに分けて考えます．なお，以下の議論では，特に断らない限り p は自然数とします.

[1]tawarp@mug.biglobe.ne.jp

2.1 $q=2p+1$ の場合

式 (2.3) の左辺は，r が偶数のときだけ項がゼロではないので，r=$2l$ と置いて

$$\begin{aligned} -2\sum_{l=0}^{p}4^l S_{2l}(n)\left(\begin{array}{c}2p+1\\2l\end{array}\right) &= 1-(2n+1)^{2p+1} \\ &= -2n\sum_{l=0}^{2p}(2n+1)^l \end{aligned}$$

すなわち

$$n\sum_{l=0}^{2p}(2n+1)^l=\sum_{l=0}^{p}4^l S_{2l}(n)\left(\begin{array}{c}2p+1\\2l\end{array}\right)$$

左辺を変形すると

$$\begin{aligned} n\sum_{l=0}^{2p}(2n+1)^l &= n\left[\sum_{l=0}^{p-1}(2n+1)^{2l}+\sum_{l=0}^{p-1}(2n+1)^{2l+1}+(2n+1)^{2p}\right] \\ &= 2n(n+1)\sum_{l=0}^{p-1}(2n+1)^{2l}+n(2n+1)^{2p} \end{aligned}$$

一方，右辺で $l=0$ の項を取り出せば

$$\sum_{l=1}^{p}4^l\left(\begin{array}{c}2p+1\\2l\end{array}\right)S_{2l}(n)+n$$

となりますから，これを左辺に等しいと置いて

$$\begin{aligned} \sum_{l=1}^{p}4^l\left(\begin{array}{c}2p+1\\2l\end{array}\right)S_{2l}(n) &= 2n(n+1)\sum_{l=0}^{p-1}(2n+1)^{2l}+n(2n+1)^{2p}-n \\ &= 2n(n+1)\sum_{l=0}^{p-1}(2n+1)^{2l}+2n^2\sum_{l=0}^{p-1}(2n+1)^{2l}+2n^2\sum_{l=0}^{p-1}(2n+1)^{2l+1} \\ &= 2n(n+1)\sum_{l=0}^{p-1}(2n+1)^{2l}+4n^2(n+1)\sum_{l=0}^{p-1}(2n+1)^{2l} \\ &= 2n(n+1)(2n+1)\sum_{l=0}^{p-1}(2n+1)^{2l}=12S_2(n)\sum_{l=0}^{p-1}(2n+1)^{2l} \end{aligned}$$

結局

$$\sum_{l=1}^{p}4^l\left(\begin{array}{c}2p+1\\2l\end{array}\right)S_{2l}(n)=12S_2(n)\sum_{l=0}^{p-1}(2n+1)^{2l}$$

となり，左辺の和から $l=p$ の項を取り出して変形すると

$$4^p(2p+1)S_{2p}(n)=12S_2(n)\sum_{l=0}^{p-1}(2n+1)^{2l}-\sum_{l=1}^{p-1}4^l\left(\begin{array}{c}2p+1\\2l\end{array}\right)S_{2l}(n) \tag{2.4}$$

2.2 $q=2p$ の場合

式 (2.3) の左辺は，r が奇数のときだけ項がゼロではないので，r=$2l+1$ とおいて，

$$\begin{aligned}-4\sum_{l=0}^{p-1}4^l\begin{pmatrix}2p\\2l+1\end{pmatrix}S_{2l+1}(n) &= 1-(2n+1)^{2p}\\ &= -2n\sum_{l=0}^{2p-1}(2n+1)^l\end{aligned}$$

すなわち

$$\begin{aligned}2\sum_{l=0}^{p-1}4^l\begin{pmatrix}2p\\2l+1\end{pmatrix}S_{2l+1}(n) &= 2n(n+1)\sum_{l=0}^{p-1}(2n+1)^{2l}\\ &= 4S_1(n)\sum_{l=0}^{p-1}(2n+1)^{2l}\end{aligned}$$

左辺の $l=0$ の項を取り出すと

$$2\sum_{l=1}^{p-1}4^l\begin{pmatrix}2p\\2l+1\end{pmatrix}S_{2l+1}(n)+4pS_1(n)$$

となりますから，これを右辺に等しいと置いて

$$\begin{aligned}\sum_{l=1}^{p-1}4^l\begin{pmatrix}2p\\2l+1\end{pmatrix}S_{2l+1}(n) &= 2S_1(n)\sum_{l=0}^{p-1}(2n+1)^{2l}-2pS_1(n)\\ &= 2S_1(n)\sum_{l=1}^{p-1}((2n+1)^{2l}-1)\\ &= 4nS_1(n)\sum_{l=1}^{p-1}\sum_{k=0}^{2l-1}(2n+1)^k\\ &= 8n(n+1)S_1(n)\sum_{l=1}^{p-1}\sum_{k=0}^{l-1}(2n+1)^{2k}\\ &= 16S_1^2(n)\sum_{l=1}^{p-1}\sum_{k=0}^{l-1}(2n+1)^{2k}\end{aligned}$$

$\sum_{l=1}^{p-1}\sum_{k=0}^{l-1}(2n+1)^{2k}$ なる和を並べ替えると $\sum_{l=1}^{p-1}(p-l)(2n+1)^{2l-2}$ となりますから

$$\sum_{l=1}^{p-1}4^l\begin{pmatrix}2p\\2l+1\end{pmatrix}S_{2l+1}(n)=16S_1^2(n)\sum_{l=1}^{p-1}(p-l)(2n+1)^{2l-2}$$

p を $(p+1)$ で置換して

$$\sum_{l=1}^{p}4^l\begin{pmatrix}2p+2\\2l+1\end{pmatrix}S_{2l+1}(n)=16S_1^2(n)\sum_{l=0}^{p-1}(p-l)(2n+1)^{2l}$$

となりますので，左辺から $l=p$ の項を取り出して

$$4^p(2p+2)S_{2p+1}(n)=16S_1^2(n)\sum_{l=0}^{p-1}(p-l)(2n+1)^{2l}-\sum_{l=1}^{p-1}4^l\begin{pmatrix}2p+2\\2l+1\end{pmatrix}S_{2l+1}(n) \tag{2.5}$$

ここで

$$4^p(2p+1)\phi_{2p-2}(n) = 12\sum_{l=0}^{p-1}(2n+1)^{2l} - \sum_{l=1}^{p-1} 4^l \begin{pmatrix} 2p+1 \\ 2l \end{pmatrix} \phi_{2l-2}(n) \tag{2.6}$$

$$4^p(2p+2)\psi_{2p-2}(n) = 16\sum_{l=0}^{p-1}(p-l)(2n+1)^{2l} - \sum_{l=1}^{p-1} 4^l \begin{pmatrix} 2p+2 \\ 2l+1 \end{pmatrix} \psi_{2l-2}(n) \tag{2.7}$$

に依って，$\phi_{2p-2}(n)$ 及び $\psi_{2p-2}(n)$ を定義すれば ($\phi_0(n) = \psi_0(n) = 1$ とします．)，式 (2.4)，(2.5) より

$$S_{2p}(n) = S_2(n)\phi_{2p-2}(n) \tag{2.8}$$

$$S_{2p+1}(n) = S_1^2(n)\psi_{2p-2}(n) \tag{2.9}$$

の形に書けます．そして，$\phi_{2p-2}(n), \psi_{2p-2}(n)$ が，共に n の $(2p-2)$ 次多項式であることは，容易に見て取れます.

以上で,「和を表示する関数」の「べき乗数に関する漸化式」が得られ,「和を表示する関数」が，多項式であることもわかりました.

次節ではこの多項式の係数を求めます.

3 「和」の多項式の係数

本節では特に必要でない限り，添字 n は省略します.

3.1 多項式 $\phi_{2p-2}(n)$

以下で取り扱う式を簡単にするために

$$\begin{aligned} \Phi_p &= 4^p\phi_{2p-2} \\ M_p &= \left(\frac{12}{2p+1}\right)\sum_{l=0}^{p-1}(2n+1)^{2l} \\ A_l^p &= \left(\frac{1}{2p+1}\right)\begin{pmatrix} 2p+1 \\ 2l \end{pmatrix} \end{aligned}$$

によって記号 Φ_p, M_p, A_l^p を定義すると，式 (2.6) は $\Phi_p = M_p - \sum_{l=1}^{p-1} A_l^p \Phi_l$ と書けます．そこで，以下の要領でべき乗の次数を降下させて行きます.

$$\begin{aligned} \Phi_p &= M_p - \sum_{l=1}^{p-1} A_l^p \Phi_l \\ &= M_p - A_{p-1}^p \Phi_{p-1} - \sum_{l=1}^{p-2} A_l^p \Phi_l \\ &= M_p - A_{p-1}^p M_{p-1} + A_{p-1}^p \sum_{l=1}^{p-2} A_l^{p-1} \Phi_l - \sum_{l=1}^{p-2} A_l^p \Phi_l \end{aligned}$$

ここで，$\kappa_p=1,\kappa_{p-1}=-A^p_{p-1}$ とおけば

$$\begin{aligned}\Phi_p &= \sum_{k=0}^{1}\kappa_{p-k}M_{p-k}-\kappa_{p-1}\sum_{l=1}^{p-2}A_l^{p-1}\Phi_l-\kappa_p\sum_{l=1}^{p-2}A_l^p\Phi_l\\ &= \sum_{k=0}^{1}\kappa_{p-k}M_{p-k}-\sum_{l=1}^{p-2}C_l^1\Phi_l\end{aligned}$$

但し、$C_l^1=\sum\limits_{i=0}^{1}\kappa_{p-i}A_l^{p-i}$ としました．さらに，べき乗数の降下計算を進めると

$$\begin{aligned}-\sum_{l=1}^{p-2}C_l^1\Phi_l &= -C_{p-2}^1\Phi_{p-2}-\sum_{l=1}^{p-3}C_l^1\Phi_l\\ &= -C_{p-2}^1(M_{p-2}-\sum_{l=1}^{p-3}A_l^{p-2}\Phi_l)-\sum_{l=1}^{p-3}C_l^1\Phi_l\\ &= -C_{p-2}^1M_{p-2}+C_{p-2}^1\sum_{l=1}^{p-3}A_l^{p-2}\Phi_l-\sum_{l=1}^{p-3}C_l^1\Phi_l\\ &= \kappa_{p-2}M_{p-2}-\kappa_{p-2}\sum_{l=1}^{p-3}A_l^{p-2}\Phi_l-\sum_{l=1}^{p-3}C_l^1\Phi_l\\ &= \kappa_{p-2}M_{p-2}-\sum_{l=1}^{p-3}C_l^2\Phi_l\end{aligned}$$

となりますから

$$\Phi_p=\sum_{k=0}^{2}\kappa_{p-k}M_{p-k}-\sum_{l=1}^{p-3}C_l^2\Phi_l$$

が得られます．ただし，$\kappa_{p-2}=-C_{p-2}^1$, $C_l^2=\kappa_{p-2}A_l^{p-2}+C_l^1$ としています．

この漸化計算では，C_l^k の添字 k が上昇することに注意しながら $(p-2)$ 回繰り返せば，

$$\begin{aligned}\Phi_p &= \sum_{k=0}^{p-2}\kappa_{p-k}M_{p-k}-C_1^{p-2}\Phi_1\\ &= \sum_{k=0}^{p-2}\kappa_{p-k}M_{p-k}-4\sum_{l=2}^{p}l\,\kappa_l\end{aligned}$$

となり，結局次式が得られます．

$$\Phi_p=\sum_{l=2}^{p}\kappa_l(M_l-4l)$$

$$M_l=\frac{12}{2l+1}\sum_{i=0}^{l-1}4^i(n+\frac{1}{2})^{2i}$$

$$\begin{aligned}\kappa_{p-k} &= -C_{p-k}^{k-1}\\ &= -\sum_{i=0}^{k-1}\kappa_{p-i}A_{p-k}^{p-i}\\ &= -\sum_{i=0}^{k-1}\frac{\kappa_{p-i}}{2p-2i+1}\left(\begin{array}{c}2p-2i+1\\2p-2k\end{array}\right)\end{aligned}$$

つぎに，$(n+\frac{1}{2})=\mu$ と定義して，Φ_p を，μ の多項式の形に変形します.

$$\Phi_p = \sum_{l=2}^{p}\sum_{i=0}^{l-1}\frac{12}{2l+1}4^i\mu^{2i}\kappa_l - 4\sum_{l=2}^{p} l\kappa_l$$

右辺第一項の和の順序を並べ替えて，μ^{2k} の係数を α_{2k} とすれば

$k \geq 1$ に対して

$$\alpha_{2k} = 3\cdot 4^{k+1}\sum_{l=k+1}^{p}\frac{\kappa_l}{2l+1}$$

$k=0$ に対しては,

$$\begin{aligned}\alpha_0 &= \sum_{l=2}^{p}\frac{12\kappa_l}{2l+1} - 4\sum_{l=2}^{p} l\,\kappa_l \\ &= -4\sum_{l=2}^{p}\kappa_l\frac{(l-1)(2l+3)}{2l+1}\end{aligned}$$

$\Phi_p = 4^p\phi_{2p-2}$ ですから，ϕ_{2p-2} は μ^{2k} の係数を a_{2k} とすれば,

$$\phi_{2p-2} = \sum_{k=0}^{p-1} a_{2k}\left(n+\frac{1}{2}\right)^{2k}$$

と表されます。但し、$k \geq 1$ に対して

$$a_{2k} = 3\times 4^{k+1-p}\sum_{l=k+1}^{p}\frac{\kappa_l}{2l+1}$$

$k=0$ に対しては

$$a_0 = -4^{1-p}\sum_{l=2}^{p}\kappa_l\frac{(l-1)(2l+3)}{2l+1}$$

最後に，μ^{2k} を n の多項式として展開整理すれば

$$\phi_{2p-2}(n) = \sum_{k=0}^{2p-2}\tilde{a}_k n^k$$

ここに、$k \leq (p-1)$ に対して

$$\tilde{a}_{2k} = \sum_{i=1}^{p-k}\begin{pmatrix}2p-2i\\2k\end{pmatrix}2^{(-2p+2i+2k)}a_{2p-2i}$$

$k \leq (p-2)$ に対して

$$\tilde{a}_{2k+1} = \sum_{i=1}^{p-k-1}\begin{pmatrix}2p-2i\\2k+1\end{pmatrix}2^{(-2p+2i+2k+1)}a_{2p-2i}$$

3.2 多項式 $\psi_{2p-2}(\mathbf{n})$

計算の要領は，前節と全く同様で，結果は次のとおりです.

$$\psi_{2p-2} = \sum_{k=0}^{p-1} b_{2k}(n+\frac{1}{2})^{2k}$$

ここに、$k \geq 1$ に対して

$$b_{2k} = 2 \times 4^{k+1-p} \sum_{l=k+1}^{p} \lambda_l \frac{l-k}{l+1}$$

$k = 0$ に対しては

$$b_0 = -\frac{4^{1-p}}{3} \sum_{l=2}^{p} \lambda_l \frac{l(l-1)(2l+5)}{l+1}$$

但し，λ_l は，κ_l の代わりに，以下の様に定義されます．($\lambda_p = 1$ とします。尚、付録 6.2 参照)

$$\lambda_{p-k} = -\sum_{i=0}^{k-1} \frac{\lambda_{p-i}}{2p-2i+2} \begin{pmatrix} 2p-2i+2 \\ 2p-2k+1 \end{pmatrix}$$

そして，μ^{2k} を n の多項式として展開整理すれば

$$\psi_{2p-2}(n) = \sum_{k=0}^{2p-2} \tilde{b}_k n^k$$

ここに、$k \leq (p-1)$ に対して

$$\tilde{b}_{2k} = \sum_{i=1}^{p-k} \begin{pmatrix} 2p-2i \\ 2k \end{pmatrix} 2^{(-2p+2i+2k)} b_{2p-2i}$$

$k \leq (p-2)$ に対して

$$\tilde{b}_{2k+1} = \sum_{i=1}^{p-k-1} \begin{pmatrix} 2p-2i \\ 2k+1 \end{pmatrix} 2^{(-2p+2i+2k+1)} b_{2p-2i}$$

3.3 公式のまとめ

以上で得られた「和」を表示する公式をまとめておきます．$S_q(n) = \sum_{k=1}^{n} k^q$ を $q = 2p$ の場合と $q = 2p+1$ の場合とに分けて表示します.

（$q = 2p$ の場合）

$$S_{2p}(n) = S_2(n) \times \phi_{2p-2}(n)$$

$$\phi_{2p-2}(n) = \sum_{k=0}^{p-1} a_{2k} \left(n + \frac{1}{2}\right)^{2k} = \sum_{k=0}^{2p-2} \tilde{a}_k n^k$$

$k \geq 1$ に対して

$$a_{2k} = 3 \times 4^{k+1-p} \sum_{l=k+1}^{p} \frac{\kappa_l}{2l+1} \tag{3.1}$$

$k = 0$ に対しては

$$a_0 = -4^{1-p} \sum_{l=2}^{p} \kappa_l \frac{(l-1)(2l+3)}{2l+1} \tag{3.2}$$

$$\kappa_{p-k} = -\sum_{i=0}^{k-1} \frac{\kappa_{p-i}}{2p-2i+1} \begin{pmatrix} 2p-2i+1 \\ 2p-2k \end{pmatrix} \tag{3.3}$$

$k \leq (p-1)$ に対して

$$\tilde{a}_{2k} = \sum_{i=1}^{p-k} \begin{pmatrix} 2p-2i \\ 2k \end{pmatrix} 2^{(-2p+2i+2k)} a_{2p-2i} \tag{3.4}$$

$k \leq (p-2)$ に対して

$$\tilde{a}_{2k+1} = \sum_{i=1}^{p-k-1} \begin{pmatrix} 2p-2i \\ 2k+1 \end{pmatrix} 2^{(-2p+2i+2k+1)} a_{2p-2i} \tag{3.5}$$

（$q = 2p+1$ **の場合**）

$$S_{2p+1}(n) = S_1^2(n) \times \psi_{2p-2}(n)$$
$$\psi_{2p-2}(n) = \sum_{k=0}^{p-1} b_{2k} \left(n + \frac{1}{2}\right)^{2k} = \sum_{k=0}^{2p-2} \tilde{b}_k n^k$$

$k \geq 1$ に対して

$$b_{2k} = 2 \times 4^{k+1-p} \sum_{l=k+1}^{p} \lambda_l \frac{l-k}{l+1} \tag{3.6}$$

$k = 0$ に対しては

$$b_0 = -\frac{4^{1-p}}{3} \sum_{l=2}^{p} \lambda_l \frac{l(l-1)(2l+5)}{l+1} \tag{3.7}$$

$$\lambda_{p-k} = -\sum_{i=0}^{k-1} \frac{\lambda_{p-i}}{2p-2i+2} \begin{pmatrix} 2p-2i+2 \\ 2p-2k+1 \end{pmatrix} \tag{3.8}$$

$k \leq (p-1)$ に対して

$$\tilde{b}_{2k} = \sum_{i=1}^{p-k} \begin{pmatrix} 2p-2i \\ 2k \end{pmatrix} 2^{(-2p+2i+2k)} b_{2p-2i} \tag{3.9}$$

$k \leq (p-2)$ に対して

$$\tilde{b}_{2k+1} = \sum_{i=1}^{p-k-1} \begin{pmatrix} 2p-2i \\ 2k+1 \end{pmatrix} 2^{(-2p+2i+2k+1)} b_{2p-2i} \tag{3.10}$$

ベルヌーイ数を利用した公式[2] の様に，一本のスマートな形にはなりませんでした．また，κ_k や λ_k の計算では，漸化計算が残っています．それでも，初学者にはより馴染みやすい表式ではないでしょうか.

なお，多項式 ϕ_{2p-2} 及び ψ_{2p-2} に就いては，下記の諸点が示されます．(文献 [11] を参照して下さい.)

- 有理数因数を持たない
- 実数因数の存在と累乗数との関係
- a_{2k} の符合は，次数 k と伴に交互に反転．b_{2k} の符合についても同様.
- $\sum_{k=0}^{2p-2} \tilde{a}_k = 1$ 及び $\sum_{k=0}^{2p-2} \tilde{b}_k = 1$

4 計算例

（$p = 2$ **の場合**）

式 (3.3) より、先ず κ_{p-k} を求めます．$p = 2$ の場合は、$\kappa_2 = 1$ のみですから、(3.1) ないし (3.5) を使って係数 $a_{2k}, \tilde{a}_i$ を計算して行きます.

$$a_0 = -4^{-1} \sum_{l=2}^{2} \kappa_l \frac{(l-1)(2l+3)}{2l+1} = -\frac{\kappa_2}{4} \times \frac{7}{5} = -\frac{7}{20}$$

[2] 付録 6.3 参照

$$a_2 = 3 \times 4^0 \sum_{l=2}^{2} \frac{\kappa_l}{2l+1} = 3 \times \frac{1}{5} = \frac{3}{5}$$

$$\tilde{a}_0 = \sum_{i=1}^{2} \left(\begin{array}{c} 4-2i \\ 0 \end{array} \right) 4^{-2+i} a_{4-2i} = \frac{a_2}{4} + a_0 = -\frac{1}{5}$$

$$\tilde{a}_1 = 2 \sum_{i=1}^{1} \left(\begin{array}{c} 4-2i \\ 1 \end{array} \right) 4^{-2+i} a_{4-2i} = 4 \times 4^{-1} a_2 = \frac{3}{5}$$

$$\tilde{a}_2 = \sum_{i=1}^{1} \left(\begin{array}{c} 4-2i \\ 2 \end{array} \right) 4^{-2+i+1} a_{4-2i} = a_2 = \frac{3}{5}$$

従って、

$$\phi_2(n) = \frac{3}{5}n^2 + \frac{3}{5}n - \frac{1}{5}$$

$$S_4(n) = S_2(n)\phi_2(n) = n(\frac{n^4}{5} + \frac{n^3}{2} + \frac{n^2}{3} - \frac{1}{30}) \tag{4.1}$$

次に、$S_5(n)$ を計算します.

$\lambda_p = \lambda_2 = 1$ ですから、(3.6) ないし (3.10) を使って係数 $b_{2k}, \tilde{b}_i$ を計算して行きます.

$$b_0 = -\frac{4^{-1}}{3} \sum_{l=2}^{2} \lambda_l \frac{l(l-1)(2l+5)}{l+1} = -\frac{1}{12} \times \frac{2 \times 9}{3} = -\frac{1}{2}$$

$$b_2 = 2 \sum_{l=2}^{2} \lambda_l \frac{l-1}{l+1} = \frac{2}{3}$$

$$\tilde{b}_0 = \sum_{i=1}^{2} \left(\begin{array}{c} 4-2i \\ 0 \end{array} \right) 4^{-2+i} b_{4-2i} = \frac{b_2}{4} + b_0 = -\frac{1}{3}$$

$$\tilde{b}_1 = 2 \sum_{i=1}^{1} \left(\begin{array}{c} 4-2i \\ 1 \end{array} \right) 4^{-2+i} b_{4-2i} = b_2 = \frac{2}{3}$$

$$\tilde{b}_2 = \sum_{i=1}^{1} \left(\begin{array}{c} 4-2i \\ 2 \end{array} \right) 4^{-2+i} b_{4-2i} = b_2 = \frac{2}{3}$$

従って、

$$\psi_2(n) = \frac{2}{3}n^2 + \frac{2}{3}n - \frac{1}{3}$$

$$S_5(n) = S_1^2(n)\psi_2(n) = n^2(\frac{n^4}{6} + \frac{n^3}{2} + \frac{5n^2}{12} - \frac{1}{12}) \tag{4.2}$$

（$p = 3$ の場合）

まず、$\kappa_3 = 1$ である事に注意します.

$$\kappa_2 = -\sum_{i=0}^{0} \frac{\kappa_{3-i}}{7-2i} \left(\begin{array}{c} 7-2i \\ 6-2 \end{array} \right) = -\frac{1}{7} \left(\begin{array}{c} 7 \\ 4 \end{array} \right) = -5$$

$$a_0 = -4^{-2} \sum_{l=2}^{3} \kappa_l \frac{(l+1)(2l+3)}{2l+1} = -\frac{1}{16}(\kappa_2 \frac{7}{5} + \kappa_3 \frac{18}{7}) = \frac{31}{16 \times 7}$$

$$a_2 = 3 \times 4^{-1} \sum_{l=2}^{3} \kappa_l \frac{1}{2l+1} = \frac{3}{4}(\kappa_2 \frac{1}{5} + \kappa_3 \frac{1}{7}) = -\frac{9}{14}$$

$$a_4 = 3 \times 4^0 \sum_{l=3}^{3} \kappa_l \frac{1}{2l+1} = \frac{3}{7}\kappa_3 = \frac{3}{7}$$

$$\tilde{a}_0 = \sum_{i=1}^{3} \begin{pmatrix} 6-2i \\ 0 \end{pmatrix} 4^{i-3} a_{6-2i} = \frac{a_4}{16} + \frac{a_2}{4} + a_0 = \frac{1}{7}$$

$$\tilde{a}_1 = 2\sum_{i=1}^{2} \begin{pmatrix} 6-2i \\ 1 \end{pmatrix} 4^{i-3} a_{6-2i} = \frac{a_4}{2} + a_2 = -\frac{3}{7}$$

$$\tilde{a}_2 = \sum_{i=1}^{2} \begin{pmatrix} 6-2i \\ 2 \end{pmatrix} 4^{i-2} a_{6-2i} = \frac{3a_4}{2} + a_2 = 0$$

$$\tilde{a}_3 = \sum_{i=1}^{1} \begin{pmatrix} 6-2i \\ 3 \end{pmatrix} 4^{i-2} a_{6-2i} = 2a_4 = \frac{6}{7}$$

$$\tilde{a}_4 = \sum_{i=1}^{1} \begin{pmatrix} 6-2i \\ 4 \end{pmatrix} 4^{i-1} a_{6-2i} = a_4 = \frac{3}{7}$$

従って、

$$\phi_4(n) = \frac{3}{7}n^4 + \frac{6}{7}n^3 - \frac{3}{7}n + \frac{1}{7}$$

$$S_6(n) = S_2(n)\phi_4(n) = n(\frac{1}{7}n^6 + \frac{1}{2}n^5 + \frac{1}{2}n^4 - \frac{1}{6}n^2 + \frac{1}{42}) \tag{4.3}$$

以下に、S_7 についての計算結果を示します.（$\lambda_3 = 1$）

$$\lambda_2 = -7 \qquad b_0 = \frac{17}{32} \qquad b_2 = -\frac{11}{12} \qquad b_4 = \frac{1}{2}$$

$$\tilde{b}_0 = \frac{1}{3} \qquad \tilde{b}_1 = -\frac{2}{3} \qquad \tilde{b}_2 = \frac{1}{6}$$

$$\tilde{b}_3 = 1 \qquad \tilde{b}_4 = \frac{1}{2}$$

$$\psi_4(n) = \frac{1}{2}n^4 + n^3 - \frac{1}{6}n^2 - \frac{2}{3}n + \frac{1}{3}$$

$$S_7(n) = S_1^2(n)\psi_4(n) = n^2(\frac{1}{8}n^6 + \frac{1}{2}n^5 + \frac{7}{12}n^4 - \frac{7}{24}n^2 + \frac{1}{12}) \tag{4.4}$$

$S_q(n)$ の計算式 (4.1)〜(4.4) の右辺括弧内の最高次項の係数は、$\frac{1}{q+1}$ であり、これに次ぐ項の係数は $\frac{1}{2}$ となっています. また、残りの項は偶数次項のみです. これ等の事は、ベルヌーイ数による表示式 [3] から、一般的に成立している事がわかります.

5　おわりに

自然数の四則演算を自由に表現するために，人類は有理数を考え出したのでしょう.

有理数だけの世界でべき和を表現しようとすると，今回の私の考察の様に多量の代数計算と工夫が必要です。実数の世界から俯瞰すれば，例えばベルヌーイ数との関連表現の様に，解析的手法も含めた一般論の一例として，位置づけられると言えないでしょうか.

「代数計算という井戸の中で，見通しもなく宝の法則を探っている」と言うのが，私の姿なのかも知れません.

ところで，式 (2.6)，(2.7) を見出した頃，当然先達の後塵を拝した計算式であろうと思い，数学公式集やネット上のサイト等を検索してみました.

[3] 付録 6.3 参照

[8] に，次式のような漸化式があります.（記号は，本文の記号に合わせて，改変しています. 尚、文献 [11] § 3-(4) で証明しています.）

$$(n+1)^{p+1}-(n+1)=(p+1)S_p(n)+\frac{p(p+1)}{2!}S_{p-1}(n)+\ldots+(p+1)S_1(n) \tag{5.1}$$

中西先生の [4] では、その発見法的手法が大いに参考になりました．[5] には、階差数列に関連した算法も紹介されております. それは、先人たちの取り組みの一端が窺い知れるものでした．[9] では、差分の考え方を利用した漸近計算法が記されています.

今回の投稿に当り，論文の表現の改良について，矢野先生のご指導を得ました.

6　付録

6.1　漸化式 (2.4) を思いついた経緯

天才数学者ガウスの逸話で有名な自然数の和 $S_1(n)=\sum_{k=1}^{n}k$ の公式が，$\frac{n(n+1)}{2}$ であることは簡単に証明されますが，２乗の和 $S_2(n)=\sum_{k=1}^{n}k^2$ の公式は，ただ丸暗記しただけの記憶しかありませんでした.

最近になってあれこれ計算している内に，$S_2(2n)$ の二通りの計算式の利用を思い付きました．たとえば，

$$S_2(2n)=\sum_{k=1}^{n}k^2+\sum_{k=1}^{n}(n+k)^2$$

$$S_2(2n)=\sum_{k=1}^{n}(2k)^2+\sum_{k=0}^{n-1}(2k+1)^2$$

上の二つの式の右辺を展開して等しいと置くと

$$2S_2(n)+n^2(2n+1)=8S_2(n)-n(2n+1)$$

となり，これから

$$6S_2(n)=n(n+1)(2n+1)$$

という見覚えのある公式が得られます.

この方法で，さらに大きなべき乗数の場合の和の計算を進めましたが，二項展開計算量の爆発的増加に閉口しました．ただ，得られた公式（n の多項式）から幾つかの規則性が見て取れて，一般化出来ないものかと模索を始めました．上に述べた方法でも $S_r(n),(r=0\sim q)$ の関係式は得られますが，そんなに有用ではありません.

それでちょっとやり方を変えてみました.

べき乗数が q の場合も，$S_q(2n)$ の関係式は

$$\begin{aligned}S_q(2n)&=\sum_{k=1}^{n}(2k)^q+\sum_{k=0}^{n-1}(2k+1)^q\\&=\sum_{k=1}^{n}(2k)^q+\sum_{k=1}^{n}(2k-1)^q\end{aligned}$$

であることから

$$\sum_{k=0}^{n-1}(2k+1)^q=\sum_{k=1}^{n}(2k-1)^q$$

が成り立つことに気づいたのです．しかし，これは私の思考の経緯をたどっただけで，この式はもともと自明な式です．しかし，この自明な式から $S_q(n)$ の関係式が導かれることを見つけたのが私の発想のはじまりです.

6.2 係数 κ_l, λ_l について

第 3.1 節 (6 ページ) で導入された係数 κ_l は、次の様なものでした.

$$\kappa_{p-k} = -\sum_{i=0}^{k-1} \frac{\kappa_{p-i}}{2p-2i+1} \begin{pmatrix} 2p-2i+1 \\ 2p-2k \end{pmatrix}$$

右辺を変形すると、

$$\kappa_{p-k} = -\sum_{i=0}^{k-1} \frac{\kappa_{p-i}(2p-2i)!}{(2k-2i+1)!(2p-2k)!}$$

となりますから、$(2p-2k)!\kappa_{p-k} = K_{p-k}$ により、K_{p-k} を定義すれば、$\kappa_p = 1$ より、$K_p = (2p)!$ であり、次式が成り立ちます.

$$K_{p-k} = -\sum_{i=0}^{k-1} \frac{K_{p-i}}{(2k-2i+1)!}$$

この漸化式から、次の様に表示されます.

$$K_{p-k} = \gamma_{p-k} K_p = (2p)!\gamma_{p-k} \tag{6.1}$$

一方、λ_l は、7 ページで導入されております.

$$\lambda_{p-k} = -\sum_{i=0}^{k-1} \frac{\lambda_{p-i}}{2p-2i+2} \begin{pmatrix} 2p-2i+2 \\ 2p-2k+1 \end{pmatrix}$$

κ_l に倣って、$(2p-2k+1)!\lambda_{p-k} = L_{p-k}$ により L_{p-k} を定義すれば、$\lambda_p = 1$ より $L_p = (2p+1)!$ であり、

$$L_{p-k} = -\sum_{i=0}^{k-1} \frac{L_{p-i}}{(2k-2i+1)!}$$

となって、K_{p-k} と全く同一の漸化式が成り立ちます.

従って、

$$L_{p-k} = \gamma_{p-k} L_p = (2p+1)!\gamma_{p-k} \tag{6.2}$$

式 (6.1),(6.2) から、

$$(2p+1)K_{p-k} = L_{p-k} \tag{6.3}$$

$$(2p+1)\kappa_{p-k} = (2p-2k+1)\lambda_{p-k} \tag{6.4}$$

係数 γ_{p-k} は、

$$\gamma_{p-1} = -\frac{1}{3!}$$

$$\gamma_{p-2} = -\frac{1}{5!} + (\frac{1}{3!})^2$$

$$\gamma_{p-3} = -\frac{1}{7!} + \frac{2}{3!5!} - (\frac{1}{3!})^3$$

$$\gamma_{p-4} = -\frac{1}{9!} + \frac{2}{3!7!} + (\frac{1}{5!})^2 - \frac{3}{5!(3!)^2} + (\frac{1}{3!})^4$$

の様な数で、規則性がつかめません. これは、ベルヌーイ数の不規則性に対応するのかも知れません.

6.3 ベルヌーイ数との関係

ベルヌーイ数 B_l によるべき乗の和 $BS_q(n)$ は、ガウス括弧を使って次の様な多項式で表されます.[4]

$$BS_q(n) = \frac{1}{q+1}n^{q+1} + \frac{1}{2}n^q + \sum_{l=1}^{[\frac{q}{2}]} \frac{(-1)^{l-1}}{2l} \begin{pmatrix} q \\ 2l-1 \end{pmatrix} B_l n^{q-2l+1}$$

q が偶数 $(2p)$ と奇数 $(2p+1)$ の場合に分ければ、

$$BS_{2p}(n) = \frac{1}{2p+1}n^{2p+1} + \frac{1}{2}n^{2p} + \sum_{l=1}^{p} \frac{(-1)^{l-1}}{2l} \begin{pmatrix} 2p \\ 2l-1 \end{pmatrix} B_l n^{2p-2l+1} \tag{6.5}$$

$$BS_{2p+1}(n) = \frac{1}{2p+2}n^{2p+2} + \frac{1}{2}n^{2p+1} + \sum_{l=1}^{p} \frac{(-1)^{l-1}}{2l} \begin{pmatrix} 2p+1 \\ 2l-1 \end{pmatrix} B_l n^{2p-2l+2} \tag{6.6}$$

一方、今回の和の式 (2.8)(2.9) について

$$S_{2p}(n) = n\tilde{S}_{2p}(n)$$

$$S_{2p+1}(n) = n^2\tilde{S}_{2p+1}(n)$$

により $\tilde{S}_{2p}(n)$ 及び $\tilde{S}_{2p+1}(n)$ を導入すれば、

$$\tilde{S}_{2p}(n) = \frac{\tilde{a}_0}{6} + (\frac{\tilde{a}_1}{6} + \frac{\tilde{a}_0}{2})n + \sum_{k=2}^{2p-2}(\frac{\tilde{a}_k}{6} + \frac{\tilde{a}_{k-1}}{2} + \frac{\tilde{a}_{k-2}}{3})n^k + (\frac{\tilde{a}_{2p-2}}{2} + \frac{\tilde{a}_{2p-3}}{3})n^{2p-1} + \frac{\tilde{a}_{2p-2}}{3}n^{2p} \tag{6.7}$$

$$\tilde{S}_{2p+1}(n) = \frac{\tilde{b}_0}{4} + (\frac{\tilde{b}_1}{4} + \frac{\tilde{b}_0}{2})n + \sum_{k=2}^{2p-2}(\frac{\tilde{b}_k}{4} + \frac{\tilde{b}_{k-1}}{2} + \frac{\tilde{b}_{k-2}}{4})n^k + (\frac{\tilde{b}_{2p-2}}{2} + \frac{\tilde{b}_{2p-3}}{4})n^{2p-1} + \frac{\tilde{b}_{2p-2}}{4}n^{2p} \tag{6.8}$$

(6.5) と (6.7)×n 及び (6.6) と (6.8)×n^2 の係数の比較から, 下記の関係式が得られます.($k = 1...p-2$)

$$\tilde{a}_{2p-2} = \frac{3}{2p+1} \tag{6.9}$$

$$2\tilde{a}_{2p-3} + 3\tilde{a}_{2p-2} = 3 \tag{6.10}$$

$$\tilde{a}_1 + 3\tilde{a}_0 = 0 \tag{6.11}$$

$$\tilde{a}_{2k+1} + 3\tilde{a}_{2k} + 2\tilde{a}_{2k-1} = 0 \tag{6.12}$$

$$\tilde{a}_{2k} + 3\tilde{a}_{2k-1} + 2\tilde{a}_{2k-2} = (-1)^{p-k-1}\frac{3}{p-k} \begin{pmatrix} 2p \\ 2p-2k-1 \end{pmatrix} B_{p-k} \tag{6.13}$$

$$\tilde{a}_0 = (-1)^{p-1} \times 6B_p \tag{6.14}$$

$$\tilde{b}_{2p-2} = \frac{2}{p+1} \tag{6.15}$$

$$\tilde{b}_{2p-3} + 2\tilde{b}_{2p-2} = 2 \tag{6.16}$$

$$\tilde{b}_1 + 2\tilde{b}_0 = 0 \tag{6.17}$$

$$\tilde{b}_{2k+1} + 2\tilde{b}_{2k} + \tilde{b}_{2k-1} = 0 \tag{6.18}$$

$$\tilde{b}_{2k} + 2\tilde{b}_{2k-1} + \tilde{b}_{2k-2} = (-1)^{p-k-1}\frac{2}{p-k} \begin{pmatrix} 2p+1 \\ 2p-2k-1 \end{pmatrix} B_{p-k} \tag{6.19}$$

$$\tilde{b}_0 = (-1)^{p-1}2(2p+1)B_p \tag{6.20}$$

数値解析ソフトによる検算では、文献 [7] のベルヌーイ数 B_{10} まで、全く問題無く成立しております.

[4] 文献 [7]

参考文献

[1] ベルヌーイ数，http://ja.wikipedia

[2] 日本数学会　編,『数学辞典』第 4 版（岩波書店，2007）1713

[3] ハイラー，ヴァンナー（蟹江幸博　訳）,『解析教程』上　（シュプリンガー，2007）190-196

[4] 中西　襄，自然数の冪和に関する関係式，数学・物理通信，1 巻 4 号 (2010) 8-11

[5] 矢野 忠，自然数のべき乗の級数１，数学・物理通信，3 巻 4 号 (2013) 9-18

[6] 矢野 忠，自然数のべき乗の級数２，数学・物理通信，3 巻 4 号 (2013) 19-23

[7] 森口，宇田川，一松,『数学公式集 II』,（岩波書店，1957）1-3,
実はこの書には $q = 7$ までしか載っていない.

[8] 藤田 外次郎　他　編,『新訂　数学公式』（山海堂，1944）

[9] 自然数の累乗の和の公式（１），http://d.hatena.jp/dachs_hippo/

[10] ファウルハーバーの公式，http://ja.wikipedia

[11] 自然数の累乗和，http://www7a.biglobe.ne.jp/ tapascal/

（編集者（矢野）付記）

自然数のべきの和を求めるためには中西先生が見つけられた自然数のべき和の関係式をフルに使って当該の自然数のべき和を求めるのが一番簡単なのではないかという気がしている．

中西先生がその関係式を出されたときにはその有効性が私にはよくわかっていなかった．それはべき和の間の関係式であって個々の求めたい自然数のべき和とは関係がないとそのときに思ったからである．

しかし，こうやって秋葉さんがべき和の多項式の係数を求める計算をしてくれたおかげで，中西先生の出された関係式はそれから個々のべき和の多項式を求めるためにはもっとも有効手段ではないかとようやく思えるようになった．

自然数のべき乗の級数の和 3

矢野　忠 [1]

Power Series of Natural Numbers 3

Tadashi YANO [2]

1　はじめに

自然数のべき乗の級数の和についてすでに 2 編のエッセイを発表したが，これはその第 3 である．

秋葉さんから自然数のべき乗の級数の和について投稿があった [1]．その原稿を見ているうちに中西先生が以前に「自然数の冪和に関する関係式」という論文を投稿されていたことを思い出した [2]．その論文をただ自然数のべき乗の和の関係式の導出というふうに捉えていたことが狭い考えだということに気がついた．

それで，その関係式をつかって級数の和を求めてみたいという気がしはじめた．中西先生がすでに導いた関係式を使って自然数のべき乗の和をどのように求めるかを考えてみよう．

以下に述べることはもしオリジナリティがあるとすれば，すべて中西先生のものである．その点を先ず申し上げておきたい．

2　奇数べきと偶数べきの和の関係式

関係式はすでに奇数べき場合と偶数べきの場合と分けてあたえられている [2]．奇数べきの場合には

$$\sum_{r=0}^{[\frac{q}{2}]} \frac{(q+1)!}{(2r+1)!(q-2r)!} S_{2q-2r+1}(n) = \frac{1}{2} n^{q+1}(n+1)^{q+1} \tag{2.1}$$

で与えられる．

偶数べきの場合には

$$\sum_{r=0}^{[\frac{q}{2}]} \frac{(q+1)!(2q-2r+1)}{(2r+1)!(q-2r)!} S_{2q-2r}(n) = \frac{1}{2}(2n+1)n^{q}(n+1)^{q} \tag{2.2}$$

で与えられる．$[\frac{q}{2}]$ は $\frac{q}{2}$ を超えない最大の整数を表す，ガウス記号である．

これを簡単のためにつぎのように書き変える．いまこれらの式の右辺は n と $n+1$ の入れ替えに対して対称な式であるので，

$$m = n+1 \tag{2.3}$$

$$p = nm = n(n+1) \tag{2.4}$$

とおく．そうするとすべての自然数のべき乗の級数の和は n, m, p で表される．p は n と m との入れ替えに対して対称であり，$2n+1 = n+m$ はもちろん n と m の入れ替えに対して対称である．

この記号をつかって前の二つの式を表すと

$$\sum_{r=0}^{[\frac{q}{2}]} \frac{(q+1)!}{(2r+1)!(q-2r)!} S_{2q-2r+1}(n) = \frac{1}{2} p^{q+1} \tag{2.5}$$

[1] 元愛媛大学

[2] yanotad@earth.ocn.ne.jp

$$\sum_{r=0}^{[\frac{q}{2}]} \frac{(q+1)!(2q-2r+1)}{(2r+1)!(q-2r)!} S_{2q-2r}(n) = \frac{1}{2}(n+m)p^q \tag{2.6}$$

となる．

3 奇数べきの級数の和

まず奇数べきの級数の和から考えてみよう．以下では $S_q(n)$ の引数 n を省略する．

$q=0$ のとき

$$\begin{aligned} S_1 &= \frac{1}{2}p \\ &= \frac{1}{2}n(n+1) \end{aligned} \tag{3.1}$$

$q=1$ のとき

$$\begin{aligned} S_3 &= \frac{1}{4}p^2 \\ &= \frac{1}{4}n^2(n+1)^2 \end{aligned} \tag{3.2}$$

がすぐに得られる．

$q=2$ のときには

$$3S_5 + S_3 = \frac{1}{2}p^3 \tag{3.3}$$

であるから

$$\begin{aligned} 3S_5 &= \frac{1}{2}p^3 - S_3 \\ &= \frac{1}{2}p^3 - \frac{1}{4}p^2 \\ &= \frac{1}{4}p^2(2p-1) \end{aligned}$$

となり，したがって

$$\begin{aligned} S_5 &= \frac{1}{12}p^2(2p-1) \\ &= \frac{1}{12}n^2(n+1)^2(2n^2+2n-1) \end{aligned} \tag{3.4}$$

と求められる．

$q=3$ のときには

$$4S_7 + 4S_5 = \frac{1}{2}p^4 \tag{3.5}$$

であるから

$$\begin{aligned} 4S_7 &= \frac{1}{2}p^4 - 4S_5 \\ &= \frac{1}{2}p^4 - \frac{1}{3}p^2(2p-1) \\ &= \frac{1}{6}p^2(3p^2-4p+2) \end{aligned}$$

となり，したがって

$$S_7 = \frac{1}{24}p^2(3p^2-4p+2) \\ = \frac{1}{24}n^2(n+1)^2(3n^4+6n^3-n^2-4n+2) \tag{3.6}$$

と求められる．

$q=4$ のときには

$$5S_9+10S_7+S_5 = \frac{1}{2}p^5 \tag{3.7}$$

であるから

$$\begin{aligned} 5S_9 &= \frac{1}{2}p^5 - 10S_7 - S_5 \\ &= \frac{1}{2}p^5 - \frac{10}{24}p^2(3p^2-4p+2) - \frac{1}{12}p^2(2p-1) \\ &= \frac{1}{4}p^2(2p^3-5p^2+6p-3) \\ &= \frac{1}{4}p^2(p-1)(2p^2-3p+3) \end{aligned}$$

となり，したがって

$$S_9 = \frac{1}{20}p^2(p-1)(2p^2-3p+3) \\ = \frac{1}{20}n^2(n+1)^2(n^2+n-1)(2n^4+4n^3-n^2-3n+3) \tag{3.8}$$

と求められる．

$q=5$ のときには

$$6S_{11}+20S_9+6S_7 = \frac{1}{2}p^6 \tag{3.9}$$

であるから

$$\begin{aligned} 6S_{11} &= \frac{1}{2}p^6 - 20S_9 - 6S_7 \\ &= \frac{1}{2}p^6 - p^2(2p^3-5p^2+6p-3) - \frac{1}{4}p^2(3p^2-4p+2) \\ &= \frac{1}{4}p^2(2p^4-8p^3+17p^2-20p+10) \end{aligned}$$

となり，したがって

$$S_{11} = \frac{1}{24}p^2(2p^4-8p^3+17p^2-20p+10) \\ = \frac{1}{24}n^2(n+1)^2(2n^8+8n^7+4n^6-16n^5-5n^4+26n^3-3n^2-20n+10) \tag{3.10}$$

と求められる．

$q=6$ のときには

$$7S_{13}+35S_{11}+21S_9+S_7 = \frac{1}{2}p^7 \tag{3.11}$$

であるから

$$\begin{aligned} 7S_{13} &= \frac{1}{2}p^7 - 35S_{11} - 21S_9 - S_7 \\ &= \frac{1}{2}p^7 - \frac{35}{24}p^2(2p^4-8p^3+17p^2-20p+10) - \frac{21}{20}p^2(2p^3-5p^2+6p-3) - \frac{1}{24}p^2(3p^2-4p+2) \\ &= \frac{1}{60}p^2(30p^5-175p^4+574p^3-1180p^2+1382p-691) \end{aligned}$$

となり，したがって

$$
\begin{aligned}
S_{13} &= \frac{1}{420}p^2(30p^5 - 175p^4 + 574p^3 - 1180p^2 + 1382p - 691) \\
&= \frac{1}{420}n^2(n+1)^2(30n^{10} + 150n^9 + 125n^8 - 400n^7 - 326n^6 \\
&\quad + 1052n^5 + 367n^4 - 1786n^3 + 202n^2 + 1382n - 691)
\end{aligned} \tag{3.12}
$$

と求められる．

手による計算で求められるのは奇数のべきの場合にはこの S_{13} ぐらいまでであろう．これ以上のべきの場合には手間と暇をかければ，もちろん求められるが，それがなんらかの意味があることでもわかっていない限りは求める気が起こらない．

奇数べきの和の場合には Faulhaber の多項式で表されることがすでに知られていたことを原稿をほぼ書き終わってから知った [3]。それについてはこの節で得られた関係から導けることを付録に示しておく．

4 偶数べきの級数の和

つづいて偶数べきの級数の和を考えてみよう．

$q = 1$ のとき

$$3S_2 = \frac{1}{2}(n+m)p \tag{4.1}$$

が得られる．したがって

$$
\begin{aligned}
S_2 &= \frac{1}{6}(n+m)p \\
&= \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)
\end{aligned} \tag{4.2}
$$

と求められる．

$q = 2$ のとき

$$5S_4 + S_2 = \frac{1}{2}(n+m)p^2 \tag{4.3}$$

であるから，

$$
\begin{aligned}
5S_4 &= \frac{1}{2}(n+m)p^2 - S_2 \\
&= \frac{1}{2}(n+m)p^2 - \frac{1}{6}(n+m)p \\
&= \frac{1}{6}(n+m)p(3p-1)
\end{aligned}
$$

が得られる．したがって

$$
\begin{aligned}
S_4 &= \frac{1}{30}(n+m)p(3p-1) \\
&= \frac{1}{30}n(n+1)(2n+1)(3n^2+3n-1)
\end{aligned} \tag{4.4}
$$

と求められる．

$q = 3$ のとき

$$7S_6 + 5S_4 = \frac{1}{2}(n+m)p^3 \tag{4.5}$$

であるから，

$$
\begin{aligned}
7S_6 &= \frac{1}{2}(n+m)p^3 - \frac{1}{6}(n+m)p(3p-1) \\
&= \frac{1}{6}(n+m)p(3p^2-3p+1)
\end{aligned}
$$

が得られる．したがって

$$\begin{aligned} S_6 &= \frac{1}{42}(n+m)p(3p^2-3p+1) \\ &= \frac{1}{42}n(n+1)(2n+1)(3n^4+6n^3-3n+1) \end{aligned} \tag{4.6}$$

と求められる．

　$q=4$ のとき

$$9S_8+14S_6+S_4 = \frac{1}{2}(n+m)p^4 \tag{4.7}$$

であるから，

$$\begin{aligned} 9S_8 &= \frac{1}{2}(n+m)p^4-14S_6-S_4 \\ &= \frac{1}{2}(n+m)p^4-\frac{1}{3}(n+m)p(3p^2-3p+1)-\frac{1}{30}(n+m)p(3p-1) \\ &= \frac{1}{10}(n+m)p(5p^3-10p^2+9p-3) \end{aligned}$$

が得られる．したがって

$$\begin{aligned} S_8 &= \frac{1}{90}(n+m)p(5p^3-10p^2+9p-3) \\ &= \frac{1}{90}n(n+1)(2n+1)(5n^6+15n^5+5n^4-15n^3-n^2+9n-3) \end{aligned} \tag{4.8}$$

と求められる．$n=1$ のとき $p=2$ であるから $S_8=1$ となるから検算に合格となる．

　$q=5$ のとき

$$11S_{10}+30S_8+7S_6 = \frac{1}{2}(n+m)p^5 \tag{4.9}$$

であるから，

$$\begin{aligned} 11S_{10} &= \frac{1}{2}(n+m)p^5-30S_8-7S_6 \\ &= \frac{1}{3}(n+m)p^5-\frac{1}{3}(n+m)p(5p^3-10p^2+9p-3)-\frac{1}{6}p(3p^2-3p+1) \\ &= \frac{1}{6}(n+m)p(p-1)(3p^3-7p^2+10p-5) \end{aligned}$$

が得られる．したがって

$$\begin{aligned} S_{10} &= \frac{1}{66}(n+m)p(p-1)(3p^3-7p^2+10p-5) \\ &= \frac{1}{66}n(n+1)(2n+1)(n^2+n-1)(3n^6+9n5+2n^4-11n^3+3n^2+10n-5) \end{aligned} \tag{4.10}$$

と求められる．$n=1$ のとき $p=2$ で，$S_{10}=1$ となるから検算に合格となる．

　$q=6$ のとき

$$13S_{12}+55S_{10}+27S_8+S_6 = \frac{1}{2}(n+m)p^6 \tag{4.11}$$

であるから，

$$\begin{aligned} 13S_{12} &= \frac{1}{2}(n+m)p^6-55S_{10}-27S_8-S_6 \\ &= \frac{1}{3}(n+m)p^6-\frac{5}{6}(n+m)p(3p^4-10p^3+17p^2-15p+5) \\ &\quad -\frac{3}{10}(n+m)p(5p^3-10p^2+9p-3)-\frac{1}{42}(n+m)p(2p^2-3p+1) \\ &= \frac{1}{210}(n+m)p(105p^5-525p^4+1435p^3-2360p^2+2073p-691) \end{aligned}$$

が得られる．したがって

$$
\begin{aligned}
S_{12} &= \frac{1}{2730}(n+m)p(105p^5 - 525p^4 + 1435p^3 - 23603p^2 + 2073p - 691) \\
&= \frac{1}{2730}n(n+1)(2n+1)(105n^{10} + 525^9 + 525n^8 - 1050n^7 - 1190n^6 + 2310^5 \\
&\quad + 1420n^4 - 3285n^3 - 287n^2 + 2073n - 691)
\end{aligned} \tag{4.12}
$$

と求められる．$n = 1$ のとき $p = 2$ であり，$S_{12}(1) = 1$ となるから検算に合格となる．

偶数のべきの場合にも手による計算で求められるのは S_{12} ぐらいまでであろう．これ以上のべきの場合には手間と暇をかければ，もちろん求められるが，事情は奇数の場合と同様である．

奇数のべきの場合には中西先生の論文で和の式が S_{13} まで与えられていたので，その結果と照合するだけで検算をしなかったが，偶数べきの場合には結果が与えられていないので検算をした．それは $S_q(1) = 1$ であるかを調べた．求められた式が $S_q(1) = 1$ を満たしていてもなお正しい式であることが保証されたわけではないが，少なくとも式がこの値をとらないと間違っている．

$S_q(n)$ を n で表してしまうとその式が正しいかどうかがわからなくなってしまうが，n, m, p で表しているときは和を与える式は n と m との文字に入れ替えに対して対称でなければならない．これも検算の一つの方法である．

5　おわりに

自然数のべき乗の和を求める方法はいくつもあるので，それらの全部をレビューすることはできないけれども代表的な方法をレビューした後で，数式処理のシステムをつかってどのアルゴリズムが効率的かを調べたいと思っている．

ここでは手による計算でできる範囲でどういうふうに計算をしたらいいかを，多分もっとも効率のいい方法と思われる中西の方法で求めてみた．他の方法のレビューはつづきのレポートに譲る．

6　付録　Faulhaber の多項式

Faulhaber の多項式のことが [3] に出ていた．

$$
S_q(n) = 1^q + 2^q + 3^q + \cdots + n^q \tag{6.1}
$$

で q が奇数のときに

$$
a = 1 + 2 + 3 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2} \tag{6.2}
$$

と表すと

$$
S_3 = 1^3 + 2^3 + 3^3 + \cdots + n^3 = a^2 \tag{6.3}
$$

$$
S_5 = 1^5 + 2^5 + 3^5 + \cdots + n^5 = \frac{4a^3 - a^2}{3} \tag{6.4}
$$

$$
S_7 = 1^7 + 2^7 + 3^7 + \cdots + n^7 = \frac{12a^4 - 8a^3 + 2a^2}{6} \tag{6.5}
$$

$$
S_9 = 1^9 + 2^9 + 3^9 + \cdots + n^9 = \frac{16a^5 - 20a^4 + 12a^3 - 3a^2}{5} \tag{6.6}
$$

$$
S_{11} = 1^{11} + 2^{11} + 3^{11} + \cdots + n^{11} = \frac{32a^6 - 64a^5 + 68a^4 - 40a^3 + 10a^2}{6} \tag{6.7}
$$

と表されている．これらの式の右辺が Faulhaber の多項式である．

これらの式を一般化すると

$$S_{2q+1}(n) = \frac{1}{2^{2q+2}(2q+2)} \sum_{r=0}^{q} \binom{2q+2}{2r} (2-2^{2r}) B_{2r} [(8a+1)^{q+1-r} - 1] \tag{6.8}$$

となるという．ここで，B_{2r} は Bernoulli 数である。

(6.3)〜(6.7) は 3 節で導いた (3.2), (3,4), (3.8), (3.10) から $p = 2a, p^2 = 4a^2$ とおきかえれば，直ちに求められる．ただし，分子，分母の約分をしたり，共通因子の a^2 をとりだして，つぎのように表示した方がよいのではないかと思う．

$$S_3 = a^2 \tag{6.9}$$

$$S_5 = \frac{1}{3} a^2 (4a - 1) \tag{6.10}$$

$$S_7 = \frac{1}{3} a^2 (6a^2 - 4a + 1) \tag{6.11}$$

$$S_9 = \frac{1}{5} a^2 (16a^3 - 20a^2 + 12a - 3) \tag{6.12}$$

$$S_{11} = \frac{1}{3} a^2 (16a^4 - 32a^3 + 34a^2 - 20a + 5) \tag{6.13}$$

(2015.6.18)

参考文献

[1] 秋葉敏男，自然数のべき乗の級数，数学・物理通信，5 巻 7 号 (2015) 9-22

[2] 中西　襄，自然数の冪和に関する関係式，数学・物理通信，1 巻 4 号 (2010) 8-11

[3] http://en.wikipedia.org/wiki/Faulhaber%27s_formula

編集後記

5 巻 6 号に続いて 5 巻 7 号を発行する．

この号では自然数のべき乗の級数の和についての論文とエッセイを一つずつ載せた．秋葉さんの投稿論文に触発された私のエッセイを載せたからである．これは以前の号に載せた同じタイトルのエッセイのつづきという意味あいもある．

いつもながら，世戸さんの多才さは眩しいくらいである．いまや中西先生と彼の二人はこのサーキュラーのなくてはならぬ主要な投稿者となっている．

原稿が集積しているので，この後にすぐ 5 巻 8 号の 9 月中の発行を予定している．発行月の相続く 2 つの号の発行はもう普通のことになっているが，3 つの号を発行することも普通のことになるかもしれない．もっともこれは私の体力の限界に近づくということでもある．

こんなことが続くようなら，毎月でも『数学・物理通信』を発行できるであろうが，それをしないのは毎月『数学・物理通信』の発行に追われるような事態は私にとってあまり望ましくないからである．

このサーキュラーへの投稿者として，同人に限るという規定はどこにもないのだが，暗黙の裡に同人という概念があると思っている．ところが暗黙の同人以外の投稿がときどきあるので，同人以外の方の投稿を制限するために投稿規定を少し変更したいと考えている．変更してしまう前にご意見があれば，編集人宛てにメールでお寄せ頂きたい．

（矢野　忠）