

# 数学・物理通信

5卷8号      2015年9月

編集 新関章三・矢野 忠

2015年9月3日

## 目次 (Contents)

1. Abel の積分方程式	世戸憲治	2
2. 複素四元数の行列表現と Dirac スピノル	森田克貞	7
3. 自然数のべき乗の級数の和 4	矢野 忠	20
4. 編集後記	矢野 忠	26

1. Abel's Integral Equation	Kenji SETO	2
2. Matrix Representation of Biquaternion and Dirac Spinor	Katsusada MORITA	7
3. Power Series of Natural Numbers 4	Tadashi YANO	20
4. Editorial Comments	Tadashi YANO	26

# Abel の積分方程式

世戸 憲治<sup>1</sup>

## Abel's Integral Equation

Kenji SETO<sup>2</sup>

### 1 はじめに

前回の「最速降下曲線あれこれ」(「数学・物理通信」5巻7号)を書いているうちに、これとよく似た問題である Abel の積分方程式を思い出した。いままで、この存在は知っていたが、まじめに勉強したことはなかった。今回は少し本腰を入れて調べてみることにした。

### 2 方程式の導入

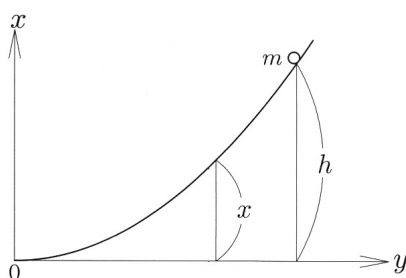


図1 Abel 積分方程式のモデル

図1のように、水平方向に  $y$  軸、鉛直上方に  $x$  軸をとる。この取り方は、通常を取り方とは、 $x, y$  が逆であるが、この方が後で都合がよい。ここで、原点  $O$  を通る曲線  $y = y(x)$  を考える。この曲線上で、高さが  $h$ 、すなわち、 $x = h$  となる点を出発点として、質量  $m$  の質点を、この曲線に沿って、初速度無しで落下させたとき、原点  $O$  に達するまでの時間を求める。ただし、摩擦抵抗や空気抵抗は一切ないものとする。重力加速度の値を  $g$  とし、曲線上の途中の点  $(x, y)$  における速度を  $v$  とすると、この間に失われた位置エネルギーは運動エネルギーに変化するので、

$$mg(h-x) = \frac{1}{2}mv^2 \quad (2.1)$$

となり、これから速度  $v$  は、

$$v = \sqrt{2g(h-x)} \quad (2.2)$$

となる。この曲線上で微小距離  $ds$  だけ離れた点の座標を  $(x+dx, y+dy)$  とすると、この間を落下する時間  $dt$  は  $dt = ds/v = \sqrt{1+y'^2} dx/v$  となるので、これを積分すると、原点までの到達時間を  $f(h)$  と記すことにして、

$$f(h) = \int_0^h \frac{\sqrt{1+y'^2}}{\sqrt{2g(h-x)}} dx \quad (2.3)$$

<sup>1</sup> 北海学園大学名誉教授

<sup>2</sup> seto@pony.ocn.ne.jp

と与えられる。この式から、曲線  $y = y(x)$  が決まっていると原点までの到達時間が求められるが、Abel は逆のことを考え、「高さ  $h$  からの到達時間  $f(h)$  を与えて、曲線  $y = y(x)$  を求めよ」という問題を提起した。これを Abel の積分方程式という。

### 3 方程式の解法

#### 3.1 解法の準備

(2.3) 式の両辺に  $1/\sqrt{z-h}$  を掛けてから、 $h$  で  $0$  から  $z$  まで積分し、積分順序を変更すると、

$$\int_0^z \frac{f(h)}{\sqrt{z-h}} dh = \frac{1}{\sqrt{2g}} \int_0^z \sqrt{1+y'^2} dx \int_x^z \frac{1}{\sqrt{(z-h)(h-x)}} dh \quad (3.1)$$

となる。この  $h$  積分のところは、 $h$  から  $u$  に、 $h = x + (z-x)u$  と変数変換をすると、ベータ関数  $B$  を用いて、

$$\int_x^z \frac{1}{\sqrt{(z-h)(h-x)}} dh = \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{u(1-u)}} du = B\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) = \pi \quad (3.2)$$

となるので、(3.1) 式は

$$\int_0^z \frac{f(h)}{\sqrt{z-h}} dh = \frac{\pi}{\sqrt{2g}} \int_0^z \sqrt{1+y'^2} dx \quad (3.3)$$

と書ける。さらに、この左辺を、

$$F(z) \equiv \int_0^z \frac{f(h)}{\sqrt{z-h}} dh \quad (3.4)$$

と定義すると、この式は、

$$F(z) = \frac{\pi}{\sqrt{2g}} \int_0^z \sqrt{1+y'^2} dx \quad (3.5)$$

となるが、これを  $z$  で微分し、変数を  $z$  から  $x$  に変えると、

$$F'(x) = \frac{\pi}{\sqrt{2g}} \sqrt{1+y'^2} \quad (3.6)$$

となる。一方、(3.4) 式で変数を  $z$  から  $x$  に変えた式、および、(3.6) 式を用いて、(2.3) 式の  $\sqrt{1+y'^2}$  を  $F'(x)$  で表した式は、

$$F(x) = \int_0^x \frac{f(h)}{\sqrt{x-h}} dh, \quad f(h) = \frac{1}{\pi} \int_0^h \frac{F'(x)}{\sqrt{h-x}} dx \quad (3.7)$$

となる。これら 2 式を Abel 変換の式という。通常、関数変換の式というと、Fourier 変換、Bessel 変換、あるいは Hilbert 変換のように、定積分を用いて定義されることが多いが、この Abel 変換は積分の上限が変数になっている点が他の変換式とは異なっている。

#### 3.2 解法の実例

Abel の積分方程式を解くには、高さ  $h$  からの到達時間  $f(h)$  を与え、(3.7) の第 1 式から  $F(x)$  を求め、それを微分して、(3.6) 式で  $y'$  を求めることになる。しかし、この  $F(x)$  を求める積分は、一般には簡単ではなく、解析的に求められるものとなると、かなり限定されてしまう。ここでは、この積分が簡単にできるように、 $h$  の冪乗の形を仮定し、

$$f(h) = \frac{\pi}{\sqrt{2g}} \ell_0^{\frac{1}{2}-\alpha} h^\alpha \quad (3.8)$$

に限って求めることにする．ここに， $\ell_0$  は長さの次元を持つ量とする．これから  $F(x)$  を求めると，

$$F(x) = \frac{\pi \ell_0^{\frac{1}{2}-\alpha}}{\sqrt{2g}} \int_0^x \frac{h^\alpha}{\sqrt{x-h}} dh = \frac{\pi \ell_0 B(\alpha+1, \frac{1}{2})}{\sqrt{2g}} \left(\frac{x}{\ell_0}\right)^{\alpha+\frac{1}{2}} \quad (3.9)$$

となり，さらに微分して，

$$F'(x) = \frac{\pi B(\alpha+1, \frac{1}{2})(\alpha+\frac{1}{2})}{\sqrt{2g}} \left(\frac{x}{\ell_0}\right)^{\alpha-\frac{1}{2}} \quad (3.10)$$

となる．これを (3.6) 式に代入して  $y'$  を求めると

$$y' = \sqrt{2\left(\frac{x}{r}\right)^{2\alpha-1} - 1} \quad (3.11)$$

となる．ここに， $r$  は， $\ell_0$  に替わる長さの次元を持つ量で，

$$r = \left(\frac{2}{B^2(\alpha+1, \frac{1}{2})(\alpha+\frac{1}{2})^2}\right)^{1/(2\alpha-1)} \ell_0 \quad (3.12)$$

と定義する．

以下，(3.11) 式を積分して解曲線  $y = y(x)$  を求めるわけだが，ここで，パラメータ  $\alpha$  の許される範囲について考えてみる． $\alpha > \frac{1}{2}$  のとき，(3.11) 式が実関数となるためには，

$$x \geq \left(\frac{1}{2}\right)^{1/(2\alpha-1)} r \quad (3.13)$$

となって，原点を通らなくなるので排除される．また， $\alpha \leq -\frac{1}{2}$  のときは， $x = 0$  の近傍での積分が

$$y \sim \sqrt{2} \int \left(\frac{x}{r}\right)^{(2\alpha-1)/2} dx = \frac{2\sqrt{2}}{2\alpha+1} r \left(\frac{x}{r}\right)^{(2\alpha+1)/2} \quad (3.14)$$

となって， $x \rightarrow 0$  で  $y$  は発散してしまい，これも原点を通らなくなる．結果として，許される  $\alpha$  の範囲は，

$$-\frac{1}{2} < \alpha \leq \frac{1}{2} \quad (3.15)$$

となる．これを踏まえて (3.11) 式の積分は，

$$y = \int_0^x \sqrt{2\left(\frac{x}{r}\right)^{2\alpha-1} - 1} dx \quad (3.16)$$

となる．この積分で最も簡単に実行できるのは， $\alpha = \frac{1}{2}$  の場合で，そのときは，

$$y' = 1, \quad y = x \quad (3.17)$$

となり，これは原点を通る直線となる．もっとも，この  $y' = 1$  という値は  $r$  の定義の仕方によって変わることに注意する．

$-\frac{1}{2} < \alpha < \frac{1}{2}$  の場合は，この積分を

$$y = \int_0^x \sqrt{\frac{2r^{1-2\alpha} - x^{1-2\alpha}}{x^{1-2\alpha}}} dx \quad (3.18)$$

と書き換えておき，積分変数を  $x$  から  $\theta$  に

$$x^{1-2\alpha} = r^{1-2\alpha}(1 - \cos \theta) \quad (3.19)$$

と置換する。結果は、

$$y = \frac{r}{1-2\alpha} \int_0^\theta \sqrt{\frac{1+\cos\theta}{1-\cos\theta}} (1-\cos\theta)^{2\alpha/(1-2\alpha)} \sin\theta d\theta \quad (3.20)$$

となり、倍角公式を使うと、

$$y = \frac{r}{1-2\alpha} \int_0^\theta (1+\cos\theta)(1-\cos\theta)^{2\alpha/(1-2\alpha)} d\theta \quad (3.21)$$

と被積分関数が、 $\alpha$  を含む冪乗の部分を除いて、有理化される。この積分は、不完全ベータ関数を用いて表わすことができるが、一般には、初等関数で表すことはできない。ここでは、 $\alpha = 0, 1/4, 1/3$  の場合だけを実行することにする。

#### $\alpha = 0$ の場合

このときは、簡単に積分でき、(3.19) 式とともに、

$$x = r(1 - \cos\theta), \quad y = r(\theta + \sin\theta) \quad (3.22)$$

と、 $\theta$  を媒介変数とした解曲線の式が求められる。これは、中心を  $(r, 0)$  に持つ半径  $r$  の円が、 $x = 2r$  の線上を滑らずに回転していくとき、初めに原点のところにあった点が動く軌跡、すなわちサイクロイド曲線である。 $\alpha = 0$  ということは、この曲線上のどの点から質点を落下させても同じ時間で原点に到達することを意味し、これは Huygens の振子として有名なものである。

#### $\alpha = 1/4$ の場合

このときは、 $2\alpha/(1-2\alpha) = 1$  となり、(3.19) 式とともに

$$x = r(1 - \cos\theta)^2, \quad y = r(\theta - \sin\theta \cos\theta) \quad (3.23)$$

となる。これはサイクロイドとは違って、簡単な幾何学的意味付けはできそうもない。以下に、グラフで示すことにする。

#### $\alpha = 1/3$ の場合

この場合は、 $2\alpha/(1-2\alpha) = 2$  となり、(3.19) 式とともに、

$$x = r(1 - \cos\theta)^3, \quad y = \frac{r}{2}(3\theta - 3\sin\theta \cos\theta - 2\sin^3\theta) \quad (3.24)$$

となる。以下、同様に  $2\alpha/(1-2\alpha)$  の値が 3 以上の整数となる場合も計算可能ではあるが、これ以上は立ち入らない。

### 3.3 グラフ表示

ここで、 $\alpha = 0, 1/4, 1/3$  の場合の解曲線 (3.22) (3.23) (3.24) 式をグラフ化して示すことにする。これらの式は、 $\theta = 0$  のとき、 $x = 0, y = 0$  となって、すべて原点を通る。また、 $\theta < \pi$  の範囲では  $dy/dx > 0$  となって、高さが増加していくが、 $\theta = \pi$  のところが尖点になっていて、それ以上に  $\theta$  の値が大きくなると  $dy/dx < 0$  となって高さは減少していく。当然のことながら、この問題に対する  $\theta$  の範囲は  $0 \leq \theta \leq \pi$  に限定される。

グラフ化する上で 1 つ問題となるのは、これらの式に含まれる  $r$  である。これは皆同じ  $r$  で表しているが、この値はまったく任意にとれる量なので、これら 3 式を 1 枚のグラフで表したとき、それぞれに異なる値を持

たせることができる. 以下に2つのグラフ図2, 図3を示すが, このうち図2は,  $x$  の最大値がすべて同じ値になるように,  $\alpha = 0, 1/4, 1/3$  に対し,  $r$  の比の値を,  $1 : 1/2 : 1/4$  としたものの, また, 図3は  $\theta = \pi$  での  $y$  の値が同じになるように  $r$  の比の値を  $1 : 1 : 2/3$  としたものである. これらの図で, 黒線で示したものは  $\alpha = 0$  のサイクロイドに, 赤線は  $\alpha = 1/4$  に, また, 青線は  $\alpha = 1/3$  に, それぞれ, 対応する. また,  $\pi < \theta < 2\pi$  の部分も参考のため点線で示しておいた.

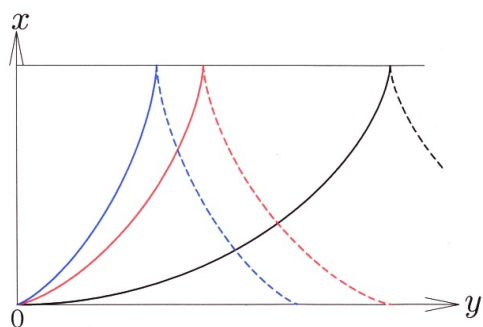


図2 解曲線1

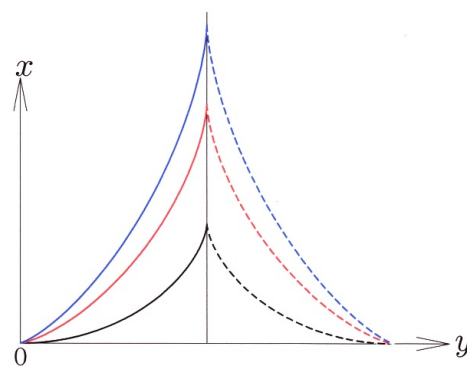


図3 解曲線2

これらのグラフから,  $\alpha$  の値が, 0 から大きくなるにつれ, サイクロイド曲線のときよりも立ち上がりは早くなり, 急勾配になっていくのがわかる.

## 4 おわりに

Niels H. Abel(1802-1829) はノルウェー生まれの数学者で, 多くの珠玉の業績を残した人である. 最も有名なのは, 「5次以上の代数方程式には, 四則演算と冪根だけで書ける一般的な解の公式が存在しない」というものである. その他, 楕円関数論, アーベル方程式, アーベル群, アーベル多様体など, 彼の名を冠する業績はたくさんある. 結核のため, わずか26歳で夭折しているが, これだけの短期間にこんなにも多くの業績を残せたことが不思議になるほどである. もし, この人が長生きしていたら数学の世界はすばらしい進歩をとげていたろうと想像される.

今回取り上げた Abel の積分方程式は, 期待に反して面白い結果にはならなかったが, これは後に Volterra による Volterra 型積分方程式研究の端緒となったもので, それなりの存在価値があるものである. また, Abel 変換それ自体は応用範囲の広いものであり, 現在でも種々の分野で使われている.

# 複素四元数の行列表現と Dirac スピノル

森田克貞<sup>1</sup>

## Matrix Representation of Biquaternion and Dirac Spinor

Katsusada MORITA<sup>2</sup>

### 要約

結合則を用いた、複素数の行列表現を求める方法を、実四元数へ一般化することにより、実四元数場が 3 次元ユークリッド空間のベクトル場の他に、2 成分の Pauli スピノルも記述できること、複素四元数への一般化は 4 次元 Minkowski 時空におけるベクトル場だけでなく、2 成分の複素四元数スピノル場を考えることにより、Weyl 表示の Dirac スピノルも記述できることに導く。さらに、2 成分複素四元数スピノル場は、複素数の行列表現を対角化するときに出てきたユニタリ行列で、2 成分の実四元数スピノル場に変換でき、Dirac スピノルを Pauli スピノルのペアで表す Pauli 表示に導かれ、Dirac 方程式の非相対論的極限として Pauli 方程式を得る。よく知られたこの結果を、複素数 → 実四元数 → 複素四元数という流れを通して眺め直したことになる。

## 1 はじめに

Hamilton は、自ら発見した四元数について詳しく解説した大著 ‘Lectures on Quaternions’ (1853) の Lecture VII pp.637-639 で、複素四元数を導入し、biquaternion と名づけた。それは、普通の (実) 四元数とは違って、4 つの成分が通常の複素数の場合をいう。したがって、もはや一般には逆が存在しないけれど、結合則と組成法則は満たす線形代数で、複素数の場合と同様、その結合性から、行列表現が存在する。この事実を、特に、表現行列の (ブロック) 対角化を実行しながら、複素数 → 実四元数 → 複素四元数の順で見えていくと、自然に Pauli スピノル、Weyl 表示及び Pauli 表示の Dirac スピノルに導かれる<sup>3</sup>。なお、Pauli 表示とは Dirac スピノルが (Lorentz ブーストで混ざる) Pauli スピノルのペアで表される、ガンマ行列の表示のことで、Dirac 表示 (標準表示) と殆ど同じである。ノートの構成上、補遺を 2 つ設ける。

この節では、よく知られていることであるが、後の四元数への一般化を念頭に、複素数の行列表現

$$z = x + iy \rightarrow \begin{pmatrix} x & -y \\ y & x \end{pmatrix}, \quad x, y \in \mathbb{R} \quad (1.1)$$

の求め方とその対角化を詳しく述べる。今、複素数の基底を  $\{e_0 = 1, e_1 = i\}$  とし、積法則

$$e_0 e_0 = e_0, \quad e_0 e_1 = e_1 e_0 = e_1, \quad e_1 e_1 = -e_0 \quad (1.2a)$$

を、Einstein の和の規約を使って (この節のギリシャ添え字は 0, 1 を走る),

$$e_\mu e_\nu = b_{\mu\nu}^\rho e_\rho, \quad (\mu, \nu, \rho = 0, 1) \quad (1.2b)$$

と書き、結合則  $e_\mu (e_\nu e_\sigma) = (e_\mu e_\nu) e_\sigma$  に代入すると  $b_{\mu\rho}^\tau b_{\nu\sigma}^\rho e_\tau = b_{\mu\nu}^\rho b_{\rho\sigma}^\tau e_\tau$  を得るので、これを (1.2b) と比較すれば、 $e_\mu \rightarrow ((b_\mu)_{\tau\rho} = b_{\mu\rho}^\tau)$  が  $\{e_0, e_1\}$  の行列表現になっていることがわかる。したがって、

$$e_0 = 1 \rightarrow \begin{pmatrix} b_{00}^0 & b_{01}^0 \\ b_{10}^0 & b_{11}^0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad e_1 = i \rightarrow \begin{pmatrix} b_{10}^1 & b_{11}^1 \\ b_{00}^1 & b_{01}^1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad (1.2c)$$

<sup>1</sup>元名古屋大学理学部物理教室

<sup>2</sup>kmorita@cello.ocn.ne.jp

<sup>3</sup>複素四元数の Lorentz 変換や Dirac 方程式への応用は歴史が古い。このノートでは、結合則にもとづく、複素数の行列表現の一般化という観点から議論を進める。結合則に従う数としては、複素数の次は、四元数で終わりである。



すなわち, (1.1) を得る. 反対称行列 (1.1) は簡単に対角化できる. そのためには, 行列  $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$  を対角化すればよい. この行列の固有値は  $\pm i$  なので, 固有ベクトルは

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ \pm i \end{pmatrix} = \mp i \begin{pmatrix} 1 \\ \pm i \end{pmatrix} \quad (1.3)$$

から決まり, 対角行列は, 複素行列

$$\begin{pmatrix} x - iy & 0 \\ 0 & x + iy \end{pmatrix} = T^{-1} \begin{pmatrix} x & -y \\ y & x \end{pmatrix} T, \quad T = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ i & -i \end{pmatrix}, \quad T^{-1} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & -i \\ 1 & i \end{pmatrix} = T^\dagger \quad (1.4)$$

になる. 実数  $(x, y)$  の代わりに, 実四元数  $(Q, P)$  を持って来ると, 上式は,

$$\begin{pmatrix} U & 0 \\ 0 & U^* \end{pmatrix} = T^{-1} \begin{pmatrix} Q & -P \\ P & Q \end{pmatrix} T \quad (1.5)$$

となる. ただし,  $U = Q - iP, U^* = Q + iP$  は複素四元数で,  $T$  は,  $1 \rightarrow e_0, i = \sqrt{-1} \rightarrow ie_0$  とした複素四元数行列と考える必要があるが,  $e_0$  は四元数の単位元なので,  $T$  は任意の四元数と可換な複素行列とみなしてよい.

次節で, (1.2) の方法を一般化して, (実) 四元数の 4 次元実行列表現を求め, それを簡約して, 四元数の既約表現である Pauli 表現が得られることにもとづき, 実四元数場から Pauli スピノルを導く (3 次元ベクトル場については脚注に述べるに留める). 第 3 節では, 同じ方法を複素四元数のエルミート基底  $\{b_0 = e_0, b_1 = ie_1, b_2 = ie_2, b_3 = ie_3\} \equiv \{b_\mu\}$  を用いた場合に拡張する<sup>4</sup>. ここで,  $e_0 = 1$  で  $\{e_1, e_2, e_3\}$  は Hamilton の虚数単位<sup>5</sup>,  $i = \sqrt{-1}$  は (1.1) で使った普通の虚数単位である. エルミート基底の複素四元数に対して得られる 4 次元の複素行列表現は, 非コンパクトな (固有) Lorentz 群の 2 次元既約表現の直和 (正確には, Weyl 表現と, それと同値な反傾表現の直和) で与えられる. 第 4 節で, これをよく知られた Dirac 表現 (Weyl 表現と, それと同値でない, 同次元の共役表現の直和) にするためには, 2 成分の複素四元数スピノル場を考えねばならないことを示し, それから, Weyl 表示の Dirac スピノルを求める. 第 5 節では, (1.5) を使って, 2 成分の複素四元数スピノル場から, 2 成分の実四元数スピノル場を求め, 四元数 Dirac スピノル [1] を定義する. その結果, Dirac スピノルが (固有 Lorentz 変換のもとでは混ざらない) 2 つの Weyl スピノルから構成される Weyl 表示と, (Lorentz ブーストのもとで混ざる) 2 つの Pauli スピノルから構成される Pauli 表示のユニタリな関係がわかる. 特に, 外部電磁場の作用を受けている荷電粒子の従う Dirac 方程式を Pauli 表示で考え, その非相対論的極限で, 大きい方の Pauli スピノルが満たす Pauli 方程式を求める. 第 6 節で, 4 次元時空座標とベクトル場がエルミート四元数 (場) で表現できることに触れる. 最後の節は簡単なまとめに当てる.

## 2 実四元数の行列表現と Pauli スピノル

複素数の 2 次元実行列表現を求めた方法を, 結合則に従う四元数の場合に応用する (この節で言う四元数はすべて実四元数のこと). すなわち, 任意の四元数を  $q, p, r$  とすれば, Hamilton の基底  $\{e_\mu\}_{\mu=0,1,2,3}$  を用いて,

$$q = q_\mu e_\mu, \quad p = p_\mu e_\mu, \quad r = r_\mu e_\mu, \quad q_\mu, p_\mu, r_\mu \in \mathbb{R} \quad (2.1a)$$

$$(qp)r = q(pr) \rightarrow (e_\mu e_\nu) e_\sigma = e_\mu (e_\nu e_\sigma) \quad (2.1b)$$

<sup>4</sup>エルミート四元数とは, 四元数の共役  $\{e_0, e_i\} \rightarrow \{e_0, -e_i\} (i=1,2,3)$  と複素共役  $i \rightarrow -i$  を同時に作用させたとき, 同じに留まる複素四元数のこと. 複素四元数の基底として Hamilton の基底を選ぶとエルミート四元数  $q = q_0 e_0 + q_i e_i$  は  $q_0$  が実数で  $q_i$  が純虚数の場合になる. このノートで使うエルミート基底では, エルミート四元数の成分はすべて実数となる (成分が行列の場合は考えない).

<sup>5</sup>Hamilton の虚数単位は, 普通, Hamilton の導入した  $\{i, j, k\}$  という記号を使う. 以下では,  $\{i, j, k\}$  は空間座標の添え字として使うので, よく利用される別の記号  $\{e_1, e_2, e_3\}$  を用いる. Hamilton の記号  $\{i, j, k\}$  が  $i$  から始まるのは, もちろん,  $\sqrt{-1}$  に対して, Euler が Descartes による imaginary number の  $i$  を用いたからである. Hamilton によれば, 虚数単位を 1 つから 2 つに増やした際,  $i \rightarrow \{i, j\}$  という記号を採用したのは Prof. Graves であったという ('Lectures on Quaternions' (1853) の Preface, p.38). したがって, 虚数単位に対する記法についてだけいえば, Euler  $\rightarrow$  Graves  $\rightarrow$  Hamilton という順か.

が成り立つ。ただし、この節以降、ギリシャ文字の添え字は 0, 1, 2, 3 を走り、前節と同様、繰り返された添え字は和をとる Einstein の規約に従う。複素数の実行列表現は基底  $\{e_0 = 1, e_1 = i\}$  の数と同じ 2 次元であったが、四元数の基底  $\{e_0, e_i\}_{i=1,2,3}$  は 4 つあるので、4 次元の実行列表現が得られる。それを求めるため、四元数の基底  $\{e_\mu\}$  がつぎの積法則を満たすことを思い出そう。

$$e_0 e_0 = e_0, \quad e_0 e_i = e_i e_0, \quad e_i e_j = -\delta_{ij} e_0 + \epsilon_{ijk} e_k, \quad (i, j, k = 1, 2, 3) \quad (2.2a)$$

ただし、 $\epsilon_{ijk}$  は完全反対称テンソルで、 $\epsilon_{123} = +1$  とおいた。これを、(2.1a) で用いた記号  $\{e_\mu\}$  を使って、

$$e_\mu e_\nu = c_{\mu\nu}^\rho e_\rho \quad (2.2b)$$

と書けば、(2.1b) から、 $c_{\mu\nu}^\rho c_{\rho\sigma}^\tau = c_{\nu\sigma}^\rho c_{\mu\rho}^\tau$  が得られ、 $c_{\mu\nu}^\rho = (c_\mu)_{\rho\nu}$  とおいて、(2.1b) は結局

$$(c_\mu)_{\tau\rho} (c_\nu)_{\rho\sigma} = c_{\mu\nu}^\rho (c_\rho)_{\tau\sigma} \quad (2.3)$$

となる。故に、

$$e_\mu \rightarrow \rho(e_\mu) = \Sigma_\mu, \quad \Sigma_\mu = \left( (c_\mu)_{\rho\sigma} = c_{\mu\sigma}^\rho \right) \quad (2.4)$$

は  $\{e_\mu\}$  の実行列表現となる：

$$\begin{aligned} e_0 \rightarrow \rho(e_0) = \Sigma_0 &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad e_1 \rightarrow \rho(e_1) = \Sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \\ e_2 \rightarrow \rho(e_2) = \Sigma_2 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad e_3 \rightarrow \rho(e_3) = \Sigma_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (2.5)$$

これは (1.2c) の複素数の場合を一般化したもので、すべて、4 次の実直交行列 (したがって、ユニタリ行列) である。文献 [2] では、表現  $q \rightarrow \rho(q)$  のことを四元数の正則表現と呼んでいるが、その導き方には触れていないし、引用文献もない。したがって、(2.5) は昔から知られていたことと思われる (事実、各  $\Sigma_\mu$  を 2 次の部分行列 4 つからなると考え、それらの部分行列を適当に選ぶことにより、(2.5) は容易に導ける)。

ところが、四元数の既約表現は 2 次元に限られる故、上の実行列表現は可約である。即ち、2 次のユニタリ行列がブロック対角的に並んだものにユニタリ変換される。実際、

$$U(\Sigma_0, \Sigma)U^{-1} = \left( \begin{pmatrix} \sigma_0 & 0_2 \\ 0_2 & \sigma_0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -i\sigma & 0_2 \\ 0_2 & -i\sigma \end{pmatrix} \right), \quad U = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -i \\ 0 & -i & 1 & 0 \\ 0 & i & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & -i \end{pmatrix}, \quad U^{-1} = U^\dagger/2 \quad (2.6a)$$

が成り立つ。ただし、 $0_2$  は 2 次の零行列を表し、

$$\sigma_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \equiv 1_2, \quad \sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad (2.6b)$$

は 2 次の単位行列および Pauli 行列で、 $\sigma = (\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)$  とおいた。四元数の既約表現

$$e_0 \rightarrow \rho_P(e_0) = \sigma_0, \quad e \rightarrow \rho_P(e) = -i\sigma \quad (2.6c)$$

はよく知られた Pauli 表現である. (2.1a) の四元数に対しては,  $\rho(q) = q_\mu \rho(e_\mu)$  なので,

$$U\rho(q)U^{-1} = \begin{pmatrix} \rho_{\mathbb{P}}(q) & 0_2 \\ 0_2 & \rho_{\mathbb{P}}(q) \end{pmatrix}, \quad \rho_{\mathbb{P}}(q) = q_0\sigma_0 - i\mathbf{q} \cdot \boldsymbol{\sigma}, \quad \det \rho_{\mathbb{P}}(q) = q_0^2 + q_i^2 = q\bar{q} = \bar{q}q \quad (2.6d)$$

となる ( $\bar{q} = q_0 - q_i e_i$  は  $q = q_0 + q_i e_i$  の四元数共役).

この事実から, 非相対論的な Pauli スピノルは実四元数場

$$\phi(x) = e_\mu \phi^\mu(x) \quad (2.7)$$

で書けることを見よう.  $x$  は時空座標である. 実数の成分場  $\phi^\mu$  の代わりに, 複素数場  $\chi_{1,2}$  を次式によって導入する. 射影演算子  $E_\pm = (e_0 \pm ie_3)/2$  を用いて,

$$\phi E_+ = \frac{e_0 + ie_3}{2} \chi_1 + \frac{ie_1 + e_2}{2} \chi_2 \quad (2.8a)$$

$$\phi E_- = \frac{e_0 - ie_3}{2} \chi_1^* + \frac{-ie_1 + e_2}{2} \chi_2^* \quad (2.8b)$$

$$\begin{pmatrix} \chi_1 \\ \chi_2 \\ \chi_2^* \\ -\chi_1^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \phi^0 - i\phi^3 \\ -i\phi^1 + \phi^2 \\ i\phi^1 + \phi^2 \\ -\phi^0 - i\phi^3 \end{pmatrix} \equiv U \begin{pmatrix} \phi^0 \\ \phi^1 \\ \phi^2 \\ \phi^3 \end{pmatrix} \quad (2.8c)$$

ここで,  $U$  は (2.6a) で与えられる. 言い換えれば, 行列  $U$  は, 実四元数場の分解  $\phi = \phi E_+ + \phi E_-$  を通して, 定義されたのである.  $\phi$  は実四元数場だから, (2.8a) ↔ (2.8b) の移り変わりは複素共役による. (2.8c) を逆に解けば,

$$\begin{pmatrix} \phi^0 \\ \phi^1 \\ \phi^2 \\ \phi^3 \end{pmatrix} = U^{-1} \begin{pmatrix} \chi_1 \\ \chi_2 \\ \chi_2^* \\ -\chi_1^* \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & i & -i & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ i & 0 & 0 & i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \chi_1 \\ \chi_2 \\ \chi_2^* \\ -\chi_1^* \end{pmatrix} \implies \begin{cases} \phi^0 = \frac{1}{2}(\chi_1 + \chi_1^*) \\ \phi^1 = \frac{i}{2}(\chi_2 - \chi_2^*) \\ \phi^2 = \frac{1}{2}(\chi_2 + \chi_2^*) \\ \phi^3 = \frac{i}{2}(\chi_1 - \chi_1^*) \end{cases} \quad (2.9)$$

2 成分量  $(\chi_1, \chi_2)^T$  の空間回転のもとでの変換性は, 実四元数場  $\phi(x)$  の成分場の変換  $\phi^\mu(x) \rightarrow \phi^{\mu'}(x') = \rho(Q)^\mu{}_\nu \phi^\nu(x)$ <sup>6</sup> によって決まっている (ただし,  $Q$  は単位実四元数で,  $|Q|^2 = Q\bar{Q} = \bar{Q}Q = 1$  を満たす. したがって,  $\rho(Q)$  は直交行列である). その理由は,  $Q = e_\mu Q^\mu$ ,  $(Q^0)^2 + (Q^i)^2 = 1$  とおいて,

$$\begin{aligned} \phi(x) \rightarrow Q\phi(x) &= Q^\mu (e_\mu e_\nu) \phi^\nu(x) = Q^\mu (e_{\mu\nu}^\rho) \phi^\nu(x) = (Q^\mu \rho(e_\mu)^\rho{}_\nu) e_\rho \phi^\nu(x) \\ &= e_\rho \rho(Q)^\rho{}_\nu \phi^\nu(x) = e_\rho \phi^{\rho'}(x') = \phi'(x') \end{aligned} \quad (2.10a)$$

( $x \rightarrow x' = Rx$  は空間回転を表す<sup>7</sup> が,  $x$  と  $x'$  は同じ時空点である) となるから, (2.8), (2.9) を使って, (2.6a) に注意すれば,

$$\begin{pmatrix} \chi_1' \\ \chi_2' \\ \chi_2'^* \\ -\chi_1'^* \end{pmatrix} = U \begin{pmatrix} \phi^{0'} \\ \phi^{1'} \\ \phi^{2'} \\ \phi^{3'} \end{pmatrix} = U\rho(Q) \begin{pmatrix} \phi^0 \\ \phi^1 \\ \phi^2 \\ \phi^3 \end{pmatrix} = U\rho(Q)U^{-1} \begin{pmatrix} \chi_1 \\ \chi_2 \\ \chi_2^* \\ -\chi_1^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \rho_{\mathbb{P}}(Q) & 0_2 \\ 0_2 & \rho_{\mathbb{P}}(Q) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \chi_1 \\ \chi_2 \\ \chi_2^* \\ -\chi_1^* \end{pmatrix} \quad (2.10b)$$

<sup>6</sup> このノートでは, 行列  $A$  の  $(\mu, \nu)$  成分を  $A^\mu{}_\nu$  と書く. スピノルに作用する行列のときには, 補遺 A で述べる約束に従う.

<sup>7</sup>  $Q$  と  $R = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & R_j^i \end{pmatrix}$  の関係は,  $Qe_j\bar{Q} = e_i R_j^i$  である. したがって,  $\phi(x) \rightarrow Q\phi(x)\bar{Q}$  は,  $\phi^0$  を不変にし,  $\phi^{i=1,2,3}$  はベクトルとして変換する. それに対し, 直ぐ下で, (2.10a) は Pauli スピノルを定義することを見る.

行列

$$\epsilon = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad (2.11)$$

を使って,

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} \chi_1' \\ \chi_2' \\ \chi_1^{*'} \\ \chi_2^{*'} \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 1_2 & 0_2 \\ 0_2 & \epsilon \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \chi_1' \\ \chi_2' \\ \chi_2^{*'} \\ -\chi_1^{*'} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1_2 & 0_2 \\ 0_2 & \epsilon \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \rho_P(Q) & 0_2 \\ 0_2 & \rho_P(Q) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1_2 & 0_2 \\ 0_2 & \epsilon^{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \chi_1 \\ \chi_2 \\ \chi_1^* \\ \chi_2^* \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \rho_P(Q) & 0_2 \\ 0_2 & \epsilon \rho_P(Q) \epsilon^{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \chi_1 \\ \chi_2 \\ \chi_1^* \\ \chi_2^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \rho_P(Q) & 0_2 \\ 0_2 & \rho_P(Q)^* \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \chi_1 \\ \chi_2 \\ \chi_1^* \\ \chi_2^* \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (2.12)$$

を得る.  $Q$  は単位実四元数なので,  $\rho_P(Q)$  はユニタリな  $2 \times 2$  行列であり,  $(\chi_1, \chi_2)^T$  は空間回転のもとでスピノルとして変換する Pauli スピノル (の満たす Pauli 方程式については 5 節 を参照されたい) である.

### 3 複素四元数の行列表現とその簡約

(2.1a) の  $q = q_\mu e_\mu$  において,  $q_\mu \in \mathbb{C}$  としたものが複素四元数であるが, 脚注 3) で述べたように, このノートでは, 複素四元数を表すのに, エルミート基底  $\{b_\mu\}$  を用いて,  $q = q^\mu b_\mu, q^\mu \in \mathbb{C}$  と書くことにする. エルミート基底はつぎの積法則に従う.

$$b_0^2 = b_0, \quad b_0 b_i = b_i b_0, \quad b_i b_j = \delta_{ij} b_0 + i \epsilon_{ijk} b_k, \quad (i, j, k = 1, 2, 3) \quad (3.1a)$$

これを

$$b_\mu b_\nu = d_{\mu\nu}^\rho b_\rho, \quad \mu, \nu, \rho = 0, 1, 2, 3 \quad (3.1b)$$

と書き, 結合則  $(b_\mu b_\nu) b_\rho = b_\mu (b_\nu b_\rho)$  に代入すれば,  $d_{\mu\nu}^\sigma d_{\sigma\rho}^\tau b_\tau = d_{\mu\sigma}^\tau d_{\nu\rho}^\sigma b_\tau$  を得るので,  $d_{\mu\nu}^\sigma = (d_\mu)_{\sigma\nu}$  において,

$$(d_\mu)_{\tau\sigma} (d_\nu)_{\sigma\rho} = d_{\mu\nu}^\sigma (d_\sigma)_{\tau\rho} \quad (3.1c)$$

となる. したがって,

$$b_\mu \longrightarrow \omega(b_\mu) = \left( (d_\mu)_{\rho\sigma} \right) \quad (3.1d)$$

は  $b_\mu$  の複素行列表現となる:

$$\begin{aligned} \omega(b_0) \equiv \Omega_0 &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, & \omega(b_1) \equiv \Omega_1 &= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & i & 0 \end{pmatrix}, \\ \omega(b_2) \equiv \Omega_2 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & i \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -i & 0 & 0 \end{pmatrix}, & \omega(b_3) \equiv \Omega_3 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -i & 0 \\ 0 & i & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (3.2)$$

これは, 複素数の場合 (1.2c) を複素四元数のエルミート基底に一般化したものである. ところが, 前節と同様, 四元数の規約表現は 2 次元しかないので, この 4 次元表現も可約である. (3.2) は文献 [1], p.168 の (4.63c)

式と同じなので、以下、その式を含む第 4 章の内容を若干繰り返すことになる。したがって、以降は、既出の式が多いことを始めにお断りしておく（記号を変えたところもある）。

任意の複素四元数  $q = q^\mu b_\mu$  ( $q^\mu \in \mathbb{C}$ ) に対する行列表現は、 $\omega(q) = q^\mu \omega(b_\mu)$  で与えられるが、それは、つぎのように、簡約化できる。

$$V\omega(q)V^{-1} = \begin{pmatrix} \rho_P(q) & 0_2 \\ 0_2 & \bar{\rho}_P(q) \end{pmatrix}, \quad V = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & i & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & i & 0 \end{pmatrix}, \quad V^{-1} = V^\dagger/2 \quad (3.3)$$

行列  $V$  を求める方法は前節で行列  $U$  を求めた方法と同じなので、補遺 A に述べる。ここで、 $\rho_P(q), \bar{\rho}_P(q)$  は、複素四元数の Pauli 表現

$$\rho_P(q) = \begin{pmatrix} q^0 + q^3 & q^1 - iq^2 \\ q^1 + iq^2 & q^0 - q^3 \end{pmatrix} = q^\mu \sigma_\mu, \quad \bar{\rho}_P(q) = \begin{pmatrix} q^0 - q^3 & -q^1 - iq^2 \\ -q^1 + iq^2 & q^0 + q^3 \end{pmatrix} = q^\mu \bar{\sigma}_\mu, \quad \bar{\sigma}_\mu = (\sigma_0, -\boldsymbol{\sigma}) \quad (3.4)$$

で与えられる。 $\rho_P(q)$  は (2.6d) で  $q_0 \rightarrow q^0, q_i \rightarrow iq^i$  とおきかえたものに他ならないが、 $\bar{\rho}_P(q)$  は実四元数のときのように、 $\rho_P(q)$  と（関係はするが）同じでないことに注意されたい。

今、複素四元数のノルムの 2 乗を

$$|q|^2 = q\bar{q} = \bar{q}q = -\eta_{\mu\nu} q^\mu q^\nu \quad (3.5)$$

と定義する。ここで、

$$(\eta_{\mu\nu}) = (\eta^{\mu\nu}) = \text{diag}(-1, +1, +1, +1) \quad (3.6)$$

は計量テンソルで、この節以降、ギリシヤ添え字の上げ下げはこの計量テンソルを用いて行う。例えば、 $\sigma^\mu = \eta^{\mu\nu} \sigma_\nu = (\sigma^0 = -\sigma_0, \sigma^i = \sigma_i)$  など。このとき、明らかに、

$$\bar{\rho}_P(q) = |q|^2 \rho_P^{T-1}(q) \quad (3.7)$$

となる。ノルムが 1 の複素四元数を、単位複素四元数と呼び、つぎの記号を使う。

$$U = U^\mu b_\mu, \quad |U|^2 = U\bar{U} = \bar{U}U = -\eta_{\mu\nu} U^\mu U^\nu = 1 \quad (3.8)$$

（前節で用いた行列  $U$  と同じ記号を使うが、混乱はあるまい）。すると、

$$\bar{\rho}_P(U) = \rho_P^{T-1}(U) \quad (3.9)$$

という関係を得る。以下では、 $\rho_P(U) = A$  とおく。このとき、複素行列  $A$  の行列式は  $\det A = |U|^2 = 1$  なので、 $A \in SL(2, \mathbb{C})$  となり、(3.3) から、(2.11) の  $\epsilon$  を使って、

$$\omega_d(U) \equiv V\omega(U)V^{-1} = \begin{pmatrix} A & 0_2 \\ 0_2 & A^{T-1} \end{pmatrix}, \quad A^{T-1} = \epsilon A \epsilon^{-1}, \quad (3.10)$$

が得られる ( $\det A = 1$  のとき成り立つ  $A^{T-1} = \epsilon A \epsilon^{-1}$  は固有 Lorentz 群の表現  $A, A^{T-1}$  が同値であることを意味する)。それ故、上で得られた、単位複素四元数の行列表現は、 $SL(2, \mathbb{C})$  の可約な 4 次元表現であるが、同値な表現がブロック対角的に並んでいるので、異値既約表現の直和である Dirac 表現ではない。実際、Weyl 表示の Dirac 表現は、(3.10) で  $A$  に反傾な行列  $A^{T-1}$  を  $A$  に共役な行列  $A^{\dagger-1}$  に置き換えたものだから。次節で、これの意味するところを調べる。

## 4 四元数 Dirac スピノル場は 2 成分複素四元数場である

今,  $\varphi^\mu(x)$  を複素 Grassmann 変数として,

$$\varphi(x) = b_\mu \varphi^\mu(x) \quad (4.1a)$$

$$U\varphi(x) = b_\mu \varphi^{\mu'}(x') \equiv \varphi'(x') \quad (4.1b)$$

を複素四元数場, および, 単位複素四元数  $U$  による左移動とする. 時空点  $x$  に依存した場の量を考えているが, 左移動は時空点を変えないから,  $x' = \Lambda x$  は異なる慣性系にいる観測者が眺めた  $x$  と同一の時空点である ( $\Lambda$  は固有 Lorentz 変換の行列である. 以下, 固有 Lorentz 群しか考えないので, 単に Lorentz 群とか Lorentz 変換と呼ぶ). 前節で  $\phi(x) \rightarrow Q\phi(x) = \phi'(x')$  が空間回転を表したように,  $U$  による左移動が, 場の Lorentz 変換を引き起こしていることは, つぎのように確かめられる.

$$\begin{aligned} U\varphi(x) &= (U^\rho b_\rho) b_\mu \varphi^\mu(x) = U^\rho (b_\rho b_\mu) \varphi^\mu(x) = U^\rho d_{\rho\mu}^\sigma b_\sigma \varphi^\mu(x) = b_\sigma (U^\rho \Omega_\rho)^\sigma{}_\mu \varphi^\mu(x) \\ &= b_\sigma \omega(U)^\sigma{}_\mu \varphi^\mu(x) = (bV^{-1})_\sigma \omega_d(U)^\sigma{}_\mu (V\varphi)^\mu(x) \equiv (bV^{-1})_\sigma \varphi'^\sigma(x') = \varphi'(x') \end{aligned} \quad (4.2)$$

となるが, (3.3), (3.4) から

$$\begin{aligned} \xi^1 &= (V\varphi)^0 = \varphi^0 + \varphi^3, & \xi^2 &= (V\varphi)^1 = \varphi^1 + i\varphi^2, \\ \eta_1 &= (V\varphi)^2 = \varphi^0 - \varphi^3, & \eta_2 &= (V\varphi)^3 = -\varphi^1 + i\varphi^2 \end{aligned} \quad (4.3)$$

および,

$$\begin{aligned} v_1 &= (bV^{-1})_0 = \frac{1}{2}(b_0 + b_3), & v_2 &= (bV^{-1})_1 = \frac{1}{2}(b_1 - ib_2) \\ v^1 &= (bV^{-1})_2 = \frac{1}{2}(b_0 - b_3), & v^2 &= (bV^{-1})_3 = -\frac{1}{2}(b_1 + ib_2) \end{aligned} \quad (4.4)$$

とおけば (以下, 次節, (5.6) まで, 場の引数  $x$  及び, その Lorentz 変換  $x' = \Lambda x$  を省略する),

$$\varphi = v_\alpha \xi^\alpha + v^\alpha \eta_\alpha, \quad (\alpha = 1, 2) \quad (4.5a)$$

$$\xi' = A\xi, \quad \xi = \begin{pmatrix} \xi^1 \\ \xi^2 \end{pmatrix} \quad (4.5b)$$

$$\eta' = A^{T-1}\eta, \quad \eta = \begin{pmatrix} \eta_1 \\ \eta_2 \end{pmatrix} \quad (4.5c)$$

を得る. (4.5b), (4.5c) の変換則を見るには,  $U(v_1, v_2) = (v_1, v_2)A$ ,  $U(v^1, v^2) = (v^1, v^2)A^{T-1}$  を確かめればよい ( $\bar{\varphi}\varphi$  の Lorentz 不変性を成分に対する (4.5b), (4.5c) の変換則から見るのはたやすい). したがって,  $\xi$  も  $\eta$  も Lorentz 群の同値な 2 次元表現の基底である Weyl スピノルであるが, Dirac スピノルを構成するのは, 異値既約表現の基底である,  $\xi$  と  $\bar{\eta}$  (=  $\eta$  の複素共役) なので, (4.1a) の複素共役も同時に考えねばならない. そのため,  $v_\alpha^* = v^\alpha$  を使って,

$$\begin{pmatrix} \varphi \\ \varphi^* \end{pmatrix} = v_\alpha \begin{pmatrix} \xi^\alpha \\ \bar{\eta}_{\dot{\alpha}} \end{pmatrix} + v^\alpha \begin{pmatrix} \eta_\alpha \\ \bar{\xi}^{\dot{\alpha}} \end{pmatrix}, \quad \bar{\eta}_{\dot{\alpha}} = (\eta_\alpha)^*, \quad \bar{\xi}^{\dot{\alpha}} = (\xi^\alpha)^*, \quad \alpha = 1, 2 \quad (\dot{\alpha} = \dot{1}, \dot{2}) \quad (4.6a)$$

とおけば,

$$\bar{\xi}' = A^* \bar{\xi}, \quad \bar{\xi} = \begin{pmatrix} \bar{\xi}^{\dot{1}} \\ \bar{\xi}^{\dot{2}} \end{pmatrix} \quad (4.6b)$$

$$\bar{\eta}' = A^{\dagger-1} \bar{\eta}, \quad \bar{\eta} = \begin{pmatrix} \bar{\eta}_{\dot{1}} \\ \bar{\eta}_{\dot{2}} \end{pmatrix} \quad (4.6c)$$

を得る. (4.6b), (4.6c) は,  $U^*(v_1, v_2) = (v_1, v_2)A^{\dagger-1}$ ,  $U^*(v^1, v^2) = (v^1, v^2)A^*$  から得られる. したがって, (4.6a) の第 1 項には, Weyl 表示における Dirac スピノル

$$\psi = \begin{pmatrix} \xi \\ \bar{\eta} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \xi^1 \\ \xi^2 \\ \bar{\eta}_1 \\ \bar{\eta}_2 \end{pmatrix} \quad (4.7a)$$

が含まれ, 第 2 項には, その荷電共役

$$\psi^c = \begin{pmatrix} \xi^c \\ \bar{\eta}^c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\epsilon\bar{\eta}^* \\ \epsilon\xi^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \eta_2 \\ -\eta_1 \\ -\bar{\xi}^2 \\ \bar{\xi}^1 \end{pmatrix} \quad (4.7b)$$

が含まれていることが予想される ( $\bar{\xi}^{\dot{\alpha}} = (\xi^\alpha)^*$ ,  $\eta_\alpha = (\bar{\eta}_{\dot{\alpha}})^*$ ). ここで, 先に進む前に, Weyl 表示におけるガンマ行列

$$\gamma^\mu = \begin{pmatrix} 0_2 & i\sigma^\mu \\ i\bar{\sigma}^\mu & 0_2 \end{pmatrix}, \quad \gamma_5 = -i\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3 = \begin{pmatrix} -1_2 & 0_2 \\ 0_2 & 1_2 \end{pmatrix} \quad (4.8)$$

を用いて,

$$\gamma_5\psi^c = \begin{pmatrix} -\xi^c \\ \bar{\eta}^c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \epsilon\bar{\eta}^* \\ \epsilon\xi^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\eta_2 \\ \eta_1 \\ -\bar{\xi}^2 \\ \bar{\xi}^1 \end{pmatrix} \quad (4.9)$$

となることに注意しておく. つぎに, (4.6a) の Pauli 表現をとると,

$$\rho_P(v_1) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \rho_P(v_2) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \rho_P(v^1) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \rho_P(v^2) = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (4.10)$$

になるので,

$$\Psi \equiv \rho_P \left[ \begin{pmatrix} \varphi \\ \varphi^* \end{pmatrix} \right] = \begin{pmatrix} \xi^1 & -\eta_2 \\ \xi^2 & \eta_1 \\ \bar{\eta}_1 & -\bar{\xi}^2 \\ \bar{\eta}_2 & \bar{\xi}^1 \end{pmatrix} \equiv (\psi, \gamma_5\psi^c) \quad (4.11)$$

を得る. このように, 四元数 Dirac スピノル (4.6a) は, 四元数の Pauli 表現をとれば,  $4 \times 2$  行列  $\Psi$  で与えられ, 線形な荷電共役変換  $\Psi \rightarrow \Psi^c = \gamma_5\Psi\sigma_1$  に従う ( $\Psi$  の満たす Dirac 方程式やそれを導く Lagrangian も書き下せるが, ここでは省略する). この線形性から, Dirac 双一次形式が, 自動的に反対称化されることがわかる. なお,  $\Psi$  を構成する 4 成分スピノル  $\psi$  と  $\gamma_5\psi^c$  は, 互いに Pauli-Gürsey 変換 (補遺 B を参照) で結ばれる.

4 成分 Dirac スピノル  $\psi$  を四元数 Dirac スピノル (4.6a) から射影する方法は, 簡単である. (4.4) の定義により,  $v_\alpha v_1 = v_\alpha$  及び,  $v^\alpha v_1 = 0$  なので,

$$\begin{pmatrix} \varphi \\ \varphi^* \end{pmatrix} v_1 = \begin{pmatrix} v_\alpha \xi^\alpha \\ v_\alpha \bar{\eta}_{\dot{\alpha}} \end{pmatrix} \quad (4.12)$$

したがって、すべて 0 になる第 2 列目を落とすと、

$$\rho_{\mathbb{F}} \left[ \begin{pmatrix} \varphi \\ \varphi^* \end{pmatrix} v_1 \right] = \psi = \begin{pmatrix} \xi \\ \bar{\eta} \end{pmatrix} \quad (4.13)$$

を得る。このように、複素四元数のエルミート基底を使えば、その行列表現から、Lorentz 群のスピンル表現が導かれ、4 成分 Dirac スピンルが Weyl 表示で定義される。もちろん、Pauli のレンマにより、任意の表示に移れるが、Weyl 表示は Dirac 表現が Lorentz 群の可約表現であることを明白に示す表示である点で特殊であり、複素四元数アプローチでは、Weyl 表示の Dirac スピンルが自然に出てくるのである。

## 5 四元数 Dirac スピンルは 2 成分実四元数場でもある

つぎに、実四元数アプローチでは、Pauli 表示の Dirac スピンルが生まれることを見よう。すなわち、Dirac スピンルが空間回転では混ざらないが、Lorentz ブーストでは混じる 2 つの Pauli スピンルから構成されることを四元数の立場から眺める。言うまでもないが、 $\psi = (\xi, \bar{\eta})^T$  の 2 つの Weyl スピンル  $\xi, \bar{\eta}$  は固有 Lorentz 変換のもとで混ざらないことに注意されたい。もちろん、Weyl 表示とは異なる表示では、一般に 4 つの成分すべてが混ざる。

そのために、(1.5) を使って、四元数 Dirac スピンルは 2 成分実四元数スピンル場でもあることを見る。実際、(1.5) の複素四元数  $U$  を前節の単位複素四元数  $U$  と同定すれば、条件  $|U| = 1$  より、 $|Q|^2 - |P|^2 = 1, P\bar{Q} + Q\bar{P} = 0$  が成り立ち、

$$\begin{pmatrix} \varphi' \\ \varphi'^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} U & 0 \\ 0 & U^* \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varphi \\ \varphi^* \end{pmatrix} = T^{-1} \begin{pmatrix} Q & -P \\ P & Q \end{pmatrix} T \begin{pmatrix} \varphi \\ \varphi^* \end{pmatrix} \quad (5.1)$$

となり、

$$T \begin{pmatrix} \varphi \\ \varphi^* \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} \zeta^1 \\ \zeta^2 \end{pmatrix}, \quad \begin{cases} \zeta^1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(\varphi + \varphi^*) \\ \zeta^2 = \frac{i}{\sqrt{2}}(\varphi - \varphi^*) \end{cases} \quad (5.2)$$

と書けば、 $\varphi$  の定義により、 $\zeta^{1,2}$  は実四元数となるから、複素四元数スピンルが実四元数スピンル (四元数 Dirac スピンル [1]) に変換された。ところが、第 2 節の議論から、実四元数場は Pauli スピンルと見なせたので、Dirac スピンルが 2 つの Pauli スピンル (を定義する)  $\zeta^{1,2}$  から構成されていると見なせることが四元数の立場から確かめられた。

Pauli スピンル (を定義する)  $\zeta^{1,2}$  は空間回転のもとで、同じ変換を受けるが、もちろん、Lorentz ブーストのもとでは混じる。それは、Dirac スピンル  $(\zeta^1, \zeta^2)^T$  の Lorentz 変換は (5.1), (5.2) により、

$$\begin{pmatrix} \zeta^{1'} \\ \zeta^{2'} \end{pmatrix} = \mathbf{A} \begin{pmatrix} \zeta^1 \\ \zeta^2 \end{pmatrix} \quad (5.3a)$$

で与えられるからである。ただし、

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} Q & -P \\ P & Q \end{pmatrix} = Q1_2 + P\epsilon, \quad (|Q|^2 - |P|^2 = 1, P\bar{Q} + Q\bar{P} = 0) \quad (5.3b)$$

とおいた。行列  $\mathbf{A}$  の集合は群  $Spin(2, \mathbb{H})$  をなすが、その詳しい性質は [1] の付録 B にまとめてある。ここでは、 $Q, P$  の満たす条件から、 $Q \neq 0, P = 0$  は可能だが、 $Q = 0, P \neq 0$  は許されないことに注意する。第 1 のケースは空間回転に対応し、 $\zeta^{1,2}$  は  $Q \neq 0$  による同じ空間回転を受けるのに対し、 $P \neq 0$  による Lorentz ブーストは必ず  $\zeta^{1,2}$  を混ぜ合わせ、かつ  $Q \neq 0$  でなくてはならないので、空間回転も同時に引き起こす。

このように、四元数 Dirac スピンルには、互いにユニタリ行列で結ばれる、2 成分の複素四元数スピンル及び、同じく 2 成分の実四元数スピンルの 2 種類のバージョンが存在する。前者は、Weyl 表示における Dirac スピンルを定義し、後者は、Pauli 表示における Dirac スピンルを与える。



Weyl 表示と Pauli 表示の関係を簡単に触れる。

まず, (5.2) の 2 成分の複素・実四元数スピノル場を射影演算子  $E_{\pm} = (b_0 \pm b_3)/2$  を使えば,

$$\begin{pmatrix} \varphi \\ \varphi^* \end{pmatrix} E_+ = v_{\alpha} \begin{pmatrix} \xi^{\alpha} \\ \bar{\eta}_{\dot{\alpha}} \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \varphi \\ \varphi^* \end{pmatrix} E_- = v^{\alpha} \begin{pmatrix} \eta_{\alpha} \\ \bar{\xi}^{\dot{\alpha}} \end{pmatrix} \quad (5.4a)$$

$$\begin{pmatrix} \zeta^1 \\ \zeta^2 \end{pmatrix} E_+ = v_{\alpha} \begin{pmatrix} \chi_{\alpha} \\ \omega_{\alpha} \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \zeta^1 \\ \zeta^2 \end{pmatrix} E_- = v^{\alpha} \begin{pmatrix} \chi_{\alpha}^* \\ \omega_{\alpha}^* \end{pmatrix} \quad (5.4b)$$

となる. (5.4a) は既出の (4.6a) であるが, (5.4b) は (2.8a), (2.8b) を 2 成分実四元数スピノル場  $(\zeta^1, \zeta^2)^T$  に適用し,  $\chi_{\alpha}, \omega_{\alpha}$  は各々 2 成分 Pauli スピノルである.  $\alpha = 1, 2, \dot{\alpha} = \dot{1}, \dot{2}$  という添え字を持った 2 成分量を  $2 \times 1$  行列とみなして計算すれば, (5.2) はつぎのように書ける.

$$T \begin{pmatrix} \xi^{\alpha} \\ \bar{\eta}_{\dot{\alpha}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \chi_{\alpha} \\ \omega_{\alpha} \end{pmatrix} \implies \begin{cases} \xi^{\alpha} = \frac{1}{\sqrt{2}}(\chi_{\alpha} - i\omega_{\alpha}) \\ \bar{\eta}_{\dot{\alpha}} = \frac{1}{\sqrt{2}}(\chi_{\alpha} + i\omega_{\alpha}) \end{cases}$$

ここで,  $T^{-1}$  の形 (1.4) を使った<sup>8</sup>. これは,

$$\begin{pmatrix} \xi^1 \\ \xi^2 \\ \bar{\eta}_1 \\ \bar{\eta}_2 \end{pmatrix} = S \begin{pmatrix} \chi_1 \\ \chi_2 \\ \omega_1 \\ \omega_2 \end{pmatrix}, \quad S = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -i & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -i \\ 1 & 0 & i & 0 \\ 0 & 1 & 0 & i \end{pmatrix}, \quad S^{-1} = S^{\dagger} \quad (5.5)$$

を意味するが, 上の  $S^{-1}$  が Weyl 表示から Pauli 表示への変換を表すユニタリ行列である. したがって, Pauli 表示のガンマ行列は  $\gamma_{\text{P}}^{\mu} = S^{-1} \gamma_{\text{W}}^{\mu} S$  (添え字の P, W はそれぞれ, Pauli 表示, Weyl 表示を表す.  $\gamma_{\text{W}}^{\mu}$  は (4.8) の  $\gamma^{\mu}$  のこと) で与えられる. Pauli スピノルのペアの Lorentz 変換は

$$\begin{pmatrix} \chi_{\alpha'} \\ \omega_{\alpha'} \end{pmatrix} = S^{-1} \begin{pmatrix} A & 0_2 \\ 0_2 & A^{\dagger-1} \end{pmatrix} S \begin{pmatrix} \chi_{\alpha} \\ \omega_{\alpha} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X & -Y \\ Y & X \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \chi_{\alpha} \\ \omega_{\alpha} \end{pmatrix}, \quad \begin{cases} X = \frac{1}{2}(A + A^{\dagger-1}) \\ Y = \frac{i}{2}(A - A^{\dagger-1}) \end{cases} \quad (5.6)$$

となる. 空間回転のときには,  $A$  は行列式が 1 のユニタリ行列なので,  $X = A, Y = 0_2$  となるが, Lorentz ブーストに対しては,  $A$  は行列式が 1 の正値エルミート行列で,  $Y \neq 0_2$  かつ  $X \neq 0_2$  である. これは, (5.3a), (5.3b) の性質として述べたことと符合する. なお, ガンマ行列の表示の変更  $\gamma_{\text{P}}^{\mu} = S^{-1} \gamma_{\text{W}}^{\mu} S$  は

$$\gamma_{\text{P}}^0 = \begin{pmatrix} -i\sigma_0 & 0 \\ 0 & i\sigma_0 \end{pmatrix}, \quad \gamma_{\text{P}}^i = \begin{pmatrix} 0 & -\sigma^i \\ -\sigma^i & 0 \end{pmatrix} \quad (5.7)$$

を与える. 電荷  $e$ , 質量  $m$  の荷電粒子に対する, 外部電磁場のもとでの Dirac 方程式

$$\left[ \gamma^{\mu} \left( p_{\mu} - \frac{e}{c} A_{\mu} \right) - imc \right] \psi = 0, \quad p_{\mu} = -i\hbar \partial_{\mu} \quad (5.8)$$

(この式以降, (5.10) までは, 普通の単位系に戻る) で Pauli 表示  $\gamma^{\mu} = \gamma_{\text{P}}^{\mu}, \psi = (\chi, \omega)^T$  をとり,

$$\psi = \psi' e^{-imc^2 t/\hbar}, \quad \psi' = \begin{pmatrix} \chi' \\ \omega' \end{pmatrix} \quad (5.9)$$

とおくと, 非相対論的極限では  $\omega'$  が  $(\chi'/c)$  のオーダーとなって,  $(\chi', \omega')^T$  に対する連立方程式は, 最終的に, 大きい方の成分  $\chi'$  に対する Pauli 方程式

$$i\hbar \frac{\partial \chi'}{\partial t} = H \chi', \quad H = \frac{1}{2m} \left( \mathbf{p} - \frac{e}{c} \mathbf{A} \right)^2 + e\phi - \frac{e\hbar}{2mc} \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{H}, \quad \mathbf{H} = \nabla \times \mathbf{A} \quad (5.10)$$

となる. 複素数  $\rightarrow$  実四元数  $\rightarrow$  複素四元数の行列表現にもとづく, 四元数アプローチでは, 自然に Weyl 表示と Pauli 表示  $\sim$  標準表示の Dirac スピノルが導かれることがわかった.

<sup>8</sup>行列  $T$  は (1.5) の直ぐ下で述べたように, 四元数とは可換な  $2 \times 2$  の複素四元数行列であるが, その Pauli 表現  $\rho_{\text{P}}(T)$  が  $4 \times 4$  の複素行列  $S^{-1} = \rho_{\text{P}}(T)$  である. それ故, 下の (46) は 4 成分スピノルに対する  $4 \times 4$  複素行列を含む関係式である.

## 6 ベクトル(場)と時空座標はエルミート四元数(場)である

Dirac スピノルと同様、ベクトル場も複素四元数によって表されるが、今度は、エルミート四元数場となる。その Lorentz 変換性は 2 成分複素四元数スピノル場の変換則に現れた単位複素四元数  $U$  を用いて、

$$V(x) = b_\mu V^\mu(x) \rightarrow V'(x') = UV(x)U^\dagger \quad (6.1)$$

と与えられる。この式は

$$b_\mu V'^\mu(x') = b_\mu \Lambda^\mu{}_\nu V^\nu(x) = U(b_\mu V^\mu(x))U^\dagger \quad (6.2)$$

を意味するので、

$$b_\mu \Lambda^\mu{}_\nu = Ub_\nu U^\dagger \quad (6.3)$$

が導かれる。ところが、 $b_\mu \bar{b}_\nu$  の実部に対して、

$$\text{Re}[b_\mu \bar{b}_\nu] = \frac{1}{2} \text{Re}[b_\mu \bar{b}_\nu + b_\nu \bar{b}_\mu] = -\eta_{\mu\nu} \quad (6.4)$$

が成り立つので、

$$\Lambda^\mu{}_\nu = -\text{Re}[Ub_\nu U^\dagger \bar{b}^\mu] \rightarrow U = \pm \frac{\Lambda^\mu{}_\nu b_\mu \bar{b}^\nu}{|\Lambda^\mu{}_\nu b_\mu \bar{b}^\nu|} \quad (6.5)$$

が導かれる。同様に、時空座標  $(x^\mu)$  とその Lorentz 変換は

$$x = b_\mu x^\mu \rightarrow x' = b_\mu x'^\mu = b_\mu \Lambda^\mu{}_\nu x^\nu = UxU^\dagger \quad (6.6)$$

となる。特別の四元数場として、つぎのようなスカラー場も存在する。

$$\phi(x) \equiv b_0 \phi(x), \quad \phi'(x') = \phi(x), \quad x' = \Lambda x \quad (6.7)$$

## 7 おわりに代えて

複素関数論はあっても、四元数関数論はないので、 $S$ -行列の計算は、複素数体上でやる以外ない。ただ、四元数の特徴として、《Lorentz 添え字のない》四元数場として登場するのは、スカラー場、スピノル場、ベクトル場(ゲージ場)に限られる。四脚場の存在を仮定して、一般相対論に移れば、スペクトルはより豊富になる。例えば、重力子場と Rarita-Schwinger 場が対になって現れる、4 次元単純超重力理論も四元数を用いて記述出来る([1]の第 6 章)。

最後に、4 次元時空の 4 が一意的な解として生まれる関係式に触れてこのノートを閉じよう。今、 $\nu$  を自然数として、 $2\nu$  次元時空を考える。その上で定義される、ベクトル場と Dirac 場の成分数は、それぞれ、 $2\nu$  と  $2^\nu$  である。それらが等しい( $2\nu = 2^\nu$ )のは、 $\nu = 1, 2$  だけであるが、2 次元時空では、Einstein テンソルがゼロになると言う理由で  $\nu = 1$  を除くと、 $\nu = 2$  即ち 4 次元時空が一意的な解になる。もっとも、関係式  $2\nu = 2^\nu$  の起源は、何らかの超対称性に関係しているのかも知れないが、今のところ、全く不明である。なお、複素四元数のエルミート基底  $\{b_\mu\}_{\mu=0,1,2,3}$  により定義される不定形量  $-\eta_{\mu\nu}$  (6.4) は分解  $4 = 1 + 3$  に対応する。

## 謝辞

初稿を詳しく読んで、貴重なコメントを頂いた加瀬博己大同大学名誉教授に謝意を表します。

## 補遺 A (3.3) の $V$ を求める

行列の対角化のときには、固有値と固有ベクトルを求める必要があるが、(2.6a) や (3.3) の様な、対角ブロック化の時には、より簡単な方法になる。(2.6a) の証明は、本文ですんでいるが、同じような証明は (3.3) に対しても適用出来るので、今一度その流れを復習しておこう。

本文第 4 節では、 $\xi^\alpha, \eta_\alpha$  を対角ブロック化の後に定義したが、実は、(2.8) でやったように、対角ブロック化の前に定義できるのである。そうすれば行列  $V$  は容易に求まる。

まず、 $E_\pm = (b_0 \pm b_3)/2$  を用いて、(4.1a) から、四元数カイラルスピノルをつぎのように定義する。

$$\begin{aligned}\varphi_L &= \varphi E_+ = v_\alpha \xi^\alpha, \quad \xi^1 = \varphi^0 + \varphi^3, \quad \xi^2 = \varphi^1 + i\varphi^2 \\ \varphi_{\bar{R}} &= \varphi E_- = v^\alpha \eta_\alpha, \quad \eta_1 = \varphi^0 - \varphi^3, \quad \eta_2 = -\varphi^1 + i\varphi^2\end{aligned}\quad (7.1)$$

この補遺 A では §4 の記号をそのまま使う。複素四元数場  $\varphi = b_\mu \varphi^\mu$  の Lorentz 変換は (4.2) で見たように、 $\varphi' = U\varphi = b_\mu \omega(U)^\mu_\nu \varphi^\nu = b_\mu \varphi^{\mu'}$  である。 $\varphi^\mu \rightarrow \varphi^{\mu'}$  にしたがって、上の  $(\xi^\alpha, \eta_\alpha) \rightarrow (\xi^{\alpha'}, \eta_{\alpha'})$  となるが、先に計算したように、 $U(v_1, v_2) = (v_1, v_2)A, U(v^1, v^2) = (v^1, v^2)A^{T-1}$  だから、 $\xi^{\alpha'} = A^\alpha_\beta \xi^\beta, \eta_\alpha = A_\alpha^\beta \eta_\beta$  となる。ここで、 $A^\alpha_\beta, A_\alpha^\beta$  は、それぞれ、行列  $A, A^{T-1} = \epsilon A \epsilon^{-1}$  の  $(\alpha, \beta)$  成分である。

(7.1) の定義によって、

$$\begin{pmatrix} \xi^1 \\ \xi^2 \\ \eta_1 \\ \eta_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & i & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & i & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varphi^0 \\ \varphi^1 \\ \varphi^2 \\ \varphi^3 \end{pmatrix}\quad (7.2)$$

ここに現れた 4 次の行列が (3.3) で定義された  $V$  に他ならないことは (4.3) から明らか。しかし、(7.2) はあくまでも、四元数カイラル分解 (7.1) の結果である。それに対して、(4.3) は  $\omega(U)$  の対角ブロック化の結果である。複素四元数のエルミート基底の行列表現 (3.2) の  $\omega(b_\mu)$  が対角ブロック化できるのは、四元数の既約表現が 2 次元に限ることから自明であるが、 $V$  を求める道具は四元数カイラル分解 (7.1) にある。即ち、 $(v_1, v_2)$  と  $(v^1, v^2)$  は (固有)Lorentz 変換 (単位複素四元数  $U$  を左から書けること) のもとで、混ざらないのである。 $V$  の逆を求めることは容易である。

$$\begin{pmatrix} \varphi^0 \\ \varphi^1 \\ \varphi^2 \\ \varphi^3 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & -i & 0 & -i \\ 1 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi^1 \\ \xi^2 \\ \eta_1 \\ \eta_2 \end{pmatrix}$$

したがって、 $(\xi^\alpha, \eta_\alpha)$  の Lorentz 変換 (32b, c) は

$$\begin{pmatrix} \xi^{1'} \\ \xi^{2'} \\ \eta_{1'} \\ \eta_{2'} \end{pmatrix} = V \begin{pmatrix} \varphi^{0'} \\ \varphi^{1'} \\ \varphi^{2'} \\ \varphi^{3'} \end{pmatrix} = V \omega(U) \begin{pmatrix} \varphi^0 \\ \varphi^1 \\ \varphi^2 \\ \varphi^3 \end{pmatrix} = V \omega(U) V^{-1} \begin{pmatrix} \xi^1 \\ \xi^2 \\ \eta_1 \\ \eta_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & 0_2 \\ 0_2 & A^{T-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi^1 \\ \xi^2 \\ \eta_1 \\ \eta_2 \end{pmatrix}$$

のようにしても得られる。

## 8 補遺 B Pauli-Gürsey 変換

これは、質量 0 の Dirac 粒子が持つ Lagrangian レベルの  $SU(2)$  対称性を記述する変換である。

質量 0 の Dirac 粒子に対する Lagrangian は, 荷電共役対称性をあからさまに示す形で,

$$-\frac{1}{4} \sum_{r=1,2} \bar{\psi}_r \gamma^\mu \overleftrightarrow{\partial}_\mu \psi_r$$

と書ける. ここで,  $\psi_1 = \psi, \psi_2 = \gamma_5 \psi^c$  とおいた. これは明らかに, 変換

$$\begin{pmatrix} \psi'_1 \\ \psi'_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ -b^* & a^* \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \end{pmatrix}, \quad |a|^2 + |b|^2 = 1, \quad \text{i.e.} \quad \begin{cases} \psi' = a\psi + b\gamma_5\psi^c \\ \gamma_5\psi'^c = a^*\gamma_5\psi^c - b^*\psi \end{cases}$$

のもとで不変である. これが Pauli-Gürsey 変換と呼ばれるものである.

## 参考文献

- [1] 森田 克貞, 『四元数・八元数とディラック理論』, (日本評論社, 2011).
- [2] F. Gürsey and C-H. Tze, *On the Role of Division, Jordan and Related Algebras in Particle Physics* (World Scientific Publishing Co. Pte. Ltd. (1996), p.27.

# 自然数のべき乗の級数の和4

矢野 忠<sup>1</sup>

## Power Series of Natural Numbers 4

Tadashi YANO<sup>2</sup>

### 1 はじめに

これは自然数のべき乗の級数の和

$$S_q(n) = 1^q + 2^q + 3^q + \cdots + n^q \quad (1.1)$$

を求めるシリーズの第4レポートである。

このエッセイでは Pascal の恒等式を用いた和について考えてみよう [1]。この方法は高校数学の教科書に載っている方法である。

高校ではべきの指数  $q$  は高々  $q = 3$  くらいまでの級数の和を実際に求めているであろうか。それをもう少し大きな自然数  $q$  まで延長してみよう。

さて、Pascal の恒等式とはどんな恒等式だったか。まず思い出しておくとして  $n$  と  $q$  を自然数として

$$(n+1)^{q+1} - 1 = \sum_{k=1}^n [(k+1)^{q+1} - k^{q+1}] = \sum_{r=0}^q \binom{q+1}{r} (1^r + 2^r + 3^r + \cdots + n^r) \quad (1.2)$$

である。この恒等式をもちいて自然数のべき乗の級数の和を求める。この恒等式の証明は付録1に示す。

### 2 Pascal の恒等式を用いる方法

いくつかの自然数  $q$  に対して級数の和  $S_q(n)$  を求めるのだが、簡単のためにつぎのような記号を導入しておく。

$$f(p) := (n+1)^{p+1} - (n+1)^p = n(n+1)^p \quad (2.1)$$

$$g(p) := f(p+1) - f(p) = n^2(n+1)^p \quad (2.2)$$

$$h(p) := g(p+1) - g(p) = n^3(n+1)^p \quad (2.3)$$

$$k(p) := h(p+1) - h(p) = n^4(n+1)^p \quad (2.4)$$

ここで、 $:=$  は左辺の記号で右辺を定義するという記号である。以下では (2.1)-(2.4) で定義した、すべての記号を使わないかもしれないが、少なくともこの記号を使うという前提で話を進める。

さて、これから  $q = 0$  から  $q = 8$  まで  $q$  の値を変えて級数の和  $S_q(n)$  を求めてみよう。以下では引数の  $n$  を省略する。

---

<sup>1</sup>yanotad@earth.ocn.ne.jp

<sup>2</sup>yanotad@earth.ocn.ne.jp

(1.2) から  $q = 0 \sim q = 8$  のときには

$$S_0 = (n + 1) - 1 \quad (q = 0) \quad (2.5)$$

$$2S_1 + S_0 = (n + 1)^2 - 1 \quad (q = 1) \quad (2.6)$$

$$3S_2 + 3S_1 + S_0 = (n + 1)^3 - 1 \quad (q = 2) \quad (2.7)$$

$$4S_3 + 6S_2 + 4S_1 + S_0 = (n + 1)^4 - 1 \quad (q = 3) \quad (2.8)$$

$$5S_4 + 10S_3 + 10S_2 + 5S_1 + S_0 = (n + 1)^5 - 1 \quad (q = 4) \quad (2.9)$$

$$6S_5 + 15S_4 + 20S_3 + 15S_2 + 6S_1 + S_0 = (n + 1)^6 - 1 \quad (q = 5) \quad (2.10)$$

$$7S_6 + 21S_5 + 35S_4 + 35S_3 + 21S_2 + 7S_1 + S_0 = (n + 1)^7 - 1 \quad (q = 6) \quad (2.11)$$

$$8S_7 + 28S_6 + 56S_5 + 70S_4 + 56S_3 + 28S_2 + 8S_1 + S_0 = (n + 1)^8 - 1 \quad (q = 7) \quad (2.12)$$

$$9S_8 + 36S_7 + 84S_6 + 126S_5 + 126S_4 + 84S_3 + 36S_2 + 9S_1 + S_0 = (n + 1)^9 - 1 \quad (q = 8) \quad (2.13)$$

が成り立つ.

ではこれから  $S_0$  から  $S_8$  まで求めてみよう.

まず  $S_0$  は (2.5) から直ちに

$$S_0 = n \quad (2.14)$$

と求められる.

つぎに  $S_1$  は (2.6) から (2.5) を辺々引けば,

$$2S_1 = (n + 1)^2 - (n + 1) =: f(1)$$

であるから

$$S_1 = \frac{1}{2}n(n + 1) \quad (2.15)$$

と求められる.

さらに  $S_2$  も (2.7) から (2.6) を辺々引けば,

$$3S_2 + S_1 = (n + 1)^3 - (n + 1)^2 =: f(2) \quad (2.16)$$

この式から  $S_1$  を消去すれば

$$6S_2 = 2f(2) - f(1)$$

となり,

$$S_2 = \frac{1}{6}n(n + 1)(2n + 1) \quad (2.17)$$

と求められる.

つづけて  $S_3$  も (2.8) から (2.7) を辺々引けば

$$4S_3 + 3S_2 + S_1 = f(3) \quad (2.18)$$

となり, この式から (2.16) を用いて  $S_2, S_1$  を消去すれば

$$4S_3 = f(3) - f(2) =: g(2)$$

が得られ, したがって

$$S_3 = \frac{1}{4}n^2(n + 1)^2 \quad (2.19)$$

と求められる.

$S_4$  は (2.9) から (2.8) を辺々引けば,

$$5S_4 + 6S_3 + 4S_2 + S_1 = f(4) \quad (2.20)$$

となり, さらにこの式から  $S_3, S_2, S_1$  を消去すれば

$$30S_4 = 6g(3) - 3g(2) - g(1) - f(2)$$

が得られ, したがって

$$S_4 = \frac{1}{30}n(n+1)(2n+1)(3n^2+3n-1) \quad (2.21)$$

と求められる.

$S_5$  は (2.10) から (2.9) を辺々引けば,

$$6S_5 + 10S_4 + 10S_3 + 5S_2 + S_1 = f(5) \quad (2.22)$$

となり, さらにこの式から  $S_4, S_3, S_2, S_1$  を消去すれば

$$12S_5 = 2h(3) - g(2) =: F$$

が得られ, したがって

$$S_5 = \frac{1}{12}n^2(n+1)^2(2n^2+2n-1) \quad (2.23)$$

と求められる.

$S_6$  は (2.11) から (2.10) を辺々引けば,

$$7S_6 + 15S_5 + 20S_4 + 15S_3 + 6S_2 + S_1 = f(6) \quad (2.24)$$

となり, さらにこの式から  $S_5, S_4, S_3, S_2, S_1$  を消去すれば

$$42S_6 = 6h(4) - 3h(3) - 6g(3) + 3g(2) + g(1) + f(2) =: E$$

が得られ, したがって

$$S_6 = \frac{1}{42}n(n+1)(2n+1)(3n^4+6n^3-3n+1) \quad (2.25)$$

と求められる.

$S_7$  は (2.12) から (2.11) を辺々引けば,

$$8S_7 + 21S_6 + 35S_5 + 35S_4 + 21S_3 + 7S_2 + S_1 = f(7) \quad (2.26)$$

となり, さらにこの式から  $S_6, S_5, S_4, S_3, S_2, S_1$  を消去すれば

$$48S_7 = D - E - 4F$$

$$D := 6h(5) - 3h(3) - 6g(3) + 3g(2) + g(1) + f(2)$$

が得られ, したがって

$$S_7 = \frac{1}{24}n^2(n+1)^2(3n^4+6n^3-n^2-4n+2) \quad (2.27)$$

と求められる.

$S_8$  は (2.13) から (2.12) を辺々引けば,

$$9S_8 + 28S_7 + 56S_6 + 70S_5 + 56S_4 + 28S_3 + 8S_2 + S_1 = f(8) \quad (2.28)$$

となり, さらにこの式から  $S_7, S_6, S_5, S_4, S_3, S_2, S_1$  を消去すれば

$$\begin{aligned} 90S_8 &= G - 40S_7 - 126S_6 - 40S_5 \\ G &:= 10k(5) - 2h(4) + h(3) \end{aligned} \quad (2.29)$$

が得られ, したがって

$$S_8 = \frac{1}{90}n(n+1)(2n+1)(5n^6 + 15n^5 + 5n^4 - 15n^3 - n^2 + 9n - 3) \quad (2.30)$$

と求められる.

この Pascal の恒等式を用いた方法によって手計算で求めるとすればここらあたりが限界であろう. もちろん, 十分忍耐強くて計算の上手な方々ならもっと先の  $q$  の値まで計算できることはいうまでもない.

このシリーズの 3 で用いた中西の方法ならば, もっと先まで簡単に求められることをすでに示してある.

### 3 計算方法の例示

前節では漸化式で例えば  $S_8$  を求めるときに (2.29) が成り立つとしたが, そこまでの計算を参考のために記しておこう. 他のところでも同様な考えで計算をしている.

$S_8$  は (2.13) から (2.12) を辺々引けば,

$$9S_8 + 28S_7 + 56S_6 + 70S_5 + 56S_4 + 28S_3 + 8S_2 + S_1 = f(8) \quad (2.28)$$

までは前節で書いたとおりだが, そこからがちょっと面倒である. 実は  $S_7$  を求める段階で得られた漸化式

$$8S_7 + 21S_6 + 35S_5 + 35S_4 + 21S_3 + 7S_2 + S_1 = f(7) \quad (2.26)$$

を (2.28) から辺々引き算すれば  $S_1$  が消去できて

$$9S_8 + 20S_7 + 35S_6 + 35S_5 + 21S_4 + 7S_3 + S_2 = f(8) - f(7) := g(7) \quad (3.1)$$

が得られる. 同様に  $S_7$  を求める段階で得られた漸化式

$$8S_7 + 14S_6 + 20S_5 + 15S_4 + 6S_3 + S_2 = g(6) \quad (3.2)$$

を (3.1) から, さらに辺々引き算すれば,  $S_2$  が消去できて

$$9S_8 + 12S_7 + 21S_6 + 15S_5 + 6S_4 + S_3 = g(7) - g(6) := h(6) \quad (3.3)$$

が得られる.

同様に  $S_7$  を求める段階で得られた漸化式

$$8S_7 + 7S_6 + 11S_5 + 5S_4 + S_3 = h(6) \quad (3.4)$$

を (3.3) から, さらに辺々引き算すれば,  $S_3$  が消去できて

$$9S_8 + 4S_7 + 14S_6 + 4S_5 + S_4 = h(6) - h(5) := k(5) \quad (3.5)$$

が得られる. この式に 10 をかけた

$$90S_8 + 40S_7 + 140S_6 + 40S_5 + 10S_4 = 10k(5) \quad (3.6)$$



から,  $S_6$  を求める段階で得られた漸化式

$$14S_6 + 10S_4 = 2h(4) - h(3) \tag{3.7}$$

を (3.6) から辺々引き算すれば

$$90S_8 + 40S_7 + 126S_6 + 40S_5 = 10k(5) - 2h(4) + h(3) := G \tag{3.8}$$

この式の左辺から右辺に  $40S_7 + 126S_6 + 40S_5$  を移項すれば (2.29) が求められる.

(3.8) から (2.30) は (2.29) の右辺を  $n$  で表してから両辺を 90 で割ればよい.

## 4 おわりに

このエッセイでは Pascal の恒等式を用いて自然数のべき乗の和を求めることを復習した. このエッセイはシリーズ 3 [2] のおわりにで述べたように自然数のべき乗の和を求めるアルゴリズムとして, 数式処理のシステムをつかってどのアルゴリズムが効率的かを調べるための下準備である.

手による計算のできる範囲でも中西のアルゴリズム [3] だと方法  $S_{13}$  くらいまでわけなく計算できたが, Pascal の恒等式を用いれば,  $S_8$  くらいで息が切れてしまった.

優劣はすでについており, 数式処理のシステムで試す必要がないかとも思われる.

## 5 付録1 Pascal の恒等式の証明

まず証明したい式を挙げておこう.  $q$  を自然数とすれば

$$(n+1)^{q+1} - 1 = \sum_{k=1}^n [(k+1)^{q+1} - k^q] = \sum_{r=0}^q \binom{q+1}{r} (1^r + 2^r + 3^r + \dots + n^r) \tag{1.2}$$

が成り立つ.

(証明) 中央の項  $\sum_{k=1}^n [(k+1)^{q+1} - k^q]$  を項ごとに縦に書き表して和をとれば, 上下の項が打ち消しあうので

$$\begin{array}{r} 2^{q+1} - 1^{q+1} \\ 3^{q+1} - 2^{q+1} \\ 4^{q+1} - 3^{q+1} \\ \dots \\ (n-1)^{q+1} - (n-2)^{q+1} \\ n^{q+1} - (n-1)^{q+1} \\ (n+1)^{q+1} - n^{q+1} \\ \hline (n+1)^{q+1} - 1 = \sum_{k=1}^n [(k+1)^{q+1} - k^{q+1}] \end{array} \tag{5.1}$$

となる. ここで  $(k+1)^{q+1}$  に二項定理をつかえば

$$\begin{aligned} (k+1)^{q+1} &= \sum_{r=0}^{q+1} \binom{q+1}{r} k^r \\ &= \sum_{r=0}^q \binom{q+1}{r} k^r + k^{q+1} \end{aligned} \tag{5.2}$$

であるから,

$$(k+1)^{q+1} - k^{q+1} = \sum_{r=0}^q \binom{q+1}{r} k^r \quad (5.3)$$

が成り立つ. したがって

$$\begin{aligned} (n+1)^{q+1} - 1 &= \sum_{k=1}^n \sum_{r=0}^q \binom{q+1}{r} k^r \\ &= \sum_{r=0}^q \binom{q+1}{r} \sum_{k=1}^n k^r \\ &= \sum_{r=0}^q \binom{q+1}{r} S_r(n) \end{aligned} \quad (5.4)$$

が成り立つ. これで (1.2) は証明された. ここで,

$$S_r(n) = \sum_{k=1}^n k^r \quad (5.5)$$

である.

(2015.7.13)

## 参考文献

- [1] [http://en.wikipedia.org/wiki/Faulhaber%27s\\_formula](http://en.wikipedia.org/wiki/Faulhaber%27s_formula)
- [2] 矢野 忠, 自然数のべき乗の級数の和 3, 数学・物理通信, 5 巻 7 号 (2015) 23-29
- [3] 中西 襄, 自然数の冪和に関する関係式, 数学・物理通信, 1 巻 4 号 (2010) 8-11

## 編集後記

5巻6,7号に続いて5巻8号を発行できることを喜んでいる。とても投稿が多いために9月も6月に引き続き、3つの号を連続で発行することとなった。編集者としてはうれしい悲鳴をあげている。しかし、これは編集者の体力の限界に近い。

考えさせられることが、最近起こっている。いわゆる、このサーキュラーの同人だけでなく、インターネットでこの『数学・物理通信』を見て、論文とかエッセイを投稿される方が現れた。論文とかエッセイの掲載にレフェリー制度の審査がないというので無条件に掲載してもらえようという判断をする方々が出て来たということである。

編集発行人の私としてはあくまで少数の同人でやっているつमोरのサーキュラーであり、その同人のための投稿規定であったり、原稿の募集要領であった。

ところがインターネットでその投稿規定や原稿募集要領を読んだ人たちは私も、僕も、俺も投稿していいだろう考えられている。そのことは編集人としてはちょっと想定外で困るのだが、それはインターネットで『数学・物理通信』を読んで投稿を考えた人には通じない、編集者の気持である。

つまり、私としては同人以外の投稿を想定していなかったので、困った事態になった。

まだあまりよく考えているわけではないが、同人と見なされている方の紹介がなければ、投稿をできないようにすればいいのか。それとも知らない方にはレフェリー制を導入するのがいいのか。手だてを考える時期に来ている。

(矢野 忠)