数学・物理通信

5巻9号　　2015年12月

編集　新関章三・矢野　忠

2015年12月8日

目次(Contents)

三すくみ方程式

世戸 憲治 *

Equation of Three-Way Deadlock

Kenji SETO*

1　はじめに

「三すくみ」で最も理解し易いものは，ジャンケンの「グー (石)」,「チョキ (鋏)」,「パー (紙)」である．グーはチョキより強く，チョキはパーより強く，パーはグーよりも強い．このように，ある種の 3 者間で強さの関係が一巡してしまうものを，三すくみという．他にも,「ヘビ」,「カエル」,「ナメクジ」というのがある．ヘビはカエルを食べ，カエルはナメクジを食べ，ナメクジがヘビを食べる訳はないが，ヘビはナメクジが嫌いと言われている．面白いのは，女房は子供の言いなりだが，旦那にはいつも強く出て旦那は女房に頭が上がらない．そこで，子供の躾はいつも旦那の役になってしまう．これは,「女房」,「旦那」,「子供」の三すくみである．

ここでは，食物連鎖の考え方を借りて，三すくみ方程式なるものを解析してみる．いま，X, Y, Z の三種の生き物がいて，X は Y を食べ，Y は Z を食べ，Z は X を食べるものとする．この X, Y, Z は種類を表すと同時にそれらの個体数も表すものとする．それらの個体数が時間的にどうのように変化していくかということは，餌にありつける確率，および，餌食になる確率とで決まるはずであるが，これら確率は，それぞれの種の個体数の積に比例するものと考えられる．最も理想的な場合は，これら三種がまったく同じ割合で，餌にありつけるときは個体数が増加し，餌食になるときは個体数が減少するものとする．これら個体数の時間変化を，それぞれ，dX/dt, dY/dt, dZ/dt とすると，

$$\frac{dX}{dt} = XY - ZX, \qquad \frac{dY}{dt} = YZ - XY, \qquad \frac{dZ}{dt} = ZX - YZ \tag{1.1}$$

という方程式で表されるであろう．一般には，この右辺に係数が付くが，時間のスケールを適当にとることで係数はすべて 1 ということにする．

この種の食物連鎖を表す方程式は解析的に解くことがほとんど不可能で，通常はシミュレータを使って解かれるが，ここで扱う方程式だけは，楕円関数を用いて解析的に解けることを，以下に示していく．

2　方程式の解法

(1.1) 式の辺々を加えると，

$$\frac{d}{dt}(X + Y + Z) = 0 \tag{2.1}$$

となり，これはただちに積分でき，積分定数を $3C$ として，

$$X + Y + Z = 3C \tag{2.2}$$

*北海学園大学名誉教授　　E-mail: seto@pony.ocn.ne.jp

となる．積分定数に 3 をつけたのは後の式をきれいにするためであるが，C は X, Y, Z の算術平均である．また，(1.1) 式の各式を，それぞれ，X, Y, Z で割ってから，加えると，

$$\frac{1}{X}\frac{dX}{dt}+\frac{1}{Y}\frac{dY}{dt}+\frac{1}{Z}\frac{dZ}{dt}=0 \tag{2.3}$$

となり，これもただちに積分でき，積分定数を D^3 として，

$$XYZ=D^3 \tag{2.4}$$

となる．積分定数に 3 乗を付けたのは，D が X, Y, Z の幾何平均になるようにするためである．ここで，算術平均と幾何平均に関する不等式

$$\frac{1}{3}(X+Y+Z)\geq\sqrt[3]{XYZ} \tag{2.5}$$

から，C, D のあいだには，

$$C\geq D \tag{2.6}$$

の関係が成り立つことを注意する．

これら，(2.2) (2.4) 式から，X, Y を Z の関数として求めると，

$$X=\frac{1}{2}\big[3C-Z+\sqrt{(3C-Z)^2-4D^3/Z}\ \big],\quad Y=\frac{1}{2}\big[3C-Z-\sqrt{(3C-Z)^2-4D^3/Z}\ \big] \tag{2.7}$$

となる．もちろん，この X, Y を逆にすることもできるが，ここでは，この場合を解析する．これら X, Y を (1.1) の第 3 式に代入すると，

$$\frac{dZ}{dt}=\sqrt{\Phi(Z)} \tag{2.8}$$

となる．ここに，

$$\Phi(Z)=Z\big[(3C-Z)^2Z-4D^3\big] \tag{2.9}$$

と定義する．さらに，この (2.8) 式を変数分離して，積分形にすると，

$$t=\int\frac{dZ}{\sqrt{\Phi(Z)}} \tag{2.10}$$

となるが，Φ は Z の 4 次式なので，これは一般に楕円積分となる．以下，この式を楕円積分の標準形にもっていくための変形をしていく．まず，この Φ の中の 3 次式の部分を

$$F(Z)=(3C-Z)^2Z-4D^3 \tag{2.11}$$

とおいて，これを因数分解するため，$F=0$ とおいたときの根を求める．この関数は $Z=C$ で極大値 $4(C^3-D^3)$ を持つが，(2.6) 式よりこれはゼロまたは正，また，$Z=3C$ で極小値 $-4D^3$ を持ち，これは負，さらに，$F(0)=-4D^3$ でこれも同じく負なので，この 3 次式の根はすべて正の実根である．ただし，$X=Y=Z$ のきは，$C=D$ となり，この場合，$Z=C$ は重根となるので，(2.10) 式の積分は楕円積分にはならない．ここでの解析は，この $C=D$ となる場合を例外として扱わないことにする．

以下，Cardano の解法に従って求めていく．初めに，

$$Z=\zeta+2C \tag{2.12}$$

とおくと，

$$F=\zeta^3-3C^2\zeta+2C^3-4D^3 \tag{2.13}$$

と 2 次の項が消え，さらに，

$$\zeta = u + v \tag{2.14}$$

とおくと，方程式 $F=0$ は，

$$F = u^3 + v^3 + 2C^3 - 4D^3 + 3(u+v)(uv - C^2) = 0 \tag{2.15}$$

となる．ここで，この式を 2 つの部分に分離させ，

$$u^3 + v^3 = -2C^3 + 4D^3, \qquad uv = C^2 \tag{2.16}$$

とおく．この第 2 式を 3 乗してから，第 1 式と連立させて u^3, v^3 を求めると，

$$u^3 = C^3 - 2D^3 + 2\sqrt{-D^3(C^3-D^3)}, \qquad v^3 = C^3 - 2D^3 - 2\sqrt{-D^3(C^3-D^3)} \tag{2.17}$$

となる．この根号の中は明らかに負なので，これらの解は複素数となる．また，これらの実部は正の場合と負の場合があり得る．ここで，3 乗根をとるために，これらの式を極表示しておくと，

$$u^3 = C^3 e^{3\alpha i}, \qquad v^3 = C^3 e^{-3\alpha i} \tag{2.18}$$

となる．ここに偏角 3α は

$$3\alpha = \begin{cases} \arctan\Big(\dfrac{2\sqrt{D^3(C^3-D^3)}}{C^3-2D^3}\Big), & C^3 - 2D^3 > 0 \\ \arctan\Big(\dfrac{2\sqrt{D^3(C^3-D^3)}}{C^3-2D^3}\Big) + \pi, & C^3 - 2D^3 < 0 \end{cases} \tag{2.19}$$

と定義する．$C^3 - 2D^3 < 0$ の場合に付く π は，arctan の主値が $-\pi/2$ から $\pi/2$ までなので，それを補正するためである．この定義で α の範囲は，$0 < \alpha < \pi/3$ である．(2.18) 式の 3 乗根をとるとき，一般には，1 の 3 乗根である $e^{\pm i\phi}$, $(\phi = 2\pi/3)$ が付く場合があることと，積 uv は (2.16) の第 2 式 $uv = C^2$ を満たさなければならないことを考慮すると，$(u,\ v)$ の組み合わせは，

$$\Big(u = Ce^{i\alpha},\ \ v = Ce^{-i\alpha}\Big) \ \ \text{or} \ \ \Big(u = Ce^{i(\alpha+\phi)},\ \ v = Ce^{-i(\alpha+\phi)}\Big) \ \ \text{or} \ \ \Big(u = Ce^{i(\alpha-\phi)},\ \ v = Ce^{-i(\alpha-\phi)}\Big) \tag{2.20}$$

の 3 通りとなる．これから，(2.11) の 3 次式 $F(z)$ をゼロとおいたときの根は，(2.14) (2.12) 式をさかのぼって，

$$Z = 2C\big(1+\cos(\alpha)\big), \quad 2C\big(1+\cos(\alpha+\phi)\big), \quad 2C\big(1+\cos(\alpha-\phi)\big) \tag{2.21}$$

の 3 個となる．これから，(2.9) 式の $\varPhi(Z)$ は，

$$\varPhi(Z) = Z\big[Z - 2C\big(1+\cos(\alpha)\big)\big]\big[Z - 2C\big(1+\cos(\alpha+\phi)\big)\big]\big[Z - 2C\big(1+\cos(\alpha-\phi)\big)\big] \tag{2.22}$$

あるいは，$\phi = 2\pi/3$ を用いて，

$$\varPhi(Z) = \big[Z^2 - 2C\big(1+\cos(\alpha)\big)Z\big]\big[Z^2 - 2C\big(2-\cos(\alpha)\big)Z + 4C^2(\cos(\alpha) - \tfrac{1}{2})^2\big] \tag{2.23}$$

と (二次式) × (二次式) の形に因数分解される．

つぎに，楕円積分の標準形にもっていくために，Z から ξ への変数変換

$$Z = -\frac{C}{\xi+1}\big[\big(\cos(\alpha) - \tfrac{1}{2} - P\big)\xi + \cos(\alpha) - \tfrac{1}{2} + P\big] \tag{2.24}$$

を施す．ここに，P は

$$P=\sqrt{3\cos^2(\alpha)-\tfrac{3}{4}} \tag{2.25}$$

と定義する．α は $0<\alpha<\pi/3$ の範囲に入っているので，この平方根の中身は正である．この変換で，(2.23) 式右辺の第 1 因子は

$$Z^2-2C\big(1+\cos(\alpha)\big)Z=\frac{C^2P}{(\xi+1)^2}\big[\big(4\cos(\alpha)+1+2P\big)-\big(4\cos(\alpha)+1-2P\big)\xi^2\big] \tag{2.26}$$

また，第 2 因子は

$$Z^2-2C\big(2-\cos(\alpha)\big)Z+4C^2\big(\cos(\alpha)-\tfrac{1}{2}\big)^2=\frac{C^2P}{(\xi+1)^2}\big[(3+2P)-(3-2P)\xi^2\big] \tag{2.27}$$

となる．この (2.24) の 1 次変換の式は，(2.26) (2.27) 式の右辺大括弧中で ξ の 1 次の項が消えるように決めたものである．さらに，(2.24) 式から

$$dZ=\frac{2CP}{(\xi+1)^2}d\xi \tag{2.28}$$

となるので，これらの式を (2.10) の積分式に代入すると，

$$t=\int\frac{(2/C)d\xi}{\sqrt{\big[\big(4\cos(\alpha)+1+2P\big)-\big(4\cos(\alpha)+1-2P\big)\xi^2\big]\big[(3+2P)-(3-2P)\xi^2\big]}} \tag{2.29}$$

となる．ここで，数式簡素化のため，さらなる置き換え

$$\mu=\sqrt{\frac{4\cos(\alpha)+1+2P}{4\cos(\alpha)+1-2P}},\qquad \nu=\sqrt{\frac{3+2P}{3-2P}},\qquad A=\frac{(2/C)}{\sqrt{\big(4\cos(\alpha)+1-2P\big)\big(3-2P\big)}} \tag{2.30}$$

をすると，この式は，

$$t=A\int\frac{d\xi}{\sqrt{(\mu^2-\xi^2)(\nu^2-\xi^2)}} \tag{2.31}$$

と書かれる．ここで，$1<\mu<\nu$ であることに注意する．

この被積分関数の平方根の中が正となるためには，$\xi^2<\mu^2$ か，または，$\xi^2>\nu^2$ でなければならない．ここでは，$\xi^2>\nu^2$ とした場合を解析するため，ξ から η へさらなる変数変換

$$\xi=\frac{\nu}{\eta} \tag{2.32}$$

をする [1]．この変換で，(2.31) 式は，

$$t=-T\int\frac{d\eta}{\sqrt{(1-\eta^2)(1-k^2\eta^2)}} \tag{2.33}$$

となる．ここに，T, k は

$$T=\frac{A}{\nu},\qquad k=\frac{\mu}{\nu}<1 \tag{2.34}$$

と定義する．k は楕円関数の母数である．これでようやく楕円積分に関する Jacobi の標準形に到達できた．この積分は Jacobi の楕円関数 sn の逆関数で表され，これから，

$$\eta=-\mathrm{sn}(t/T) \tag{2.35}$$

[1] $\xi^2<\mu^2$ の場合は，$\xi=\mu\eta$ とおくことで同様の議論ができるが，そのときの解を (2.24) 式に戻したときは，発散する解になってしまう．

と表される．ここでは，敢えて積分定数を入れないことにする．これを (2.32) 式を通して (2.24) 式に戻して，

$$Z=\frac{C}{\nu-\mathrm{sn}(t/T)}\Big[\big(\cos(\alpha)-\tfrac{1}{2}+P\big)\mathrm{sn}(t/T)-\big(\cos(\alpha)-\tfrac{1}{2}-P\big)\nu\Big] \tag{2.36}$$

と Z が求められたことになる．

残る問題は，(2.7) 式から X, Y を求めることだが，(2.7) 式にこの Z を直接代入してしまうと，sn の 2 乗項や平方根が残ってしまい，この Z とは全く異なる複雑な形になってしまう．そこで，(2.7) 式の平方根の部分は，(2.9) 式から，

$$\sqrt{(3C-Z)^2-4D^3/Z}=\sqrt{\varPhi}/Z \tag{2.37}$$

と表されることに注意する．(2.23) 式の $\varPhi$ を (2.26) (2.27) 式を用いて Z を ξ で表し，さらに，(2.32) 式を用いて ξ を η で表すと，

$$\varPhi=\Big(\frac{2CP\nu}{T}\Big)^2\frac{(1-\eta^2)(1-k^2\eta^2)}{(\nu+\eta)^4} \tag{2.38}$$

となる．これに，(2.35) 式の η を代入すると，

$$\varPhi=\Big(\frac{2CP\nu}{T}\Big)^2\frac{\mathrm{cn}^2(t/T)\mathrm{dn}^2(t/T)}{\big(\nu-\mathrm{sn}(t/T)\big)^4} \tag{2.39}$$

となる．したがって，(2.37) 式は，

$$\sqrt{(3C-Z)^2-4D^3/Z}=\Big(\frac{2CP\nu}{T}\Big)\frac{\mathrm{cn}(t/T)\mathrm{dn}(t/T)}{\big(\nu-\mathrm{sn}(t/T)\big)^2Z} \tag{2.40}$$

となる．あとは，(2.36) 式の Z を代入するしか方法はないであろう．結果は，

$$\begin{aligned}X\ \text{ or }\ Y=\frac{3}{2}C-\frac{C}{2\big(\nu-\mathrm{sn}(t/T)\big)}\Big[\big(\cos(\alpha)-\tfrac{1}{2}+P\big)\mathrm{sn}(t/T)-\big(\cos(\alpha)-\tfrac{1}{2}-P\big)\nu\Big]\\ \pm\frac{P\nu}{T}\frac{\mathrm{cn}(t/T)\mathrm{dn}(t/T)}{\big(\nu-\mathrm{sn}(t/T)\big)\Big[\big(\cos(\alpha)-\tfrac{1}{2}+P\big)\mathrm{sn}(t/T)-\big(\cos(\alpha)-\tfrac{1}{2}-P\big)\nu\Big]}\end{aligned} \tag{2.41}$$

と求められる．ここで，右辺最後の項でプラス符号のときは X を，マイナス符号のときは Y を意味するものとする．

これで，X, Y, Z のすべてが求められたが，ここで，1 つの疑問が湧いてくる．それは，Z の解と X, Y の解があまりにも形が異なることである．方程式は X, Y, Z について対称性があるにもかかわらずこの違いはどこから生じるのであろうか．次節で，この (2.36) (2.41) 式に基づいて，グラフ化したものを示すが，このグラフからは，X, Y は Z を左右に平行移動したものになることが見て取れる．より正確に言うと，楕円関数の周期は，第 1 種完全楕円積分を K として，$4K$ なので，この 1/3 を左右にずらしたものが，X, Y になる．式で表すと，

$$X(t)\ \text{ or }\ Y(t)=Z(t\pm 4KT/3) \tag{2.42}$$

である．しかし，この式を，楕円関数の加法定理から証明することはかなり困難である．楕円関数の変数が $4K/3$ のときの値が分かっていないためである．

3　グラフ表示

ここでは，(2.36) (2.41) 式で求めた X, Y, Z の解が時間と共にどのように変化していくかを，数式処理ソフト maxima でグラフ化したものを表示する．本来ならば，積分定数の C, D に適当な値を与えて，グラフ

化すべきだが，結果の式には D が陽に含まれないことから，値を与えるのは，C と α ということにし，以下の図 1，図 2 に，$C=1,\ \alpha=\pi/4$, および，$C=1,\ \alpha=\pi/6$ の場合を表示する．

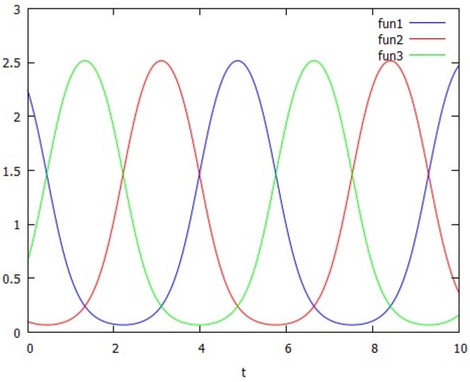

図 1　$C=1,\ \alpha=\pi/4$

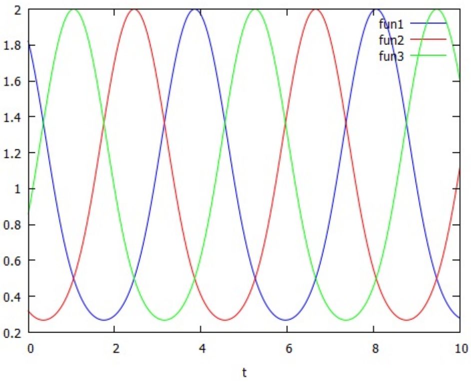

図 2　$C=1,\ \alpha=\pi/6$

これらのグラフで，横軸は時間 t, 縦軸は $X,\ Y,\ Z$ であるが，青，赤，緑の各曲線が，それぞれ，$X,\ Y,\ Z$ に対応する．このグラフで見るかぎり，緑 (Z) を右方向にずらしたものが赤 (Y), さらに右方向にずらしたものが青 (X) となっている．

いずれにしても，これらグラフにおける $X,\ Y,\ Z$ の増減の様子は,「三すくみ」における熾烈な生存競争を如実に表現していると言えるだろう．

4　おわりに

この問題は，初めは，簡単にできるだろうという気持ちで始めたが，途中からだんだん面倒な計算を強いられ，もう諦めようかと何度か思いつつも，maxima のお世話になりながら，なんとかやり通すことができた．方程式自体は簡単なのだが，やはり，3 次式，4 次式を解析し，楕円積分の標準形まで変形する過程はかなり面倒であることを痛感させられた．世の中には，四すくみ，五すくみ，などというものもあるのだろうが，これでは，まったく，歯が立たない状態である．

この原稿を書いた段階で，中西襄先生に見ていただいたところ，$X,\ Y,\ Z$ の対称性を保ちながら解く方法を教えていただいた．次回は，ここで扱ったのと同じ方程式を，中西方式で解いたものを書く予定である．

[謝辞]

今回もこの原稿を書くにあたって，京都大学名誉教授の中西襄先生にご精読いただき，大変有益なコメントをいただきました．ここに，謹んで感謝いたします．

三角関数のパラメータを含む関数の有限級数の和

Finite Sums of Functions of Trigonometric Functions
with One Parameter

中 西　襄 [1]

Noboru NAKANISHI [2]

1　はじめに

筆者の愛用している公式集　森口・宇多川・一松著「数学公式 II　ー級数・フーリエ解析ー」の p.14 に，三角関数の冪乗の有限級数の和を与えるいくつかの公式が掲載されている．これについては「数学・物理通信」5-4, 5-6 (以下それぞれ論文 I, II として引用する）においてその証明と拡張を詳しく考察した．

今回は，上記公式集 p.14 でその次に書かれている 1 パラメータを含む有限級数の和の公式を考察する．まずそれらの公式を引用しておく．ただし，あとでの便宜のため，4 つの公式を並べる順序を変更した．

$$\begin{aligned}
&\sum_{r=0}^{n} \frac{1}{\sin^2 \frac{r\pi}{2n+1} + a^2 \cos^2 \frac{r\pi}{2n+1}} = \frac{2n+1}{2a} \coth((2n+1)\operatorname{arctanh} a) + \frac{1}{2a^2}, \\
&\sum_{r=0}^{n-1} \frac{1}{\sin^2 \frac{(2r+1)\pi}{4n+2} + a^2 \cos^2 \frac{(2r+1)\pi}{4n+2}} = \frac{2n+1}{2a} \tanh((2n+1)\operatorname{arctanh} a) - \frac{1}{2}, \\
&\sum_{r=0}^{n-1} \frac{1}{\sin^2 \frac{r\pi}{2n} + a^2 \cos^2 \frac{r\pi}{2n}} = \frac{n}{a} \coth(2n \operatorname{arctanh} a) - \frac{1}{2}\Big(1 - \frac{1}{a^2}\Big), \\
&\sum_{r=0}^{n-1} \frac{1}{\sin^2 \frac{(2r+1)\pi}{4n} + a^2 \cos^2 \frac{(2r+1)\pi}{4n}} = \frac{n}{a} \tanh(2n \operatorname{arctanh} a).
\end{aligned} \tag{1.1}$$

パラメータ a に関しては，すべて条件 $|a| < 1$ が課されているが，この制限は不要なように思う．

まず次節では，(1.1) をもっと分かり易い形に書き換える．3 節では，論文 I の留数定理を用いる方法でこれらの公式を証明する．制限条件 $|a| < 1$ は用いない．4 節では，論文 I, II で考察した冪乗和の公式との対応関係を明瞭にする．5 節では，これらの冪乗和の母関数を与える．6 節では，ゼータ関数との関係を母関数のレベルで再考する．7 節では，この論文で考察した公式の拡張を考える．最後の節では，感想を述べる．

[1] 京都大学名誉教授
[2] nbr-nak@trio.plala.or.jp

2　公式の整理

統一的に考察するために，(1.1) をすべて和が 1 から n までの式に書き改める [3].

$$\begin{aligned}
\sum_{r=1}^{n}\frac{1}{\sin^2\frac{r\pi}{2n+1}+a^2\cos^2\frac{r\pi}{2n+1}} &= \frac{2n+1}{2a}\coth((2n+1)\operatorname{arctanh}a)-\frac{1}{2a^2},\\
\sum_{r=1}^{n}\frac{1}{\sin^2\frac{(2r-1)\pi}{4n+2}+a^2\cos^2\frac{(2r-1)\pi}{4n+2}} &= \frac{2n+1}{2a}\tanh((2n+1)\operatorname{arctanh}a)-\frac{1}{2},\\
\sum_{r=1}^{n}\frac{1}{\sin^2\frac{r\pi}{2(n+1)}+a^2\cos^2\frac{r\pi}{2(n+1)}} &= \frac{n+1}{a}\coth(2(n+1)\operatorname{arctanh}a)-\frac{1}{2}\Bigl(1+\frac{1}{a^2}\Bigr),\\
\sum_{r=1}^{n}\frac{1}{\sin^2\frac{(2r-1)\pi}{4n}+a^2\cos^2\frac{(2r-1)\pi}{4n}} &= \frac{n}{a}\tanh(2n\operatorname{arctanh}a).
\end{aligned}\tag{2.1}$$

一見すると，右辺は a の超越関数であるかのように見えるが，実は有理関数である（なぜこのような分かりにくい表式を用いたのか理解に苦しむ.）．周知の公式

$$\operatorname{arctanh}x=\frac{1}{2}\log\Bigl(\frac{1+x}{1-x}\Bigr)\tag{2.2}$$

を用いれば,

$$\coth(m\operatorname{arctanh}x)=\frac{(1+x)^m+(1-x)^m}{(1+x)^m-(1-x)^m}\tag{2.3}$$

であるから，(2.1) は

$$\begin{aligned}
S(n;a)&\equiv\sum_{r=1}^{n}\frac{1}{\sin^2\frac{r\pi}{2n+1}+a^2\cos^2\frac{r\pi}{2n+1}}\\
&=\frac{2n+1}{2a}\cdot\frac{(1+a)^{2n+1}+(1-a)^{2n+1}}{(1+a)^{2n+1}-(1-a)^{2n+1}}-\frac{1}{2a^2},\\
\tilde{S}(n;a)&\equiv\sum_{r=1}^{n}\frac{1}{\sin^2\frac{(2r-1)\pi}{2(2n+1)}+a^2\cos^2\frac{(2r-1)\pi}{2(2n+1)}}\\
&=\frac{2n+1}{2a}\cdot\frac{(1+a)^{2n+1}-(1-a)^{2n+1}}{(1+a)^{2n+1}+(1-a)^{2n+1}}-\frac{1}{2},\\
T(n;a)&\equiv\sum_{r=1}^{n}\frac{1}{\sin^2\frac{r\pi}{2(n+1)}+a^2\cos^2\frac{r\pi}{2(n+1)}}\\
&=\frac{n+1}{a}\cdot\frac{(1+a)^{2(n+1)}+(1-a)^{2(n+1)}}{(1+a)^{2(n+1)}-(1-a)^{2(n+1)}}-\frac{1}{2}\Bigl(1+\frac{1}{a^2}\Bigr),\\
U(n;a)&\equiv\sum_{r=1}^{n}\frac{1}{\sin^2\frac{(2r-1)\pi}{4n}+a^2\cos^2\frac{(2r-1)\pi}{4n}}=\frac{n}{a}\cdot\frac{(1+a)^{2n}-(1-a)^{2n}}{(1+a)^{2n}+(1-a)^{2n}}
\end{aligned}\tag{2.4}$$

となる．もちろん，$a^2=1$ ではこれらはすべて n に等しい.

3　公式の証明

(2.4) を証明する.

[3] 第 1 式は両辺から $r=0$ の寄与 $1/a^2$ を差し引いた．第 2 式と第 4 式は $2r+1$ の代わりに $2r-1$ を用いた．第 3 式は n の代わりに $n+1$ を用い，さらに両辺から $r=0$ の寄与 $1/a^2$ を差し引いた.

$a=\pm 1$ の場合はすべて自明であるので，以下 $a^2 \neq 1$ とする．$|a|<1$ というような制限は課さない．以下では a は実数とするが，あとから解析接続で複素数にできる．

まず，分母因子を変形する．

$$\sin^2\theta + a^2\cos^2\theta = \frac{1}{4}(-e^{2i\theta} + 2 - e^{-2i\theta} + a^2 e^{2i\theta} + 2a^2 + a^2 e^{-2i\theta}) \tag{3.1}$$

であるから，$e^{2i\theta}=z$ とおけば，(3.1) は

$$-\frac{1}{4}[(1-a^2)z - 2(1+a^2) + (1-a^2)z^{-1}] = -\frac{1-a^2}{4z}(z-\alpha)(z-\alpha^{-1}) \tag{3.2}$$

と因数分解される．ただし

$$\alpha \equiv \frac{1-a}{1+a} \tag{3.3}$$

と置いた．したがって，$\theta_n(r)$ を $0<2\theta_n(r)<\pi$ であるような r と n の関数とするとき，留数定理により，

$$\begin{aligned}&\sum_{r=1}^{n}\frac{1}{\sin^2\theta_n(r) + a^2\cos^2\theta_n(r)} \\ &\quad = -\frac{4}{1-a^2}\cdot\frac{1}{2\pi i}\Big(\int_C - \int_{C(\alpha)} - \int_{C(\alpha^{-1})}\Big)dz\frac{z}{(z-\alpha)(z-\alpha^{-1})}\sum_{r=1}^{n}\frac{1}{z-e^{2i\theta_n(r)}}\end{aligned} \tag{3.4}$$

と表示できる．ここに積分路 C は，原点を中心とし正方向に廻る半径 $R\,(>\max(|\alpha|,|\alpha^{-1}|)$ の円, $C(\lambda)$ は $z=\lambda$ の周りを正方向に廻る微小円である．$R\to\infty$ とすると，C からの寄与は 0 であることが分かる．(3.4) とその複素共役との和を 2 で割れば,

$$\begin{aligned}\sum_{r=1}^{n}\frac{1}{\sin^2\theta_n(r) + a^2\cos^2\theta_n(r)} &= \frac{2}{1-a^2}\cdot\frac{1}{2\pi i}\Big(\int_{C(\alpha)} + \int_{C(\alpha^{-1})}\Big)dz\frac{zF_n(z)}{(z-\alpha)(z-\alpha^{-1})} \\ &= \frac{2}{1-a^2}\Big(\frac{\alpha F_n(\alpha)}{\alpha-\alpha^{-1}} + \frac{\alpha^{-1}F_n(\alpha^{-1})}{\alpha^{-1}-\alpha}\Big)\end{aligned} \tag{3.5}$$

となる．ただし

$$\begin{aligned}F_n(z) &\equiv \sum_{r=1}^{n}\Big(\frac{1}{z-e^{2i\theta_n(r)}} + \frac{1}{z-e^{-2i\theta_n(r)}}\Big) \\ &= \frac{d}{dz}\log\prod_{r=1}^{n}\Big[(z-e^{2i\theta_n(r)})(z-e^{-2i\theta_n(r)})\Big]\end{aligned} \tag{3.6}$$

と置いた．ここに現れた log の中の積の計算は，$2n$ 個の単位円上の点から成る集合 $I_n \equiv \{e^{2i\theta_n(r)},\, e^{-2i\theta_n(r)} | \, r = 1,2,\cdots,n\}$ が，どのような円分方程式の解のセットになっているかを調べればよい．これはすでに論文 I で考察した．

(1) $S(n;a)$ **の場合**

このときは $\theta_n(r) = r\pi/(2n+1)$ であるから，I_n は方程式 $z^{2n+1}-1=0$ の $z=1$ 以外の解の全体である．したがって,

$$F_n(z) = \frac{d}{dz}\Big(\log\frac{z^{2n+1}-1}{z-1}\Big) = \frac{(2n+1)z^{2n}}{z^{2n+1}-1} - \frac{1}{z-1} \tag{3.7}$$

となる．ゆえに (3.6) から

$$\begin{aligned}S(n;a) &= \frac{2}{(1-a^2)(\alpha-\alpha^{-1})}\Big(\frac{(2n+1)\alpha^{2n+1}}{\alpha^{2n+1}-1} - \frac{\alpha}{\alpha-1} - \frac{(2n+1)\alpha^{-2n-1}}{\alpha^{-2n-1}-1} + \frac{\alpha^{-1}}{\alpha^{-1}-1}\Big) \\ &= \frac{2}{(1-a^2)(\alpha-\alpha^{-1})}\Big(-(2n+1)\frac{1+\alpha^{2n+1}}{1-\alpha^{2n+1}} + \frac{1+\alpha}{1-\alpha}\Big)\end{aligned} \tag{3.8}$$

を計算すればよい．(3.3) の $\alpha = (1-a)/(1+a)$ を代すると，

$$S(n;a) = \frac{2n+1}{2a} \cdot \frac{(1+a)^{2n+1} + (1-a)^{2n+1}}{(1+a)^{2n+1} - (1-a)^{2n+1}} - \frac{1}{2a^2} \tag{3.9}$$

を得る．

(2) $\tilde{S}(n;a)$ **の場合**

このときは $\theta_n(r) = (2r-1)\pi/2(2n+1)$ であるから，I_n は方程式 $z^{2n+1}+1=0$ の $z=-1$ 以外の解の全体である．したがって，

$$F_n(z) = \frac{d}{dz}\Big(\log\frac{z^{2n+1}+1}{z+1}\Big) = \frac{(2n+1)z^{2n}}{z^{2n+1}+1} - \frac{1}{z+1} \tag{3.10}$$

となる．ゆえに (3.6) から

$$\begin{aligned}\tilde{S}(n;a) &= \frac{2}{(1-a^2)(\alpha-\alpha^{-1})}\Big(\frac{(2n+1)\alpha^{2n+1}}{\alpha^{2n+1}+1} - \frac{\alpha}{\alpha+1} - \frac{(2n+1)\alpha^{-2n-1}}{\alpha^{-2n-1}+1} + \frac{\alpha^{-1}}{\alpha^{-1}+1}\Big)\\ &= \frac{2}{(1-a^2)(\alpha-\alpha^{-1})}\Big(-(2n+1)\frac{1-\alpha^{2n+1}}{1+\alpha^{2n+1}} + \frac{1-\alpha}{1+\alpha}\Big)\end{aligned} \tag{3.11}$$

を計算すればよい．(3.3) を代入すれば，

$$\tilde{S}(n;a) = \frac{2n+1}{2a} \cdot \frac{(1+a)^{2n+1} - (1-a)^{2n+1}}{(1+a)^{2n+1} + (1-a)^{2n+1}} - \frac{1}{2} \tag{3.12}$$

を得る．

(3) $T(n;a)$ **の場合**

このときは $\theta_n(r) = r\pi/2(n+1)$ であるから，I_n は方程式 $z^{2(n+1)}-1=0$ の $z=\pm1$ 以外の解の全体である．したがって，

$$F_n(z) = \frac{d}{dz}\Big(\log\frac{z^{2(n+1)}-1}{z^2-1}\Big) = \frac{2(n+1)z^{2n+1}}{z^{2(n+1)}-1} - \frac{2z}{z^2-1} \tag{3.13}$$

となる．ゆえに (3.6) から

$$\begin{aligned}T(n;a) &= \frac{2}{(1-a^2)(\alpha-\alpha^{-1})}\Big(\frac{2(n+1)\alpha^{2(n+1)}}{\alpha^{2(n+1)}-1} - \frac{2\alpha^2}{\alpha^2-1} - \frac{2(n+1)\alpha^{-2(n+1)}}{\alpha^{-2(n+1)}-1} + \frac{2\alpha^{-2}}{\alpha^{-2}-1}\Big)\\ &= \frac{2}{(1-a^2)(\alpha-\alpha^{-1})}\Big(-2(n+1)\frac{1+\alpha^{2(n+1)}}{1-\alpha^{2(n+1)}} + 2\frac{1+\alpha^2}{1-\alpha^2}\Big)\end{aligned} \tag{3.14}$$

を計算すればよい．(3.3) を代入すれば，

$$T(n;a) = \frac{n+1}{a} \cdot \frac{(1+a)^{2(n+1)} + (1-a)^{2(n+1)}}{(1+a)^{2(n+1)} - (1-a)^{2(n+1)}} - \frac{1}{2}\Big(1+\frac{1}{a^2}\Big) \tag{3.15}$$

を得る．

(4) $U(n;a)$ **の場合**

このときは $\theta_n(r) = (2r-1)\pi/4n$ であるから，I_n は方程式 $z^{2n}+1=0$ の解の全体である．したがって，

$$F_n(z) = \frac{d}{dz}\log(z^{2n}+1) = \frac{2nz^{2n-1}}{z^{2n}+1} \tag{3.16}$$

となる．ゆえに (3.6) から

$$\begin{aligned}U(n;a) &= \frac{2}{(1-a^2)(\alpha-\alpha^{-1})}\Big(\frac{2n\alpha^{2n}}{\alpha^{2n}+1} - \frac{2n\alpha^{-2n}}{\alpha^{-2n}+1}\Big)\\ &= \frac{2}{(1-a^2)(\alpha-\alpha^{-1})}(-2n)\frac{1-\alpha^{2n}}{1+\alpha^{2n}}\end{aligned} \tag{3.17}$$

を計算すればよい．(3.3) を代入すれば，

$$U(n;a) = \frac{n}{a} \cdot \frac{(1+a)^{2n} - (1-a)^{2n}}{(1+a)^{2n} + (1-a)^{2n}} \tag{3.18}$$

を得る．（証明終）

4 cot の冪乗和との関係

論文 I, II で考察した三角関数（cot または tan）の冪乗の有限和は，

$$\begin{aligned}
S_k(n) &\equiv \sum_{r=1}^{n} \cot^{2k}\left(\frac{r\pi}{2n+1}\right) = \sum_{r=1}^{n} \tan^{2k}\left(\frac{(2r-1)\pi}{2(2n+1)}\right), \\
\tilde{S}_k(n) &\equiv \sum_{r=1}^{n} \tan^{2k}\left(\frac{r\pi}{2n+1}\right) = \sum_{r=1}^{n} \cot^{2k}\left(\frac{(2r-1)\pi}{2(2n+1)}\right), \\
T_k(n) &\equiv \sum_{r=1}^{n} \cot^{2k}\left(\frac{r\pi}{2(n+1)}\right) = \sum_{r=1}^{n} \tan^{2k}\left(\frac{r\pi}{2(n+1)}\right), \\
U_k(n) &\equiv \sum_{r=1}^{n} \cot^{2k}\left(\frac{(2r-1)\pi}{4n}\right) = \sum_{r=1}^{n} \tan^{2k}\left(\frac{(2r-1)\pi}{4n}\right)
\end{aligned} \tag{4.1}$$

であった．これらと，今回考えている三角関数のパラメータ a を含む関数の有限和 (2.4) とは，密接な関係がある．

後者の定義式に現れる関数を，次のように a^2 について冪展開する．

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\sin^2\theta + a^2\cos^2\theta} &= \frac{1}{\sin^2\theta} \cdot \frac{1}{1 + a^2\cot^2\theta} \\
&= (1+\cot^2\theta)\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k a^{2k}\cot^{2k}\theta \\
&= \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k a^{2k}(\cot^{2k}\theta + \cot^{2(k+1)}\theta).
\end{aligned} \tag{4.2}$$

これを用いると，

$$\begin{aligned}
S(n;a) &= \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k a^{2k}[S_k(n) + S_{k+1}(n)], \\
\tilde{S}(n;a) &= \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k a^{2k}[\tilde{S}_k(n) + \tilde{S}_{k+1}(n)], \\
T(n;a) &= \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k a^{2k}[T_k(n) + T_{k+1}(n)], \\
U(n;a) &= \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k a^{2k}[U_k(n) + U_{k+1}(n)]
\end{aligned} \tag{4.3}$$

のように書けることがわかる．これらの冪級数の a^2 についての収束半径は $\tan^2(\theta_n(1))$ で，n に依存して小さくはなるが，0 にはならない．

数式処理のソフト Maxima を使えば a^2 の冪展開の係数を容易に計算できる．

$S(n;a)$ の展開係数：

$$\begin{aligned}
[a^0\text{の係数}] &= 2n(n+1)/3,\\
-[a^2\text{の係数}] &= 2n(n+1)(2n-1)(2n+3)/45,\\
[a^4\text{の係数}] &= 2n(n+1)(2n-1)(2n+3)(8n^2+8n-9)/945,\\
-[a^6\text{の係数}] &= 2n(n+1)(2n-1)(2n+3)(48n^4+96n^3-68n^2-116n+75)/14175,\\
[a^8\text{の係数}] &= 2n(n+1)(2n-1)(2n+3)(640n^6+1920n^5-496n^4-4192n^3\\
&\qquad +836n^2+3252n-1575)/467775.
\end{aligned} \tag{4.4}$$

$\tilde{S}(n;a)$ の展開係数：

$$\begin{aligned}
[a^0\text{の係数}] &= 2n(n+1),\\
-[a^2\text{の係数}] &= 2n(n+1)(2n+1)^2/3,\\
[a^4\text{の係数}] &= 2n(n+1)(2n+1)^2(8n^2+8n-1)/15,\\
-[a^6\text{の係数}] &= 2n(n+1)(2n+1)^2(272n^4+544n^3+196n^2-76n+9)/315,\\
[a^8\text{の係数}] &= 2n(n+1)(2n+1)^2(3968n^6+11904n^5+10160n^4+480n^3\\
&\qquad -1348n^2+396n-45)/2835.
\end{aligned} \tag{4.5}$$

$T(n;a)$ の展開係数：

$$\begin{aligned}
[a^0\text{の係数}] &= 2n(n+2)/3,\\
-[a^2\text{の係数}] &= 2n(n+2)(2n+1)(2n+3)/45,\\
[a^4\text{の係数}] &= 2n(n+2)(2n+1)(2n+3)(8n^2+16n-3)/945,\\
-[a^6\text{の係数}] &= 2n(n+2)(2n+1)(2n+3)(48n^4+192n^3+148n^2-88n+15)/14175,\\
[a^8\text{の係数}] &= 2n(n+2)(2n+1)(2n+3)(640n^6+3840n^5+6704n^4+1216n^3\\
&\qquad -3196n^2+1416n-225)/467775.
\end{aligned} \tag{4.6}$$

$U(n;a)$ の展開係数：

$$\begin{aligned}
[a^0\text{の係数}] &= 2n^2,\\
-[a^2\text{の係数}] &= 2n^2(4n^2-1)/3,\\
[a^4\text{の係数}] &= 2n^2(4n^2-1)(8n^2-3)/15,\\
-[a^6\text{の係数}] &= 2n^2(4n^2-1)(272n^4-212n^2+45)/315,\\
[a^8\text{の係数}] &= 2n^2(4n^2-1)(3968n^6-4720n^4+2012n^2-315)/2835.
\end{aligned} \tag{4.7}$$

$U(n;a)$ は n の偶関数なので，n の奇数冪は現れない．

以上のいずれの冪展開においても，$k \geqq 1$ に対しては，n の 4 つの 1 次式が共通因子として現れている．

論文 II で指摘したように，三角関数の冪乗の有限和の間には次の相互関係があった（k は正の整数）[4]．

$$\begin{aligned}
T_k(n) &= S_k(n+\tfrac{1}{2}),\\
U_k(n) &= \tilde{S}_k(n-\tfrac{1}{2}),\\
T_k(n) &= S_k(\tfrac{1}{2}n)+\tilde{S}_k(\tfrac{1}{2}n).
\end{aligned} \tag{4.8}$$

[4]級数の定義式についてではなく，和の結果式についての恒等式である．

したがって，(4.3) からわかるように，

$$\begin{aligned}T(n;a) &= S(n+\tfrac{1}{2};a) - \tfrac{1}{2},\\ U(n;a) &= \tilde{S}(n-\tfrac{1}{2};a) + \tfrac{1}{2},\\ T(n;a) &= S(\tfrac{1}{2}n;a) + \tilde{S}(\tfrac{1}{2}n;a)\end{aligned} \tag{4.9}$$

が成立することになる．(4.9) の第 1 式，第 2 式の定数項は，$k=0$ のところからの寄与による補正である．これらの関係式が成立していることは，展開に頼らずに直接公式 (2.4) の右辺を比較しても確かめられる．第 3 式については，(3.7)，(3.10)，(3.13) の比較からも分かる．

5 母関数

前節でみたように，$S(n;a)$ などは実質的に冪乗和の母関数になっているが，正確な意味での母関数にはなっていない．正確な意味での母関数は

$$\Phi_S(n;x) \equiv \sum_{k=0}^{\infty} S_k(n) x^k \tag{5.1}$$

のように定義される．したがって，(4.3) から

$$S(n,a) = \Phi_S(n;-a^2) + \frac{\Phi_S(n;-a^2) - S_0(n)}{-a^2} \tag{5.2}$$

である．これを Φ_S について解くと，

$$\Phi_S(n;-a^2) = \frac{n - a^2 S(n;a)}{1-a^2} \tag{5.3}$$

のように表されることがわかる．(2.4) を代入して (5.3) を計算すれば，

$$\Phi_S(n;-a^2) = \frac{2n+1}{2} \cdot \frac{(1+a)^{2n} - (1-a)^{2n}}{(1+a)^{2n+1} - (1-a)^{2n+1}} \tag{5.4}$$

を得る．同様にして，他の冪乗和の母関数は，

$$\begin{aligned}\Phi_{\tilde{S}}(n;-a^2) &= \frac{2n+1}{2} \cdot \frac{(1+a)^{2n} + (1-a)^{2n}}{(1+a)^{2n+1} + (1-a)^{2n+1}} - \frac{1}{2},\\ \Phi_T(n;-a^2) &= (n+1) \cdot \frac{(1+a)^{2n+1} - (1-a)^{2n+1}}{(1+a)^{2n+2} - (1-a)^{2n+2}} - \frac{1}{2},\\ \Phi_U(n;-a^2) &= n \cdot \frac{(1+a)^{2n-1} + (1-a)^{2n-1}}{(1+a)^{2n} + (1-a)^{2n}}\end{aligned} \tag{5.5}$$

となる．これらを a^2 の冪級数に展開すれば，次のようになる．

$\Phi_S(n;-a^2)$ の展開係数：

$$\begin{aligned}[a^0\text{の係数}] &= n,\\ -[a^2\text{の係数}] &= n(2n-1)/3,\\ [a^4\text{の係数}] &= n(2n-1)(4n^2+10n-9)/45,\\ -[a^6\text{の係数}] &= n(2n-1)(32n^4+112n^3+8n^2-252n+135)/945,\\ [a^8\text{の係数}] &= n(2n-1)(192n^6+864n^5+496n^4-2248n^3-1388n^2+3834n-1575)/14175.\end{aligned} \tag{5.6}$$

$\Phi_{\tilde{S}}(n;-a^2)$ の展開係数：

$$\begin{aligned}
[a^0\text{の係数}] &= n,\\
-[a^2\text{の係数}] &= n(2n+1),\\
[a^4\text{の係数}] &= n(2n+1)(4n^2+6n-1)/3,\\
-[a^6\text{の係数}] &= n(2n+1)(32n^4+80n^3+40n^2-20n+3)/15,\\
[a^8\text{の係数}] &= n(2n+1)(1088n^6+3808n^5+3920n^4+280n^3-868n^2+322n-45)/315.
\end{aligned} \tag{5.7}$$

$\Phi_T(n;-a^2)$ の展開係数：

$$\begin{aligned}
[a^0\text{の係数}] &= n,\\
-[a^2\text{の係数}] &= n(2n+1)/3,\\
[a^4\text{の係数}] &= n(2n+1)(4n^2+14n-3)/45,\\
-[a^6\text{の係数}] &= n(2n+1)(32n^4+176n^3+224n^2-144n+27)/945,\\
[a^8\text{の係数}] &= n(2n+1)(192n^6+1440n^5+3376n^4+1384n^3-2756n^2+1314n-225)/14175.
\end{aligned} \tag{5.8}$$

$\Phi_U(n;-a^2)$ の展開係数：

$$\begin{aligned}
[a^0\text{の係数}] &= n,\\
-[a^2\text{の係数}] &= n(2n-1),\\
[a^4\text{の係数}] &= n(2n-1)(4n^2+2n-3)/3,\\
-[a^6\text{の係数}] &= n(2n-1)(32n^4+16n^3-32n^2-16n+15)/15,\\
[a^8\text{の係数}] &= n(2n-1)(1088n^6+544n^5-1520n^4-760n^3+852n^2+426n-315)/315.
\end{aligned} \tag{5.9}$$

(4.1) の $k=1,2,3,4$ に対する和公式は論文 II に与えた．これらはそれぞれ，(5.6)-(5.9) の $(-a^2)^k$ $(k=1,2,3,4)$ の展開係数に一致しており，(5.4)，(5.5) は確かに母関数になっている．

6 ゼータ関数との関係

論文 I で

$$\left(\frac{\pi}{2}\right)^{2k}\lim_{n\to\infty}\frac{S_k(n)}{n^{2k}} = \zeta(2k) \equiv \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{2k}} \tag{6.1}$$

であることを指摘した（k は自然数）．ゼータ関数の特殊値 $\zeta(2k)$ は，ベルヌーイ数を B_m とするとき，

$$\zeta(2k) = (-1)^{k+1}\frac{(2\pi)^{2k}}{2(2k)!}B_{2k} \tag{6.2}$$

と書けることが知られている．ところで，ベルヌーイ数は母関数が存在して，

$$x\coth x = 1+\sum_{k=1}^{\infty}2^{2k}B_{2k}\frac{x^{2k}}{(2k)!} \tag{6.3}$$

と表される．他方，(5.3) に与えたように，$S_k(n)$ の母関数は

$$\frac{n-a^2S(n;a)}{1-a^2} = \sum_{k=0}^{\infty}S_k(n)(-a^2)^k \tag{6.4}$$

である．そして (2.1) の第 1 式から，

$$S(n;a)=\frac{2n+1}{2a}\coth((2n+1)\operatorname{arctanh}a)-\frac{1}{2a^2} \tag{6.5}$$

である．これらから，ゼータ関数とベルヌーイ数との関係 (6.2) が，母関数のレベルで導けることを見ておこう．

$a=\pi x/(2n+1)$ とおいて，$n\to\infty$ の極限を考察する [5]．(6.4) の左辺の分母は $n\to\infty$ で 1，分子の n は定数項なので捨てると，母関数は

$$-\Big(\frac{\pi x}{2n+1}\Big)^2 S\Big(n;\frac{\pi x}{2n+1}\Big)=-\frac{\pi x}{2}\coth\Big((2n+1)\operatorname{arctanh}\frac{\pi x}{2n+1}\Big)+\frac{1}{2} \tag{6.6}$$

に置き換えてよい．この $n\to\infty$ の極限は，(6.1) と (6.3) により，

$$\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k\zeta(2k)x^{2k}=-\frac{\pi x}{2}\coth(\pi x)+\frac{1}{2}=-\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(2\pi)^{2k}}{2(2k)!}B_{2k}x^{2k} \tag{6.7}$$

となって，確かに $\zeta(2k)$ とベルヌーイ数 B_{2k} との関係 (6.2) を母関数のレベルで与えている．

もちろんこの式は，三角関数の関数の有限和を経ないでも直接に証明できる．cot の部分分数展開式 [6]

$$\pi\cot(\pi y)-\frac{1}{y}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{-2y}{n^2-y^2} \tag{6.8}$$

の両辺に $-y/2$ を乗じて，$y=ix$ とおけば，

$$-\frac{\pi x}{2}\coth(\pi x)+\frac{1}{2}=-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^2}{n^2+x^2} \tag{6.9}$$

を得る．他方，$\zeta(2k)$ の定義式により，

$$\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k\zeta(2k)x^{2k}=\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k\Big(\frac{x^2}{n^2}\Big)^k=-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^2}{n^2+x^2} \tag{6.10}$$

右辺の級数は同じだから，左辺は相等しい．

7 公式の拡張

公式 (2.4) を，分母因子を冪乗した場合に拡張することを考えよう．たとえば，$S(n;a)$ の拡張として，

$$S_k(n;a)\equiv\sum_{r=1}^{n}\frac{1}{(\sin^2\frac{r\pi}{2n+1}+a^2\cos^2\frac{r\pi}{2n+1})^k} \tag{7.1}$$

を考える．もちろん $S_1(n;a)\equiv S(n;a)$ である．$\tilde{S}_k(n;a)$，$T_k(n;a)$，$U_k(n;a)$ も同様に定義する．これらの級数の和は，計算を改めてやり直さなくても求められる．

a に関する線形微分演算子

$$D_k\equiv\frac{1}{2k}\Big(a-\frac{1}{a}\Big)\frac{\partial}{\partial a}+1 \tag{7.2}$$

を導入する．そうすると，恒等式

$$D_k\frac{1}{(\sin^2\theta+a^2\cos^2\theta)^k}=\frac{1}{(\sin^2\theta+a^2\cos^2\theta)^{k+1}} \tag{7.3}$$

[5] この極限では $2n$ も $2n+1$ も同じことである．
[6] 留数定理を使って証明できる．また $\sin(\pi y)/(\pi y)$ の無限乗積表示を対数微分しても得られる．

が成立するので，

$$S_k(n;a) = D_{k-1}D_{k-2}\cdots D_1 S(n;a) \tag{7.4}$$

となる．$\tilde{S}_k(n;a)$，$T_k(n;a)$，$U_k(n;a)$ についても同様である．

明らかに $D_k 1 = 1$ なので，相互関係式 (4.9) はこの場合にも拡張される．

$$\begin{aligned} T_k(n;a) &= S_k(n+\tfrac{1}{2};a) - \tfrac{1}{2}, \\ U_k(n;a) &= \tilde{S}_k(n-\tfrac{1}{2};a) + \tfrac{1}{2}, \\ T_k(n;a) &= S_k(\tfrac{1}{2}n;a) + \tilde{S}_k(\tfrac{1}{2}n;a). \end{aligned} \tag{7.5}$$

具体的な表式としては，たとえば

$$U_2(n;a) = \left[\frac{1}{2}\left(a - \frac{1}{a}\right)\frac{\partial}{\partial a} + 1\right]U(n;a) \tag{7.6}$$

を計算してみよう．

$$g(a) \equiv \frac{(1+a)^{2n} - (1-a)^{2n}}{(1+a)^{2n} + (1-a)^{2n}} \tag{7.7}$$

と置くと，

$$U_2(n;a) = \frac{n}{2a^3}[(1+a^2)g(a) - a(1-a^2)g'(a)] \tag{7.8}$$

となる．ここに $g'(a)$ は $g(a)$ の微分で，

$$g'(a) = \frac{8n(1-a^2)^{2n-1}}{[(1+a)^{2n} + (1-a)^{2n}]^2} \tag{7.9}$$

である．(7.7) と (7.9) を (7.8) に代入して計算すれば，

$$U_2(n;a) = \frac{n\{(1+a^2)[(1+a)^{4n} - (1-a)^{4n}] - 8na(1-a^2)^{2n}\}}{2a^3[(1+a)^{2n} + (1-a)^{2n}]^2} \tag{7.10}$$

を得る [7]．

念のため，特殊値をいれて (7.10) をチェックしておこう．$U_2(n;1) = n$ は明らかだから，$U_2(n;0)$ を考察する．(7.10) の右辺は $a = 0$ で不定形になるから，$a \to 0$ の極限値を計算すると，

$$\lim_{a\to 0} \frac{n\{(1+a^2)[(1+a)^{4n} - (1-a)^{4n}] - 8na(1-a^2)^{2n}\}}{2a^3[(1+a)^{2n} + (1-a)^{2n}]^2} = \frac{4}{3}n^2(2n^2+1) \tag{7.11}$$

となる．他方 $\csc^4\theta = 1 + 2\cot^2\theta + \cot^4\theta$ であるから [8]，

$$\begin{aligned} U_2(n;0) &= U_0(n) + 2U_1(n) + U_2(n) \\ &= n + 2\cdot n(2n-1) + \frac{1}{3}n(2n-1)(4n^2+2n-3) \\ &= \frac{4}{3}n^2(2n^2+1) \end{aligned} \tag{7.12}$$

となる．確かに (7.11) と (7.12) は一致している．

[7] Maxima では (7.10) のような形のまとめ方をするのは難しい．
[8] (5.9) 参照

8　おわりに

はじめに掲げた公式集の公式 (1.1) の形は，どのようにして導かれたのだろうか．逆双曲線関数が使われたり，制限条件 $|a| < 1$（これは $\operatorname{arctanh} a$ が実数でないと困ると考えたからだろう）がついていたりするから，この論文で与えた証明法とは異なるのは明らかである．各項が a^2 の有理関数なのだから，それの有限和は a^2 の有理関数であるのにきまっている．したがって分母のゼロ点を除外する以外に制限条件が出るはずはない．公式集の公式 (1.1) を導いた人は，そんな当たり前のことを意識していなかったのだろうか．また，冪乗和の公式との関連についても気づいていないようである．

3 節でみたように，連続量であるパラメータ a を含んだ公式 (2.4) の方が，論文 I, II で考えた冪乗の有限和 (4.1) に対する公式よりも証明が簡単である．しかも 5 節で与えたように，後者の母関数が分かったということは，(4.1) に対する一般的な答えが求まったということを意味する．そして特定の冪乗の場合の具体的な式を書き下すのも，Maxima を使えば至極簡単にやれる．また，7 節で考えたように，(2.4) はパラメータ a に関する微分や積分を考えることが可能で，級数の形をいろいろ変形し拡張することができる．

それにしても，S，$\tilde{S}$，T，U を生み出す 4 つの $\theta_n(r)$ の特別な取り方があり，対応する有限級数の間に (4.9) のような不思議な 3 つの関係式が成立するのは，まことに興味深い．特別な取り方の存在は，3 節での考察から明らかなように，解が $e^{\pm 2i\theta_n(r)}$ (ただし，$\theta_n(r)$ は r の 1 次関数) と表され，かつ実数解を持たないような $2n$ 次実係数代数方程式として，

$$\frac{z^{2n+1}-1}{z-1} = \sum_{r=0}^{2n} z^r = 0, \tag{8.1}$$

$$\frac{z^{2n+1}+1}{z+1} = \sum_{r=0}^{2n} (-1)^r z^r = 0, \tag{8.2}$$

$$\frac{z^{2n+2}-1}{z^2-1} = \sum_{r=0}^{n} z^{2r} = 0, \tag{8.3}$$

$$z^{2n}+1 = 0 \tag{8.4}$$

の 4 つがあることに対応している．また，(4.9) の相互関係式の 3 つはそれぞれ，(8.1) の左辺の分子と (8.3) の左辺の分子との関係，(8.2) の左辺の分子と (8.4) の左辺との関係，(8.1) と (8.2) の積と (8.3) との関係に対応している．

2次式と平方完成

矢野　忠 [1]

Quadratic Expressions and Completion of Square

Tadashi YANO[2]

1　はじめに

先日，雑誌『数理科学』 [1] を見ていたら，カルダノ (Cardano) 変換 [3] が 2 次式の場合には平方完成にあたると書いてあったので，一つの話題としておもしろいと思った．さらに武藤　徹先生の三省堂のテキスト [4] をとりだして読んでいたら，この平方完成というか，2 次方程式の解の公式のつくり方がちょっと興味深く覚えた．それでこのエッセイではこれらの話題にプラスして平方完成を文字タイルで表すことも含めて説明をしたい．

平方完成は 2 次方程式の解を求める方法でもあるし，また 2 次関数の標準形（または基本形ともいう）を求める方法でもある．

歳をとってくると記憶していたはずの 2 次方程式の解の公式ですら，その記憶が定かではなくなって，その公式を書き下すのが難しくなってくる．しかし，それを導いた方法までも忘れるということはまだない．

その後，瀬山さんの『読む数学』 [6] を見たら，連立方程式として 2 次方程式の解を求める方法が載っていた．これも目新しいのでここに載せた．ちょっと平方完成から話題が外れるが，2 次方程式の解の公式との関連がある．

2　伝統的な平方完成

2 次式の伝統的な平方完成のしかたはどうであったか．まず

$$\begin{aligned} ax^2+bx+c &= a\left(x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}\right) \\ &= a(x^2+px+q), \quad p=\frac{b}{a}, \quad q=\frac{c}{a} \end{aligned}$$

と変形する．

ここで，2 次式 x^2+px+q を考えよう．

$$\begin{aligned} x^2+px+q &= x^2+2\left(\frac{p}{2}\right)x+\left(\frac{p}{2}\right)^2-\left(\frac{p}{2}\right)^2+q \\ &= \left(x+\frac{p}{2}\right)^2-\frac{p^2}{4}+q \\ &= \left(x+\frac{p}{2}\right)^2-\frac{p^2-4q}{4} \end{aligned} \tag{2.1}$$

この平方完成の過程を (2.1) について $+q$ の項を除いて文字タイルで図 1 に表しておこう．x^2+px では正方形にするには $(\frac{p}{2})^2$ の小さい正方形分だけ面積がたらないのでそれをたす．もっともその部分はもともと存在しないものであるから，大きな正方形からたした小さな正方形の面積を引き算をしておかなくては等号が成り立たない．図はそのことを表している．

[1] 元愛媛大学

[2] yanotad@earth.ocn.ne.jp

[3] 数学史上ではこの変換はチルンハウス (Tschirnhaus)（またはチルンハウゼン (Tschirnhausen)）変換と呼ばれている [2] [3]．年代的にはカルダノ (1501-1576) が先であり，チルンハウス (1651-1708) が後だが，チルンハウスは一般の 5 次方程式が $x^5+ax+b=0$ と表されることを証明したという．

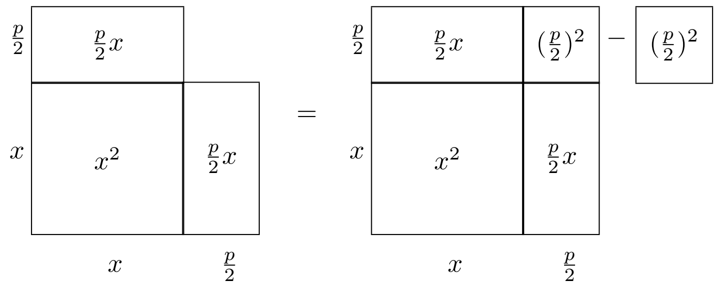

図 1: $x^2 + px + q$ の平方完成

もし 2 次関数 $y = ax^2 + bx + c$ を考えているならば，これから 2 次関数の標準形

$$y = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a} \tag{2.2}$$

が得られる．

また 2 次方程式 $ax^2 + bx + c = 0$ を考えているならば，解の公式

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a}, \quad D = b^2 - 4ac \tag{2.3}$$

が直ちに得られる．

3 武藤の平方完成

前節でみた 2 次方程式の解の公式から逆にたどってみよう．解の公式 (2.3) の分母の $2a$ を払って，右辺にある b を左辺に移項すれば，

$$2ax + b = \pm\sqrt{D}$$

が得られる．この両辺を 2 乗すれば，

$$(2ax + b)^2 = D$$

となる．$D = b^2 - 4ac$ であったから，この $4ac$ を左辺に移項すれば，

$$(2ax + b)^2 + 4ac = b^2$$

となる．これは

$$4a^2x^2 + 4abx + 4ac + b^2 = b^2 \tag{3.1}$$

となるが，これは元の 2 次方程式に $4a$ をかけて，その両辺に b^2 を加えれば得られる．

こうして，元の 2 次方程式に $4a$ をかけるというアイディアが生まれる．

$4a^2x^2 + 4abx$ が平方完成となるために，2 次方程式の両辺に b^2 を加えればよい．それはもともと存在しないものだから加えた分だけ引き算をしておく必要がある．このことを図 2 に示す．

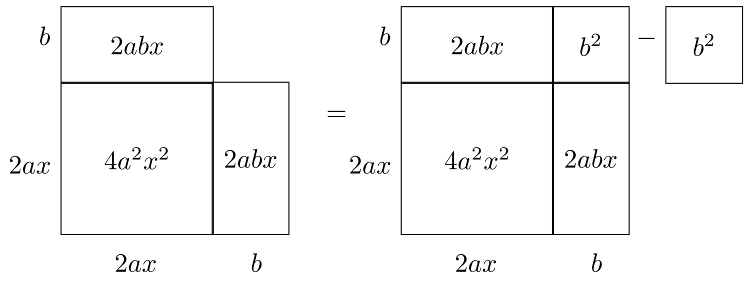

図 2: $4a^2x^2 + 4abx + 4ac$ の平方完成

4　カルダノ変換による平方完成

カルダノ変換とはもともと 3 次方程式の 2 次の項を消去する変換をいう．2 次方程式では 1 次の項を消去する変換である [4]．具体的に見て行こう．

$$ax^2 + bx + c = 0$$

で $x = t + e$ とおけば

$$\begin{aligned} a(t+e)^2 + b(t+e) + c &= 0 \\ at^2 + (2ae+b)t + (ae^2 + be + c) &= 0 \end{aligned}$$

となる．いま $2ae + b = 0$ と選べば x の 1 次の項を消去できて

$$at^2 + (ae^2 + be + c) = 0$$

となる．

$$2ae + b = 0$$

から e を求めれば

$$e = -\frac{b}{2a}$$

となる．したがって

$$ae^2 + be + c = -\frac{b^2 - 4ac}{4a}$$

であるから

$$\begin{aligned} at^2 &= \frac{b^2 - 4ac}{4a} \\ t^2 &= \frac{b^2 - 4ac}{4a^2} \\ t &= \pm\frac{\sqrt{D}}{2a}, \quad D = b^2 - 4ac \end{aligned}$$

となる．したがって求める 2 次方程式の解 x は

$$x = t + e = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a}$$

[4] [5] のチルンハウス変換の項にこの変換による 2 次式の平方完成についての言及がある．

が得られる．

また，カルダノ変換によって 2 次関数は

$$y = at^2 + (ae^2 + be + c)$$

となる．ここで，$t = x - e = x + \frac{b}{2a}$，$ae^2 + be + c = -\frac{D}{4a}$ であるから，(2.2) と同じ

$$y = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{D}{4a}$$

が得られる．

5 連立方程式の解として

2 次方程式の解を連立方程式から求める，つぎのような方法が『読む数学』 [6] に載っていた．

いま 2 次方程式 $ax^2 + bx + c = 0$ の 2 つの解を α, β とすれば，

$$ax^2 + bx + c = a(x - \alpha)(x - \beta)$$

が成り立つ．したがって，つぎの根と係数の関係が成り立つ．

$$\alpha + \beta = -\frac{b}{a}$$
$$\alpha\beta = \frac{c}{a}$$

ところで 2 つの解 α, β からつくられる対称式は基本対称式

$$\alpha + \beta,\quad \alpha\beta$$

で表せるから，$(\alpha - \beta)^2$ もこの基本対称式で表せる．もちろん $(\alpha - \beta)^2$ が α, β の対称式であることは α と β とを交換してもかわらないことからすぐにわかる．

$$\begin{aligned}(\alpha - \beta)^2 &= (\alpha + \beta)^2 - 4\alpha\beta \\ &= \left(-\frac{b}{a}\right)^2 - 4\frac{c}{a} \\ &= \frac{D}{a^2},\quad D = b^2 - 4ac\end{aligned}$$

と表せるから

$$\alpha - \beta = \frac{\sqrt{D}}{a}$$

ここで平方根をとるときに正と負の符号の両方があるが，正の方をとった [5]．

これで 2 つの解 α, β の解を求める連立方程式が得られたことになる．

$$\alpha + \beta = -\frac{b}{a}$$
$$\alpha - \beta = \frac{\sqrt{D}}{a}$$

これを α, β について解けば，

$$\alpha = \frac{-b + \sqrt{D}}{2a}$$
$$\beta = \frac{-b - \sqrt{D}}{2a}$$

が得られる．

[5] 負の符号の方をとればどうなるのかは補遺で調べる．結果を先取りして言えば，解の集合としては結果は変わらない．

6　おわりに

平方完成は 2 次関数の標準形への変形とか 2 次方程式の解の公式を求めるときに使われる．それだから高校で数学を学んだ人なら誰でも知っている．

もっとも数学に日常的に触れていない人はすでに忘れてしまったかもしれない．だが，話を聞けばすぐにそうだったと思い出す類のことである．難しいことはあまりない．だが，それでもここで述べたことはあまり聞いたことがない種類の話もあったかもしれない．

なんでも多くの見方ができることが理解の奥行きを深めると思っている．

7　補遺

いま $(\alpha-\beta)^2$ の平方根をとったときに正の平方根をとったが，もし負の平方根をとればどうなるだろうか．それを考えてみよう．

すなわち，

$$\alpha-\beta=-\frac{\sqrt{D}}{a}$$

をとれば，連立方程式は

$$\begin{aligned}\alpha+\beta&=-\frac{b}{a}\\ \alpha-\beta&=-\frac{\sqrt{D}}{a}\end{aligned}$$

となる．このとき α,β は

$$\begin{aligned}\alpha&=\frac{-b-\sqrt{D}}{2a}\\ \beta&=\frac{-b+\sqrt{D}}{2a}\end{aligned}$$

が得られる．

結局のところ α,β の値が正の符号を採用したときと比べて入れ替わっているだけである．正の符号をとるか負の符号をとるかのあいまいさをなくしたいと思えば，たとえば $\alpha\geq\beta$ または $\alpha\leq\beta$ の仮定を前もって入れておけばよい．

(2015.4.18)

参考文献

[1] 木村俊一，代数方程式の天才たち,『数理科学』(2015.4) 15-21

[2] 小島寛之,『天才ガロアの発想力』（技術評論社，2010）142

[3] 青本和彦　他編,『岩波　数学入門辞典』（岩波書店，2005）414

[4] 武藤　徹,『数学読本』I（三省堂，1998）43

[5] http://www004.upp.so-net.ne.jp/s_honma/polynomial/tschirnhaus.htm

[6] 瀬山士郎,『読む数学』（ベレ出版，2006）55-56

編集後記

この号（5 巻 9 号）の編集後記は新関さんにお願いをしていたのだが，彼の突然の検査入院で私が書くことになった.

同時発行する 5 巻 10 号までの既刊の号数を数えてみると，通巻で 43 号の発行となる．いまのところ 5 巻 11 号も年内発行を予定している．そういうことから推測すると来年中には通巻で 50 号を発行を達成することができるであろう．これがいつになるかはわからないが，順調にいけば，2016 年 9 月に達成する見込みである.

通巻 50 号は記念誌として特別編集で発行したいと考えている．これはもちろん先のことではあるから，予定はしていても現実にはどうなるかはわからないが，投稿者にも読者にもいまから一言の感想やメッセージをお寄せ下さることをお願いをしておきたい.

（矢野　忠）