数学・物理通信

6巻5号　　2016年6月

通巻50号記念

編集　新関章三・矢野　忠

2016年6月6日

目次

Contents

グラフ理論的代数学事始め

Beginning of Graph-Theoretical Algebra

中西　襄 *1
Noboru NAKANISHI *2

1　「数学・物理通信」通巻 50 号祝詞

「数学・物理通信」が今号で通巻 50 号になるとのことだ．第 1 巻第 1 号からの寄稿者として，編集者の方々に今までのご苦労に謝するとともに，まずはお慶びを申し上げたい．

私が矢野忠氏のブログを知ったのは，湯川先生の「1956 年木崎夏の学校」講師キャンセルの件に関する記載（2008 年 9 月）であった．その後彼のブログを見ることが多くなり，そこで「数学・物理通信」というサーキュラーの発行計画を知った．彼の意図したところとは少し違っていたかも知れないが，私がポスドク時代に考えたファインマン・ダイアグラムに関するグラフ理論的不等式の未解決予想の話を寄稿させていただいた．そしてその後現在に至るまで，数理物理学関連のエッセイを多数載せさせていただいている．私はここ 10 年下肢が不自由であまり外出できなくなり，自宅でアマチュア的数学の研究をすることが多くなった．その結果をまとめて，レフェリーにうるさいことを言われずに，こうして発表できるのはありがたいことである．

今回は記念号ということなので，それに甘えて，中身なしの大風呂敷を広げさせていただくことにした．

2　思考の線形順序性

人間の思考は，通常時間経過とともに線形順序に従ってなされる．聖徳太子のような伝説上の人物のことはさておき，普通の人間は一つのときに一つのことしか処理できない．昔はコンピュータもそうだったが，今は並列処理が普及しているから，同時にいくつものことが処理できる．しかし，人間様が理解するのはやはり線形順序に従うので，文章は線形順序に書かれる．（ただし「行替え」という大発明がなされる以前は，長い文章を書くのは大変だった [*3].）数式も元は文章の一部分だったものだから，線形順序に従って書かれる．もちろん思考を途中で止めて先に処理しなければならない事態が起こるから，それは括弧を導入して表示してきたのであった．

ここまではいい．しかし数学者はいまだに数式の線形順序性にこだわり過ぎているのではないだろうか．つまり数式を線形順序に書くことに慣れっこになって，数学的思考までもそれにすっかり迎合してしまっているようだ．私は「数学者は左作用と右作用が先験的に存在するものと思い込んでいるのではないか」という疑問を提出したいのである．彼らは数式を線形順序に書くことがまず先にあり，そこに左と右の両方に書くスペースがある以上は，左作用と右作用があるのが当然と考えているように見える [*4]．しかし数学の概念が先にあり，その後でそれに適合する数式の表示を考えるのが正当な思考法ではないだろうか．

---

*1 京都大学名誉教授
*2 nbr-nak@trio.plala.or.jp

*3 線形順序性と連続性を両立させる書き方としては，行ごとに文字を反転し読む向きを変える牛耕式記法や，文字の左右は変えずに全体の上下を逆にするイースター島（モアイで有名な島）のロンゴロンゴ文字があった．

*4 例えば，左イデアルと右イデアルの区別がそうだ．環の加群としての部分群で，その環の任意の要素を左からかけられるのが左イデアル，右からかけられるのが右イデアルだが，イデアルとは本来環の要素の同値条件を集合の言葉で表したものなのだから，左と右の区別が本当にあるようなイデアルに意味があるとは思えない．

A という量に B という演算を作用させるとする．そのときこれを BA と書くか，それとも AB と書くかは全く自由である．つまり本来は A と B は可換なのだ．例えば，A が関数で B が微分演算子だったら，BA の順序で書くのが習慣だが [*5]，数学の概念として「左微分」とは異なる「右微分」は存在しない [*6]．矢印などを用いて右から微分する式を書くのは，きれいな形の式にしたいなどの便宜的な理由によるものだ．

3　行列とテンソル解析

線形順序に従って数式を書くと，対象とする量に自動的に左と右の両方の作用の仕方があることになってしまうことを指摘した．一方しか要らないのに両方あるのは，無駄だが別に困りはしない．困るのは 3 つまたはそれ以上のものがそれに作用する場合だ．明白な例として，行列とテンソルをとり挙げよう．行列は並べた順序で自動的にその積が決まってしまう．つまり順序が積の定義を支配しているわけだ．ベクトルは両端以外には付けられないし，トレースをとることは同じ記法で表すこともできない．これに対して，全く同じ内容を 2 階テンソルの積と縮約で表せば，書く順序は全く任意で，ベクトルは 1 階テンソルで表せ，トレースも新たな記号を導入する必要がない．さらに 3 階以上のテンソルを考えれば，3 つまたはそれ以上のものが直接作用できる．各テンソルを点（頂点）で，縮約を線（辺）で表せば，テンソルの積はグラフ理論でいうグラフに対応する．（共変と反変を区別すれば有向グラフになる．）

化学において分子の構造式もこれと同様である [*7]．原子を点で，結合手を線で表せば，これはグラフである．いくつかの接合端子を備えた電子機器部品を考え，お互いはそれぞれ特定の種類の端子とだけ接続が可能であるとする．部品を点で，端子の接続を線で表せば，グラフになる [*8]．

数式に現れる数学的対象をこのような接合端子を備えた部品で表現すれば，これまで使われてきた数式表現よりはるかに自由度に富んだ数式が書けるのではないだろうか．このような代数学を**グラフ理論的代数学**と呼ぶことにしよう．この理論で，全体はそれを組み立てる順序には依らないというルールが，結合則に他ならない．このような構成では，結合則はビルトインされていることになる．

4　グラフ理論的代数学の必要性

それでは，このような「グラフ理論的代数学」は実際に必要であろうか．それには Yes と答えたい．すでにいろいろな場面で使われている（例えばテンソル解析）のだが，それを明瞭に意識していないため，いろいろ技巧を凝らして間に合わせているというのが現状なのではないだろうか．

素粒子物理学の基礎理論である場の量子論の基本的対象は量子場である．それは数学的には「オペレータ値超関数」として理解されている．つまり，それは量子論的な意味でのオペレータであると同時に，場という時空の関数として微積分の対象となるものである．関数の積を作ることと，微分することとは非可換であるので，量子場は 2 重の非可換性を持つ．それだから，それらの非可換性を一つの線形順序でもって同時に表記しようというのは，原理的に無理なわけだ．さらにディラック方程式のガンマ行列なども行列記号で取り込みたいのだから，無理に無理を重ねているのが現状なのだ．

[*5] これは動詞のあとに目的語を書く西洋人の習慣によるものと思われる，しかし本当は，数式を左から右へ書く習慣に合わせて AB の順序にした方がよかった．ライプニッツの失敗か．

[*6] ここでは，グラスマン微分などの拡張された意味での微分演算は考えない．

[*7] 幾何異性体は 3 次元空間で実現したための特殊性なので無視する．

[*8] ファインマン・ダイアグラムは，実体である素粒子のプロパゲーターが線，関連性を表す相互作用が点なので，グラフではあっても今ここで考えたい概念とは異なる．

場の量子論の計算は，通常自由場の部分を分離して先に取り込み，相互作用の部分を冪級数に展開して解く方法（共変的摂動論という）が用いられるが，この方法はそのような分離が許されない重力場には使えない．そこで私はそのような勝手な分離をしないで場の量子論を解く一般的方法を開発した．そのさいに現れるのが，オペレータ値超関数に対するコーシー問題である．これは数学的にまだ未開拓な分野だ．そこで問題を簡略化して，非可換量に対する常微分方程式を考察した（「数学・物理通信」3-5 参照）．定数係数の線形微分方程式は，微分演算子を普通の量のように扱う演算子法を用いて解くのが便利であることが知られている．これを係数に含まれる因子 A と未知関数 Φ が非可換な場合に拡張する．このとき **A が Φ の左にあるか右にあるかという位置情報を，それぞれ A_{L} と A_{R} という作用の情報として取り込むことによって，位置による束縛から解放してやることができる**．例えば，$A\Phi+\Phi A$ は $(A_{\mathrm{L}}+A_{\mathrm{R}})\Phi$ と書くのである．すなわち，Φ が 2 つの端子 L，R を持っていて，A がどちらの端子にくっついているかを指定するわけだ．こうすれば A_{L}，A_{R}，Φ が互いにすべて可換になる．それで，$A_{\mathrm{L}}+A_{\mathrm{R}}$ で割るなどの演算子法の手法が自由に使え，非可換量を含む常微分方程式が見事に解けるのである．このように，結合則のみならず，交換則までもビルトインされるわけだ．

端子の数を増やすことにより，もっと複雑な状況設定も対応可能である．線形順序にこだわっていたら，こういった融通はきかない．通常の記法での A と Φ の交換子は，2 つの端子へのとりつけの入れ替えに対応するから，3 つの端子があれば通常の記法でいえば 3 種類の交換子のようなものが作れることになる．ただしその間には，それら 3 つの和が 0 というヤコービ恒等式に似た恒等式が成立する．このように，数式を線形順序に書くという呪縛から解放することにより，代数学に新しい視野が開けるのではないだろうか．

結合則と交換則がいつでも成り立つユートピア
「グラフ理論的代数学」の世界へ，ようこそ！

「数学・物理通信」通巻 50 号記念によせて

世戸 憲治 *

In Commemoration of the 50th Issue of the "Quarterly of Mathematics & Physics"

Kenji Seto*

1　はじめに

つれづれなるままに，日くらし，パソコンにむかひて，
心に移りゆく数式もどきを，そこはかとなくキーインすれば，
あやしうこそものぐるほしけれ．

いつもこんな心境で原稿を書いています．早いもので，「数学・物理通信」が 2009 年 12 月に最初の号が発刊されてから 6 年余りで通巻 50 号となります．私は，中西 襄先生に勧められ，初めは恐るおそる投稿していたのですが，いつの間にか，これまでに投稿した数は 37 編にもなります．私が書いたものを読まれた方は，なんとつまらないことを書く人だろうと思われたかもしれません．書いている本人もその思いが強いのですが，でも，間違えたことは書いていないつもりです．自分では，書いたもののうち 3 分の 1 でも意味のあるものであればと願っています．いまでは，「数学・物理通信」に投稿することが，私の生きがいになってきました．最近では，ネットで「数学・物理通信」を読まれた方から，ご意見のメールが届くようになりました．これもひとえに，編集でご苦労をされている矢野忠さんのおかげと感謝しています．

2　「数学・物理通信」のこと

いまのところ，この「数学・物理通信」について，不便不満のようなことは，特にはありません．以前は，LaTeX の jreport で作られていたために，各論文が 1 つの章として扱われ，各数式には章番号が付いていました．自分が書くものが何章になるかは，投稿して編集者が編集した後にならなければ分かりません．そのために，各数式には，ラベル番号を付け，引用すところでは引用番号を付ける必要がありました．私の場合，数式本数が，多いときには 100 本近くになることがあり，これにラベル番号，引用番号を付けていくことは，大変面倒なことになっていました．そこで，私の方から編集者の矢野さんに，jreport を使わないで，各論文毎に，先に pdf ファイルにしてしまい，すべての論文が集まった段階で pdf ファイルをマージし，1 冊のものに仕上げる方法を提案しました．これで，投稿する方としてはラベル番号，引用番号を付ける必要がなくなり，楽になったのですが，逆に，編集者の方は仕事が増えてしまいました．jreport のときは目次は自動で作られますが，この新しい方法では，編集者が目次を作らなければなりません．また，各論文のページ番号を，編集した段階で付け直す必要がでてきます．その他，各論文によって，行幅や，ページの行数が違っていた場合は，これを修正する必要がでてきます．論文毎に

* 北海学園大学名誉教授　　　E-mail: seto@pony.ocn.ne.jp

pdf ファイルにすることは，各論文の独自性を保つ意味では良いことなのですが，あまりにも他のものと異なっている場合は，やはり，修正が必要と考えられます．この点，編集者の矢野さんはよくやってくれていると，いつも感心してしまいます．

あとひとつ，気になっていることは，著者名のところに「メールアドレス」を書くようになっていますが，これは本当に必要なのでしょうか．「はじめに」のところで，書いたように，確かに，メールアドレスを書いておくと，これを読まれた方からの反応が返ってくることがあり，これは有り難いことなのですが，逆に，不要な宣伝が舞い込んだり，コンピュータ・ウイルスを送り込まれたりという危険性もでてきます．最近は，メールアドレスを書かない論文集も増えてきていますので，この点について，今後も，議論し，検討していただきたいと思っています．

3 これからのこと

私がこれまでに書いてきたことは，Bessel 関数，Legendre 関数，Laguerre 多項式，Tchebycheff 多項式，Whittaker 関数，Gauss の超幾何関数などのいわゆる特殊関数に属することがほとんどです．これらの関数は，パソコンなどというものがまだ存在しなかった時代に創られたもので，今日のように，シミュレータが進歩してしまうと，特殊関数を使って問題を解くよりも，シミュレータを使った方がはるかに簡単に，しかも，特殊関数では解けないような問題までもが解けてしまいます．この意味で，いまとなっては，特殊関数は古典数学と言っても過言ではありません．そのせいか，いまの若い人たちには特殊関数を勉強しない人が増えてきているそうで，この先が心配になってきます．でも，でも，今日でも，古典文学，古典音楽，古典美術がもてはやされるように，古典数学も，その価値はこれからも存続し続けるものと確信しています．

「数学・物理通信」4 巻 2 号の編集後記に矢野さんが書かれた文章『人間などというものは，常に自分は無限に生きていけるかのような幻想を持っているが，それはまったくの幻想にすぎない』というのを読んだときは，ドキッとしました．私も退職者の身であり，もう年もとってきたので，あと何年くらい論文が書けるのかと，この先心配になってくることがあります．最近は，さすがに，原稿を書くための種も尽きてきて，つぎに何を書こうかと彷徨っていることも多くなりました．しかし，何かを計算しているときが一番幸せな自分であることに気づき，生きるための勇気をもらっている状態です．

最後に，「数学・物理通信」が末永く続くよう願っています．と言葉で言うのは簡単なのですが，矢野さんが言われるように，我々の命は無限ではなく有限です．老婆心ながら，より若い人たちに支持されるような論文集になることを祈っています．

祝 50 号: 創刊以来お世話になっています

Congratulations on the 50th Issue

浅田　明 [1]

Akira ASADA [2]

1　はじめに

「数学・物理通信」は創刊以来送付していただき，時たま拙稿を載せて頂いてもいましたが，この 6 月の 6 巻 5 号で通巻 50 号を迎えると聞き，改めて編集刊行にあたられている矢野先生，新関先生のご苦労と貴重な原稿をお寄せいただいた中西先生はじめ多くの寄稿者に感謝します.

新関先生には信州大学にいたときに集中講義に来ていただきましたが，矢野先生とは全く面識がありませんでした．幸い中西先生や川村君等と毎月ゼミをやっていた縁で創刊以来送付していただき幸運でした．ネット時代で大学をはなれてもある程度情報や文献の入手は可能ですが,「数学・物理通信」のような刊行物が定期的に入るのは刺激にもなるし勉強にもなります.

2　数学と物理の性格のちがい

新関先生が編集後記で嘆かれたように「数学・物理通信」と言うけれど物理の人の投稿が数学の人より圧倒的に多く数学者としてはもっと頑張りたいと思っていますが，不勉強と能力不足でなかなかそうはいきません. この通信が始まる少し前から分数冪微積という数学者の間ではかなり特殊と思われているテーマの研究をしていて通信への投稿も殆どその関係でしたが興味を持っていただけたでしょうか？

物理の人の投稿はもちろん物理学・力学関係が大部分ですが,「等比数列のコサインの有限乗積」のように数学の問題を扱ったものや，創刊直後の東日本大震災に触発された「3.11 地震の統計解析」や梶田氏のノーベル賞受賞を機会に寄稿された「ニュートリノ振動」など時々の社会情勢，話題に関連した投稿もあり多彩です. こういうのを見ると物理はやはり数学より日常社会に結びつきがあるし，物理学者は数学者よりフットワークが軽いと思い知らされます．そう言えば「小保方事件」に触発された中西先生の「剽窃事件顛末記」などほかでは読めそうにない記事があるのも魅力でした.

3　分数冪微分とその応用

分数冪微分が最初に現れたのは世戸先生の寄稿がある「Abel の積分方程式」で，これからも解るように微分とはいっても通常の微分と違って局所的ではありません．しかしそれを利用して記憶のある現象の解析に使おうという応用が考えられ，最近では金融工学で関心が高まっているそうです．また分数冪微積では

$$\frac{d^a}{dx^a}x^c = \frac{\Gamma(1+c)}{\Gamma(1+c-a)}x^{c-a} \tag{1}$$

となるので地震などの破断現象の研究に役立つと期待されているそうですが，知識がないのでそういう応用の紹介が出来ないのが残念です．一方この公式からも解るように現状では通常数学でやられている定義域と値域,

[1] asada-a@poporo.ne.jp
[2] Professor emeritus, Sinsyu University

その間の写像として分数冪微積をあつかう所までは分数冪微積の理論は整備されていず，場合に応じて「良い」定義域を探すのが問題になります．このあたりにも分数冪微積が数学者の間で特殊な話題と思われている理由があるようです．もっとも 2000 年にインドでの学会に行ったとき「分数冪微積は　next millennium の数学だ」と講演したインドからの参加者もいましたが $\cdots$.

5 巻 3 号の「分数冪微分に関係した積分変換とその応用」で「宇宙の背景輻射のプランク分布からのわずかなずれを説明するのに使おうという試みもある」と書きましたが，元信州大の美谷島氏らによる，その論文は M. Biyajima, T. Mizoguchi, N. Suzuki: A new black body radiation law based on fractional calculus and its application to NASA COBE data として Physica A　に発表されるそうです．なおここで現れる分数冪プランク方程式は数理生態学でも興味をもたれています : A.M.A. El-Sayed, A.E.M. El-Mesiry, H.A.A. El-Saka: On the fractional order logistic equation, Applied Math. Letter 20(2007),817-823.

4　カルダノの再評価

同じ 5 巻 3 号には矢野先生の「虚数とカルダノの公式」という寄稿もあり，それまで重要とは思っていなかった 3 次方程式の解法の数学と思想史での重要性を教えられました．カルダノはガリレオの一世代前，コペルニクスが地動説を提唱した時期に活躍した人で榎本恵美子著『天才カルダーノの肖像ールネサンスの自叙伝，占星術，夢判断一』（勁草書房）によるとガリレオに劣らぬ才能を持っていたようです．しかし天上の法則は地上の法則とは違い人智の推し量れない世界であるという当時の「信仰」に囚われ,「自然の事物の観察を実用的な目的の為に利用することを教えた」のは自分が初めてであると誇りながら「自然の数学化」という近代的な科学への道には進まなかったと評されています．現在もこういう評が当てはまるようなことをしているのではないか自戒しないといけないう気もします.

5　おわりに

話が拡散してきましたが，これも「数学・物理通信」への寄稿が多彩で読み応えがあるからだと御容赦下さい．これからも「数学・物理通信」で刺激されながら勉強を続け時には投稿できればと願っています.

矢野先生，新関先生にはご苦労をおかけしますが，これからも発刊を続けて頂き，長生きして，次は「数学・物理通信」100 号への祝辞を書きたいと思います．簡単ですが「数学・物理通信」50 号への祝辞とします.

50号への祝詞

In Celebration of the 50th Issue

1 はじめに

投稿者や読者の方々からの『数学・物理通信』50号への祝詞をいただいた．原稿が到着した順番に以下に掲載する．

2 伊崎修通氏から

2016.3.24

この度は,『数学・物理通信』通巻50号を迎えられましたことを，衷心よりお祝い申し上げます.
新関章三先生と矢野忠先生が，2009年から刊行されてこられた本誌が，早くも50号の節目に到達されたことは敬服の至りです.
雑誌を編集・発行する者として，両先生のひそみに倣ってまいりたいと存じます.
今後も,『数学・物理通信』の更なる発展を期待しております.
伊崎修通（窮理舎）

*) 伊崎修通氏は雑誌『数理科学』（サイエンス社）の元編集者ですが，現在は窮理舎（出版社）を主宰されており，雑誌『窮理』の編集・発行人です．大学院で原子核物理学を専攻されました.

3 大槻俊明氏から

2016.3.29

「数学・物理通信」50号，大変おめでとうございます．多岐に渡るテーマで長く続けておられることに敬意を表します.
この間，特に四元数に関する論文に興味があり，よく読ませていただき勉強になりました．私は産業界にいる者（民間企業の技術者）ですが，私の関係する産業界の技術にも応用させていただきました．ありがとうございました.
今後も長く続けられることを心から期待いたします.
大槻俊明（電機メーカ技術者）

*) 大槻俊明氏は工作機械制御のCNC (Computer Numerical Control) が専門の技術者で，四元数を用いたCNCの特許を2014年に取得されています．編集者（矢野）の義弟です.

4　「数学・物理通信」への期待

2016.5.5

「数学・物理通信」通巻 50 号達成おめでとうございます．この「通信」の刊行が始まったのが 2009 年末であり，それから 3ヶ月後に私も定年を迎えました．定年後の自由な時間を利用して「通信」に投稿しようと思っていたのですが，実際はアルバイトその他で今までたった数篇しか投稿していません．あえて要望を言えばワードファイル（もしくは PDF ファイルで）で投稿できたらと思いますがどうでしょう．しかし，定年後に気楽に投稿できる場として「通信」は貴重な役割を果たしてきました．今後はもっと「通信」を活用してこれからの生活を楽しんでいけたらと思っています．これからのますますの発展を期待しています.

岩崎正春 [高知大学名誉教授 (miwasaki@cure.ocn.ne.jp)]

$*$) 岩崎正春氏は編集者（新関）の元同僚で，新関との共著の論文を投稿されている原子核物理学者です。

5　数学・物理通信」通巻 50 号記念号に寄せて

2016.5.14

私がこの雑誌を初めて知ったのは，今から 3 年半ほど前，友人から，この雑誌の存在を教えて貰ったのがきっかけでした．帰宅してから，この雑誌に「四元数」についての詳細な解説が載っているのを知り，興味深く読ませて頂いたことを覚えております.

この雑誌の若い歴史にも拘わらず，その目的がはっきりしており，それを理解されておられる投稿者の皆さまが，面白い逸話や，ノーベル物理学賞に関連した，総合報告なども含め，様々な角度から見た，意外と奥が深い，数学的・物理的問題について，明解な論文を寄稿されておられます．それらが，世にでて，広く読まれる仕組みも，編集に携わっておられる矢野忠先生と新関章三先生のご努力の賜と，私はもちろんですが，読者や寄稿者の皆さまは強く感じておられるに違いありません.

その雑誌が早くも，通巻 50 号の記念号を迎えられたのですね．おめでとうございます．雑誌の編集について，多大の労をとって下さっている両先生のご苦労に，ありがとうございますと，感謝の気持ちをお伝えしたいと思います.

今後も，この雑誌が，多くの読者や寄稿者に愛され，ますます発展することを，心から願っております.

森田克貞 [元名古屋大学理学部物理教室 (kmorita@cello.ocn.ne.jp)]

$*$) 森田克貞氏は『四元数・八元数とディラック理論』（日本評論社，2011）の著者で，素粒子物理学者です.

「数学・物理通信」50号

矢野　忠[1]

The 50th Issue of "Mathematics and Physics Communications"

Tadashi YANO [2]

1　はじめに

この『数学・物理通信』6 巻 5 号は通巻で 50 号となる.『数学・物理通信』の発行をはじめたときはそれが 50 号に至るなどとはまったく想像などしていなかった．その証拠に創刊号の編集後記で「年 4 回の発行で 40 号に達するのは十年後だから，私たちの年齢を考えたら，どうも 40 号まではいかないかも知れない」と書いている.

ところが第 1 巻 11 号，2 巻 6 号，3 巻 8 号，4 巻 8 号，5 巻 12 号，6 巻 3 号までで通算 48 号まで発行したことになる．それで 6 巻 4 号が発行されると 6 巻 5 号はめでたく通巻で 50 号に到達する.

それで 6 巻 3 号で通巻 50 号記念号とすることを述べて記念の原稿をお願いしたところ中西　襄先生をはじめとして投稿されたことのある方々から記念の投稿をいただくことができた．編集者として喜んでいる.

2　現在までの経緯

すでに中西先生がこの記念号にも経緯の一部を書かれているが，私の方の事情も書いておこう.

『数学・物理通信』を発行するいきさつにはいくつかの要因がある．一つにはそれまで私が数学教育的なエッセイを投稿してきた，愛媛県数学教育協議会（愛数協）の機関誌『研究と実践』があまり定期的に発行されなくなった．これは活動家だった方たちが老齢になり，原稿をあまり投稿されなくなったこともあろうが，もう一つには現役で勤務しており，かつ発行をする人々が忙しくてそういう仕事にたずさわる時間がとれなくなったということもあるだろう.

私が書いた原稿も他の原稿が集まらないために 1 年以上愛数協の事務局の机の引き出しの中に眠っていたということがしばしば起こるようになった．以前とは違って愛数協の『研究と実践』が機能をしなくなったと感じていた.

何年だったか忘れたが，共同編集者で数学者の新関章三さんが高知大学理学部を定年になって松山に住まわれるようになった．新関さんも新しい微積分の講義内容についてのアイディアをもっておられてそれを書いて発表できる場所をもちたがっていた.

それで二人で相談して『数学・物理通信』を発行したらいいのではないかということになった．そのときに印刷をしてそれを郵送するということになると会員を募集して会費をとらなければ経済的にやっていけないが，そういう会員を募集しても十分な会員数は集まらないだろうし，第一，私たちも年金生活になって経済的に苦しくなってきている．それでメールで配布するサーキュラーの形にすれば，会費をとらなくてもすむし，経費はほとんどかからない．誰かがそういうサジェストをしてくれたわけではなく，そういうことを自然に思いついたのは我ながら名案だったと思う.

そんなことを私がブログに書いたら，たまたま私のブログを読んで下さった中西先生から参加してもいいかとの問い合わせがあっただけではなく，どんどん原稿を投稿して下さった．その上に先生の友人・知人・後輩

[1]元愛媛大学工学部
[2]yanotad@earth.ocn.ne.jp

の方々のメールのアドレスが送られてきた．先生のこのアドレスはメールが不通になってしまった数人の方を除いてすべて読者としていまも『数学・物理通信』をお送りしている．

そのうちに数学者の浅田　明先生のように研究会や国際シンポで発表する原稿をその発表に先立って『数学・物理通信』に投稿して下さる方まで現れた．またおなじく中西先生との縁で世戸憲治さんが多くの数理物理的な研究論文を投稿してくれるようになった．彼は最多の論文をこのサーキュラーで発表されている．ここで感謝の意を改めて表しておきたい．

このサーキュラーの発行を始めるころ中西先生の御紹介で知った谷村省吾さんはどこかのインターネット上でサーキュラーを読めるようにした方がいいのではないかとの積極的なご提案をいただいた．それによると『素粒子論研究』電子版への投稿も考えられるのではないかとのご提案もあったが，私には『素粒子論研究』電子版への投稿はちょっとおそれおおい．

そうこうするうちに，谷村さんからご自分が大学でもっておられるホームページにリンクしてもいいというご提案をいただき，現在までお世話になっている．おかげでインターネットを見て『数学・物理通信』の存在を知り，投稿される方もときどき出てくるようになった．ただ，そのために編集者として多くの時間を割いたり，頭を悩ませたりすることもときとして起こるようになった．

3　サーキュラーの性格

私たちのサーキュラーは論文審査をしないということを明記してあるので，そのために『数学・物理通信』を発表場所に選ぼうとされる方もときどき出てくる．確かに原稿の作成要領も 3 巻 5 号に掲載されているが，このサーキュラーはやはりある種のグループ仲間のサーキュラーであり，どんな人にでも開かれているわけではない．

もっともそのことは原稿の応募要領にはあからさまに書かれてはいない．だが，そのことは暗黙の裡にあると思っている．そういう意味ではすべての人に開かれているという体裁をとっているが，おのずからクローズした性格をもっている．

このことに関係して 2 回ほど一般の方の投稿原稿の掲載をお断りしたことがある．その判断は私が下したのだが，もちろん共同編集者の新関さんに相談をした．2 回とも彼が私の判断を支持してくれたので，大いに助かった．

なお，テクニカルなことだが，私の個人的な知り合いの武藤　徹先生（数学思想史研究者）のようなご高齢の方なら，例外的にその原稿を編集者の私が latex に変換することもあるが，原則的に自分で latex の原稿で投稿をされないと編集者の手間はとても大変である．

そんなこんなで編集者が自然に権威をもったり，偉そうで困ったものだとひそかに感じている方もおられるかもしれないが，これは個人経営のお店みたいなものだから，そう感じられたとしてもお許しをお願いしたい．

4　サーキュラーの名と英文名

『数学・物理通信』という名はもちろん編集者の一人が数学者で，もう一人が物理学者であったということから来ているが,「通信」とはどこから来たか．それはさほど頭をしぼって考えたわけではない [3]．

私が定年前の数年間に論文を投稿していた雑誌 “Computer Physics Communications” からのヒントで「通信」としたものであろう．それに私も以前に関心をもっていた，数式処理に関する『数式処理通信』という論文誌もあったので無意識に真似たのかもしれない．だが，その辺の記憶は残っていない．したがって，これらは

[3] インターネットで調べると『数研通信』という雑誌があり，それのバックナンバーをインターネットで読むこともできる．教科書や学習参考書等を出版している，数研出版が中学や高校の数学を教えている先生等からの数学についての投稿原稿をまとめて年数回発行している．しかし，名前はこれに倣ったのではなく，そういう雑誌の存在は私たちの『数学・物理通信』を発行し始めてから何年もしてインターネットの検索で知った．また今回の検索ではじめて知ったのだが，日本数学会が『数学通信』という雑誌を会員向けに発行している．

後付けの理由探しにしかすぎない．すくなくとも，サーキュラーの名前をつけるのに悩んだという記憶はまったくない．この名前に関して新関さんと相談したのかも思い出せない．多分相談したのだろうが，記憶にない．

だから，英文名もまったく考えなかった．今回この記念号に世戸憲治さんが投稿して下さった論文の英文タイトルとして『数学・物理通信』を “Quarterly of Mathematics & Physics” と訳して下さったので，その荘厳さ (?) に感心をしてしまった．

Quarterly を辞書で調べてみると,「季刊誌」とあり，確かに 3 ヵ月ごとに発行しているので，その訳がいいのだろうが，あまり季刊誌という風に誇れるものを目指していたかどうかはあやしい．だからあくまでサーキュラーという位置づけでありたい．

もっとも中身としては中西，浅田両先生とか世戸憲治さんの立派で高度な研究も含んでいるのだけれども，気持ちとしては気軽なサーキュラーを目指したい[4]．もっとも高度な内容の研究を拒否するつもりはさらさらない．

それで私が英文名をつけるなら，“Mathematics and Physics Communications” とでもしたい．しかし，正式にこのサーキュラーの英文名をつける必要は現在のところないので，英語名を統一してこれだというにはおよばないだろう．いろいろの訳があっていいと思っている．将来はそれを統一する必要に迫られるかもしれないが，それはそのときに考えることにしたい．

5 今後は？

今後のことはあまり考えたことがない．ただ，50 号を越えたので切りのいいところで一部だけバックナンバーをプリントし，製本して国会図書館に収めた方がいいかなと感じている．

谷村さんに頼らないで自分でホームページをもつ夢は捨てたわけではないが，多分その夢は実現しないであろう．これはホームページをつくる技術の問題もあるが，それよりも経済的な理由の方が大きいかもしれない．

それにしても発行をはじめてからも中西先生のお蔭でこのサーキュラーの権威が保たれているというか，みなさんからのご支持をいただいていることを感じている．

いまや常連の投稿者として多分一番多くの投稿をされている，世戸憲治さんをこの『数学・物理通信』に導かれたことは中西先生抜きでは考えられない．いつか世戸さんの一連の論文が書籍となって多くの人たちに読まれる日も来るかもしれない．

心配の一つは共同編集者の新関さんの健康があまり優れないことである．直ちに命に係わることはないが，持病で体の自由があまりきかないので共同編集者の一人として憂慮をしている．

6 おわりに

まだ数年は私も現在の健康を保ち続けることができると思うので，通算で何号くらいまで伸びるのか楽しみである．いまの調子なら，あと 5 年くらい発行を続けることができて，100 号発行なんてことも夢ではないかもしれない．しかし，そのことは正直いって誰にもわからない．

さらに希望をいえば，このサーキュラーを継承して続けて下さる，献身的で気のいい，私よりも若い方が編集兼発行人として将来現れればいいのだが，それは多分にあまりにも虫のいい希望だろう．

[4] Circular を辞書で引くと「回覧」とか「回状」とか気楽な様子が伺える．英英辞典で引いてみても an advertisement, letter, etc., usually prepared in quantities for extensive circulation とある．実状はともかくこの気持ちを持ち続けたい．

四元数（補遺3）

— 四元数とパウリ行列 —

矢野　忠 [1]

The Quaternions (Appendix 3)

Tadashi YANO [2]

目次

1　はじめに

四元数の元として $1, i, j, k$ の中で 1 を除いた 3 つの元 i, j, k がパウリ行列 $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ でどのように表されるかを『四元数の発見』 [1] に書いた.

これは i, j, k のしたがう代数と $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ のしたがう代数とを既知の知識として，単に関係づけただけであった．どのようにして i, j, k が 2 次のユニタリー行列で表されるかについては考えていなかった．このエッセイではそのことについて述べてみよう.

2　i, j, k を 2 次の行列で表す

『組ひもの数理』 [2] の第 8 話に i, j, k を 2 次の行列でどのように表すかが述べられている．この節ではそのことを計算を補足しながら述べてみよう.

四元数 i, j, k を 2 次の行列で表したいのだが，まず複素数 $z = x + yi$ を 2 次の行列で表すことから考えよう．このときこの複素数を 2 つの実数の組 (x, y) として平面上の一つの点と考える.

いま，$z = x + yi$ に右から虚数単位 i をかければ,

$$zi = -y + xi \tag{2.1}$$

となる．そうするとこの複素数 zi はやはり同じ平面上の一つの点 $(-y, x)$ である．つまり複素数 z に i をかける操作 zi は平面上の一点 (x, y) を $(-y, x)$ に対応させる変換にあたっている．すなわち,

$$\begin{pmatrix} s & t \\ u & v \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -y \\ x \end{pmatrix} \tag{2.2}$$

[1] 元愛媛大学工学部
[2] yanotad@earth.ocn.ne.jp

の中に与えられている行列

$$\begin{pmatrix} s & t \\ u & v \end{pmatrix}, \quad s, t, u, v: \quad 実数 \tag{2.3}$$

は平面上の一点 (x, y) を $(-y, x)$ に対応させる変換である．(2.2) から

$$sx + ty = -y,$$
$$ux + vy = x$$

であるから，この連立方程式で両辺を比較して，s, t, u, v を求めれば

$$s = 0, \quad t = -1, \quad u = 1, \quad v = 0 \tag{2.4}$$

が得られる．この場合にはこの未定係数 s, t, u, v を求めるのにわざわざ式で表さなくとも視察で

$$\begin{pmatrix} s & t \\ u & v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \tag{2.5}$$

であることは直ぐにわかる．

考えとしては同様のことを四元数に行えば，四元数の元を 2 次の行列で表すことができる．以下では，このことを具体的に示す．

そのために四元数 $a + bi + cj + dk$ を 2 つの複素数でつぎのように表す．

$$a + bi + cj + dk = a + bi + (c + di)j \tag{2.6}$$

ここで $k = ij$ を用いている．

いま

$$z = a + bi, \quad w = c + di \tag{2.7}$$

と表すと

$$a + bi + (c + di)j = z + wj \tag{2.8}$$

となる．

ここで四元数 $z + wj$ に右から四元数 u をかけて

$$z' + w'j = (z + wj)u \tag{2.9}$$

とすれば (z, w) から (z', w') が得られる．すなわち，右から四元数 u をかけて (z, w) から (z', w') に変換される．

以下では四元数 u として，$1, i, j, k$ をとって対応する行列を求めてみよう．まず

(1) $u = 1$ のとき

$$z' + w'j = (z + wj) \cdot 1 \tag{2.10}$$

であるから

$$z' = z = a + bi,$$
$$w' = w = c + di$$

となる．これを 2 次の行列で表せば

$$\begin{pmatrix} a + bi \\ c + di \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a + bi \\ c + di \end{pmatrix} \tag{2.11}$$

が成り立つ．したがって

$$1 \to \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} := E_0 \tag{2.12}$$

と表される．

(2) $u = i$ **のとき**

$$\begin{aligned} z' + w'j &= (z + wj)i \\ &= zi + wji \\ &= zi - wij \\ &= (-b + ai) + (d - ci)j \end{aligned} \tag{2.13}$$

となる．これを 2 次の行列で表せば

$$\begin{pmatrix} -b + ai \\ d - ci \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a + bi \\ c + di \end{pmatrix} \tag{2.14}$$

であるから

$$i \to \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix} := E_1 \tag{2.15}$$

となる．

(3) $u = j$ **のとき**

$$\begin{aligned} z' + w'j &= (z + wj)j \\ &= -w + zj \\ &= -(c + di) + (a + bi)j \end{aligned} \tag{2.16}$$

これを 2 次の行列で表せば

$$\begin{pmatrix} -(c + di) \\ a + bi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a + bi \\ c + di \end{pmatrix} \tag{2.17}$$

であるから

$$j \to \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} := E_2 \tag{2.18}$$

となる．

(4) $u = k$ **のとき**

$$\begin{aligned} z' + w'j &= (z + wj)k \\ &= zij + wi \\ &= (-d + ci) + (-b + ai)j \end{aligned} \tag{2.19}$$

これを 2 次の行列で表せば

$$\begin{pmatrix} -d + ci \\ -b + ai \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a + bi \\ c + di \end{pmatrix} \tag{2.20}$$

であるから

$$k \to \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix} := E_3 \tag{2.21}$$

となる．

ここで E_0, E_1, E_2, E_3 をまとめておこう．

$$E_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad E_1 = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}, \quad E_2 = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad E_3 = \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix}$$

この行列をケイリー (Cayley) が四元数と関係して 18 世紀にすでに見つけていたのでケイリー行列と呼ぶ文献 [9] もある．

3 パウリ行列との対応

四元数の元 i, j, k とパウリ行列 σ_1，σ_2，σ_3 との対応について考えてみよう．2 節で求めた 2 次の行列 E_1, E_2, E_3 を

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

で表せば

$$E_1 = i\sigma_3, \quad E_2 = -i\sigma_2, \quad E_3 = i\sigma_1 \tag{3.1}$$

となる．

しかし，このとき

$$\begin{aligned} i &\to E_1 = i\sigma_3, \\ j &\to E_2 = -i\sigma_2, \\ k &\to E_3 = i\sigma_1 \end{aligned}$$

と対応させることができない[3]．これは

$$i \to p\sigma_3, \quad j \to q\sigma_2, \quad k \to r\sigma_1$$

と対応させたときに得られる，

$$\begin{aligned} p &= -iqr, \\ q &= -ipr, \\ r &= -ipq \end{aligned}$$

の解となることができないからである．上の対応では

$$p = i, q = -i, r = i$$

であるが，これは，たとえば

$$p = -iqr$$

をみたすことができない．このことは左辺と右辺に $p = i, q = -i, r = i$ を代入しても左辺と右辺が等しくならないことからわかる．

一方

$$\begin{aligned} i &\to E_1 = i\sigma_1, \\ j &\to E_2 = -i\sigma_2, \\ k &\to E_3 = i\sigma_3 \end{aligned}$$

[3] ここから以降では四元数の元としての i と複素数の元としての i とが混在して使われている．特に等式として左辺と右辺に同じ記号 i のある式が出てくることがある．左辺の i は四元数の元としての i であり，左辺ではないところの i は複素数の元としての i であることが多い．違った記号で表すことも考えたが，そのままとした．以下ではその違いに気をつけて式を見てほしい．

と対応させれば，

$$i \to p\sigma_1, \quad j \to q\sigma_2, \quad k \to r\sigma_3$$

と対応させたときに得られる，

$$\begin{aligned} p &= iqr, \\ q &= ipr, \\ r &= ipq \end{aligned}$$

の解となる．上の対応では

$$p = i, \quad q = -i, \quad r = i$$

であるが，これは

$$p = iqr, \quad q = ipr, \quad r = ipq$$

をみたすことができる

4　2次のユニタリー行列から

i, j, k を 2 次の行列で表す方法として，多くの文献がとっているのは 2 次のユニタリー行列で表すことである．

2 次のユニタリー行列で，その行列式が $+1$ のものを

$$\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\bar{\beta} & \bar{\alpha} \end{pmatrix} \tag{4.1}$$

と表す．ここで α, β は複素数であり，$\bar{\alpha}, \bar{\beta}$ は α, β の共役複素数である．

ここで $\alpha = a + bi, \beta = c + di$ ととってみよう．このとき

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\bar{\beta} & \bar{\alpha} \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} a+bi & c+di \\ -c+di & a-bi \end{pmatrix} \\ &= a\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + bi\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} + ci\begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} + di\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \\ &= a\sigma_0 + bi\sigma_3 + ci\sigma_2 + di\sigma_1 \\ &= a1 + bi + cj + dk \end{aligned} \tag{4.2}$$

これは [3] [4] [5] [6] [7] [8] [9] でとられているが，

$$i = i\sigma_3, \quad j = i\sigma_2, \quad k = i\sigma_1 \tag{4.3}$$

ととったことになる [4]．

ここで

$$\sigma_0 := \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{4.4}$$

で定義されている．

[4] 前に注意したように $i = i\sigma_3$ で左辺の i は四元数の元としての i であり，右辺の i は複素数の元としての i である．両辺を i でわって $\sigma_3 = 1$ とするとおかしなことになる．以下の (4.6) 等においても同じ注意が必要である．

つぎに $\alpha = a - bi, \beta = -c - di$ ととってみよう．そのとき

$$\begin{aligned}
\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\bar{\beta} & \bar{\alpha} \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} a - bi & -c - di \\ c - di & a + bi \end{pmatrix} \\
&= a \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - bi \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} - ci \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} - di \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \\
&= a\sigma_0 - di\sigma_1 - ci\sigma_2 - bi\sigma_3 \\
&= a1 + di + cj + bk
\end{aligned} \tag{4.5}$$

となる．これは [1] [10] でとられているが,

$$i = -i\sigma_1, \quad j = -i\sigma_2, \quad k = -i\sigma_3 \tag{4.6}$$

ととったことになる．

最後に $\alpha = a - bi, \beta = c + di$ ととってみよう．そのとき

$$\begin{aligned}
\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\bar{\beta} & \bar{\alpha} \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} a - bi & c + di \\ -c + di & a + bi \end{pmatrix} \\
&= a \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - bi \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} + ci \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} + di \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \\
&= a\sigma_0 + di\sigma_1 + ci\sigma_2 - bi\sigma_3 \\
&= a1 + di + cj + bk
\end{aligned} \tag{4.7}$$

となる．これは [11] でとられているが,

$$i = i\sigma_1, \quad j = i\sigma_2, \quad k = -i\sigma_3 \tag{4.8}$$

ととったことになる．

または，2 次のユニタリー行列を

$$\begin{pmatrix} \alpha & -\beta \\ \bar{\beta} & \bar{\alpha} \end{pmatrix} \tag{4.9}$$

ととることもある．

このときに [12] にしたがって $\alpha = a + bi, \quad \beta = c + di$ ととれば

$$\begin{aligned}
\begin{pmatrix} \alpha & -\beta \\ \bar{\beta} & \bar{\alpha} \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} a + bi & -(c + di) \\ c - di & a - bi \end{pmatrix} \\
&= a \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + bi \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} - ci \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} - di \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \\
&= a\sigma_0 + bi\sigma_3 - ci\sigma_2 - di\sigma_1 \\
&= a1 + bi + cj + dk
\end{aligned} \tag{4.10}$$

これは

$$i = i\sigma_3, \quad j = -i\sigma_2, \quad k = -i\sigma_1 \tag{4.11}$$

ととったことになる．

さらに [2] にしたがって $\alpha = a + bi,\ \ \beta = c - di$ ととれば

$$\begin{aligned}\begin{pmatrix}\alpha & -\beta \\ \bar{\beta} & \bar{\alpha}\end{pmatrix} &= \begin{pmatrix}a+bi & -c+di \\ c+di & a-bi\end{pmatrix} \\ &= a\begin{pmatrix}1 & 0 \\ 0 & 1\end{pmatrix} + bi\begin{pmatrix}1 & 0 \\ 0 & -1\end{pmatrix} - ci\begin{pmatrix}0 & -i \\ i & 0\end{pmatrix} + di\begin{pmatrix}0 & 1 \\ 1 & 0\end{pmatrix} \\ &= a\sigma_0 + bi\sigma_3 - ci\sigma_2 + di\sigma_1 \\ &= a1 + di + cj + bk \end{aligned} \tag{4.12}$$

これは

$$i = i\sigma_1,\ \ j = -i\sigma_2,\ \ k = i\sigma_3 \tag{4.13}$$

ととったことになる．このとき

$$i = i\sigma_3,\ \ j = -i\sigma_2,\ \ k = i\sigma_1 \tag{4.14}$$

とはとれない．なぜなら，(4.14) は付録にあたえられた解 (E),(F) のいずれでもないからである．

なお [13] では p.45 に i，j，k と σ_1，σ_2，σ_3 との対応として

$$i = -i\sigma_1,\ \ j = -i\sigma_2,\ \ k = -i\sigma_3 \tag{4.15}$$

と正しくとられているが，p.70 の

$$\begin{pmatrix}\alpha & -\beta \\ \bar{\beta} & \bar{\alpha}\end{pmatrix} \tag{4.16}$$

で $\alpha = a+bi, \beta = c+di$ ととれば，これは上の対応とは一致しない．一致させるためには $\alpha = a-bi, \beta = c+di$ ととる必要がある．

5 四元数の行列表示

四元数を 2 次の行列で表すときにいろいろな表し方があることが前節に述べたことからわかった．この節では四元数 $w + xi + yj + zk$ がどのような 2 次の行列で表されれるかを調べよう．

まず

$$i = p\sigma_1,\ \ j = q\sigma_2,\ \ k = r\sigma_3 \tag{5.1}$$

と対応させたとき

(1) $p = i,\ \ q = -i,\ \ r = i,$

(2) $p = i,\ \ q = i,\ \ r = -i,$

(3) $p = -i,\ \ q = -i,\ \ r = -i,$

(4) $p = -i,\ \ q = i,\ \ r = i$

の 4 通りがある．

つぎにまず

$$i = p\sigma_3,\ \ j = q\sigma_2,\ \ k = r\sigma_1 \tag{5.2}$$

と対応させたとき

(5) $p = i,\ \ q = i,\ \ r = i,$

(6) $p = i,\ \ q = -i,\ \ r = -i,$

(7) $p = -i,\ \ q = -i,\ \ r = i,$

(8) $p = -i,\ \ q = i,\ \ r = -i$

の 4 通りがある [5]．これらの 8 通りの場合について四元数 $w+xi+yj+zk$ を 2 次の行列で表せば，まず (1)-(4) については

$$
\begin{aligned}
(1)\quad w+xi+yj+zk &= w\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}+xi\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}-yi\begin{pmatrix}0&-i\\i&0\end{pmatrix}+zi\begin{pmatrix}1&0\\0&-1\end{pmatrix}\\
&=\begin{pmatrix}w+zi&-y+xi\\y+xi&w-zi\end{pmatrix} \qquad (5.3)\\
(2)\quad w+xi+yj+zk &= \begin{pmatrix}w-zi&y+xi\\-y+xi&w+zi\end{pmatrix} \qquad (5.4)\\
(3)\quad w+xi+yj+zk &= \begin{pmatrix}w-zi&-y-xi\\y-xi&w+zi\end{pmatrix} \qquad (5.5)\\
(4)\quad w+xi+yj+zk &= \begin{pmatrix}w+zi&y-xi\\-y-xi&w-zi\end{pmatrix} \qquad (5.6)
\end{aligned}
$$

となる．

つぎに (5)-(8) については一般的に $x \leftrightarrow z$ の交換をした行列を用いるから，最後の行列でこの置換をすれば，

$$
\begin{aligned}
(5)\quad w+xi+yj+zk &= w\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}+xi\begin{pmatrix}1&0\\0&-1\end{pmatrix}+yi\begin{pmatrix}0&-i\\i&0\end{pmatrix}+zi\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}\\
&=\begin{pmatrix}w+xi&y+zi\\-y+zi&w-xi\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}w+zi&y+xi\\-y+xi&w-zi\end{pmatrix}:\ \text{(3) のエルミート共役} \qquad (5.7)\\
(6)\quad w+xi+yj+zk &= \begin{pmatrix}w+xi&-y-zi\\y-zi&w-xi\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}w+zi&-y-xi\\y-xi&w-zi\end{pmatrix}:\ \text{(2) のエルミート共役} \qquad (5.8)\\
(7)\quad w+xi+yj+zk &= \begin{pmatrix}w-xi&-y+zi\\y+zi&w+xi\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}w-zi&-y+xi\\y+xi&w+zi\end{pmatrix}:\ \text{(4) のエルミート共役} \qquad (5.9)\\
(8)\quad w+xi+yj+zk &= \begin{pmatrix}w-xi&y-zi\\-y-zi&w+xi\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}w-zi&y-xi\\-y-xi&w+zi\end{pmatrix}:\ \text{(1) のエルミート共役} \qquad (5.10)
\end{aligned}
$$

となる．この (5)-(8) の行列は (1)-(4) の行列のいずれかのエルミート共役となっている．

6 おわりに

四元数とパウリ行列との対応はすでに『四元数の発見』の中でも言及してあるが，より詳しく考えてみた．また『組ひもの数理』の第 8 話の四元数に対応した 2 次の行列を求め方を前には読んでもいなかった．今回読んでその解説を試みたのだが，分かりやすくなっただろうか.

(2016.4.23)

7 付録 p,q,r を求める

これはすでに [1] で述べたことであるが，まず

$$i\to p\sigma_1,\quad j\to q\sigma_2,\quad k\to r\sigma_3 \qquad (7.1)$$

[5] (7) の場合に『四元数の発見』では (7.5.14) がミスプリントであった．自分のノートでは正しく計算してあったが，エッセイに転記するときに間違えたらしい.

と四元数とパウリ行列とを対応させると p, q, r にどんな値が許されるか．この場合には i, j, k の代数と $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ の代数とから

$$p = iqr \tag{7.2}$$
$$q = ipr \tag{7.3}$$
$$r = ipq \tag{7.4}$$

の方程式が得られる．この付録ではこの 3 つの連立方程式の解き方を述べる．この導出は初等的なものであり，難しくはないが，私の経験ではなんども同じ方程式を解くので，その手間を省くためのメモである．

(7.2),(7.3),(7.4) を辺々かけ合わせれば，

$$pqr = i^3p^2q^2r^2, \quad (p \neq 0, q \neq 0, r \neq 0)$$
$$pqr = i \tag{7.5}$$

が得られる．つぎに，(7.2) の両辺に $-i$ をかけると

$$qr = -ip \tag{7.6}$$

(7.6) を (7.5) に代入すれば

$$p^2 = -1$$
$$p = \pm i \tag{7.7}$$

が得られる．

まず $p = i$ の場合を考えよう．(7.6) に $p = i$ を代入すれば

$$qr = 1 \tag{7.8}$$

(7.3) に $p = i$ を代入すれば

$$q = -r \tag{7.9}$$

(7.9) を (7.8) へ代入して

$$r^2 = -1$$
$$r = \pm i \tag{7.10}$$

(7.10) を (7.9) へ代入して

$$q = \mp i \tag{7.11}$$

したがって $p = i$ の場合には解は

$$p = i, \qquad q = i, \qquad r = -i \tag{A}$$
$$p = i, \qquad q = -i, \qquad r = i \tag{B}$$

となる．

つぎに $p = -i$ の場合を考えよう．(7.6) に $p = -i$ を代入すれば

$$qr = -1 \tag{7.12}$$

(7.3) に $p = -i$ を代入すれば

$$q = r \tag{7.13}$$

(7.13) を (7.12) へ代入して

$$r^2 = -1$$
$$r = \pm i \tag{7.14}$$

(7.14) を (7.13) へ代入して

$$q = \pm i \tag{7.15}$$

したがって $p = -i$ の場合には解は

$$p = -i, \qquad q = i, \qquad r = i \tag{C}$$
$$p = -i, \qquad q = -i, \qquad r = -i \tag{D}$$

となる．

$$i \to p\sigma_2, \quad j \to q\sigma_3, \quad k \to r\sigma_1$$

と四元数とパウリ行列とを対応させても

$$i \to p\sigma_3, \quad j \to q\sigma_1, \quad k \to r\sigma_2$$

と四元数とパウリ行列とを対応させても，これらは

$$i \to p\sigma_1, \quad j \to q\sigma_2, \quad k \to r\sigma_3$$

と四元数とパウリ行列とを対応させたときと同じ方程式 (7.2),(7.3),(7.4) が得られるので，p, q, r の解は (A),(B),(C),(D) と同じである．これは (2,3,1) と (3,1,2) が (1,2,3) の偶置換であることによっている．

つぎに

$$i \to p\sigma_3, \quad j \to q\sigma_2, \quad k \to r\sigma_1 \tag{7.16}$$

と四元数とパウリ行列とを対応させると $p, q.r$ にどんな値が許されるかを調べよう．この場合には i, j, k の代数と $\sigma_3, \sigma_2, \sigma_1$ の代数とから

$$p = -iqr \tag{7.17}$$
$$q = -ipr \tag{7.18}$$
$$r = -ipq \tag{7.19}$$

の方程式が得られる．これからこの 3 つの連立方程式を解いて p, q, r を求める手順をやはりメモしておこう．

(7.17),(7.18),(7.19) を辺々かけ合わせれば，

$$pqr = (-i)^3 p^2 q^2 r^2, \quad (p \neq 0, q \neq 0, r \neq 0)$$

したがって

$$pqr = -i \tag{7.20}$$

(7.17) に i をかけて

$$qr = ip \tag{7.21}$$

(7.21) を (7.20) に代入すれば

$$p^2 = -1$$
$$p = \pm i \tag{7.22}$$

まず $p=i$ の場合を考えよう．(7.21) に $p=i$ を代入すれば

$$qr=-1 \tag{7.23}$$

(7.18) に $p=i$ を代入すれば

$$q=r \tag{7.24}$$

(7.24) を (7.23) へ代入して

$$\begin{aligned} r^2&=-1 \\ r&=\pm i \end{aligned} \tag{7.25}$$

(7.25) を (7.24) へ代入して

$$q=\pm i \tag{7.26}$$

したがって $p=i$ の場合には解は

$$p=i, \qquad q=i, \qquad r=i \tag{E}$$

$$p=i, \qquad q=-i, \qquad r=-i \tag{F}$$

となる．

つぎに $p=-i$ の場合を考えよう．(7.21) に $p=-i$ を代入すれば

$$qr=1 \tag{7.27}$$

(7.18) に $p=-i$ を代入すれば

$$q=-r \tag{7.28}$$

(7.28) を (7.27) へ代入して

$$\begin{aligned} r^2&=-1 \\ r&=\pm i \end{aligned} \tag{7.29}$$

(7.29) を (7.28) へ代入して

$$q=\mp i \tag{7.30}$$

したがって $p=-i$ の場合には解は

$$p=-i, \qquad q=-i, \qquad r=i \tag{G}$$

$$p=-i, \qquad q=i, \qquad r=-i \tag{H}$$

となる．

$$i \to p\sigma_2, \quad j \to q\sigma_1, \quad k \to r\sigma_3$$

と四元数とパウリ行列とを対応させても

$$i \to p\sigma_1, \quad j \to q\sigma_3, \quad k \to r\sigma_2$$

と四元数とパウリ行列とを対応させても，これらは

$$i \to p\sigma_3, \quad j \to q\sigma_2, \quad k \to r\sigma_1$$

と四元数とパウリ行列とを対応させたときと同じ方程式 (7.17),(7.18),(7.19) が得られるので，p,q,r の解は (E),(F),(G),(H) と同じである．これは (2,1,3),(2,1,3),(1,3,2) が (1,2,3) の奇置換であることによっている．

参考文献

[1] 矢野　忠,『四元数の発見』（海鳴社，2014）115-118

[2] 河野俊丈,『新版　組みひもの数理』（遊星社，2009）121-123

[3] 江沢洋，島和久,『群と表現』（岩波講座　応用数学 [基礎 8]）（岩波書店，1994）126-130, 156-166

[4] 高木貞治,『代数学講義』（共立出版，1948）356

[5] 志村五郎,『数学をいかに使うか』（ちくま学芸文庫，2010）53-62

[6] H. ゴールドスタイン,『古典力学』上（第２版）（吉岡書店，1983）193-206

[7] http://en.wikipedia.org/wiki/Quaternion

[8] http://ja.wikipedia.org/wiki/四元数

[9] J. Stillwell（上野健爾・浪川幸彦　監訳）『数学のあゆみ』下（朝倉書店）184-186

[10] 山内恭彦,『回転群とその表現』（岩波書店，1957）82-94

[11] E. P. Wigner, “Group Theory ” (Academic Press) 158

[12] 堀源一郎,『ハミルトンと四元数』（海鳴社，2007）122-126

[13] E. Cartan, “The Theory of Spinors” (Dover Pub., 1981) 45, 70

編集後記

今号（6 巻 5 号）は通巻で 50 号の記念号である．多くの方々に記念号へのご寄稿をいただいたことに感謝する．今後共に気を引き締めて編集・発行を行っていきたい．

当初の予定では今号には一般の投書原稿を一つも掲載しないつもりであった．しかし，この記念号に少なくとも一つの原稿を掲載すれば，すでに投稿された論文を 6 巻 6 号にページ制限を越えないで掲載できそうだと判断された．それで，はじめの方針を変更して私のエッセイを載せた．

投稿者は自分の投稿原稿の掲載が 3ヶ月遅れたからといって文句を言われる方はどなたもおられないが，投稿原稿がたまって，積み残しがでるのが私は好きではない．そのため同じ月に 3 つの号を発行するという事態が続いている．

編集に関係のない人から見ると無理にひと月に 3 つもの号を発行しなくてもいいではないかと思われるだろうから，これは私のいだく特別な感情であろう．しかし，月に 3 つの号の発行が限度であって，それより多い号を発行するのは一人の人間の限界を越える．今後，心ならずも論文の掲載が遅れるとか，掲載をお断りする場合も生じるかもしれない．

（矢野　忠）