

# 数学・物理通信

6卷9号      2016年12月

編集 新関章三・矢野 忠

2016年12月1日

## 目次 (Contents)

1. 量子力学における周期ポテンシャル問題 (3)	世戸憲治	2
2. 遅れ制御の暖房機	世戸憲治	11
3. コサインの正負冪乗の有限和とチェビシェフ多項式	中西 襄	21
4. 編集後記	矢野 忠	31
1. A Periodic Potential Problem in Quantum Mechanics (3)	Kenji SETO	2
2. A Heating Unit with a Delay Control	Kenji SETO	11
3. Finite Sums of Positive and Negative Powers of Cosines and Čebyšev Polynomials	Noboru NAKANISHI	21
4. Editorial Comments	Tadashi YANO	31

# 量子力学における周期ポテンシャル問題 (3)

世戸 憲治\*

## A Periodic Potential Problem in Quantum Mechanics (3)

Kenji SETO\*

### 1 はじめに

前々回の「量子力学における周期ポテンシャル問題 (1)」(「数学・物理通信」6 巻 3 号) ではポテンシャルとしてデルタ関数が周期的に並んだものを, また, 前回の「量子力学における周期ポテンシャル問題 (2)」(「数学・物理通信」6 巻 4 号) ではポテンシャルとして周期的な矩形波型のものを扱った. ここでは, ポテンシャル  $V(x)$  として, 周期  $\ell$  を持ち  $V(x + \ell) = V(x)$  で,  $n$  を整数として,  $n\ell \leq x < (n+1)\ell$  の  $x$  に対し,

$$V(x) = \frac{V_0}{\ell}(x - n\ell) \quad (1.1)$$

という形のもの扱う. これは鋸歯状のポテンシャルである. ここに,  $V_0$  はエネルギーの次元を持つ正定数とする. あるいは,  $[ ]$  を Gauss 記号として,

$$V(x) = V_0 \left( \frac{x}{\ell} - \left[ \frac{x}{\ell} \right] \right) \quad (1.2)$$

とよりスマートな形で表すこともできる. このときの Schrödinger 方程式は, 電子の質量を  $m$ , エネルギーを  $E$  として,

$$\left[ -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2}{dx^2} + V_0 \left( \frac{x}{\ell} - \left[ \frac{x}{\ell} \right] \right) \right] \Psi = E\Psi \quad (1.3)$$

となるが, ここでは数式簡略化のため, 座標  $x$ , ポテンシャルの大きさ  $V_0$ , および, エネルギー  $E$  を無次元化し,

$$x/\ell \rightarrow x, \quad \frac{2m\ell^2}{\hbar^2} V_0 \rightarrow V_0, \quad \frac{2m\ell^2}{\hbar^2} E \rightarrow E \quad (1.4)$$

と改めて置き直すことにする. この無次元化で方程式は

$$\left[ \frac{d^2}{dx^2} - V_0(x - [x]) + E \right] \Psi = 0 \quad (1.5)$$

となる. このときのポテンシャルは周期 1 の周期関数となることに注意する.

---

\* 北海学園大学名誉教授

E-mail: seto@pony.ocn.ne.jp

## 2 方程式の解法

初めに,  $0 \leq x < 1$  の範囲での方程式

$$\left[ \frac{d^2}{dx^2} - V_0 x + E \right] \Psi = 0 \quad (2.1)$$

を解くことにする. ここで, 数式簡素化のため

$$\mu = V_0^{1/3}, \quad \kappa = EV_0^{-2/3} (= E\mu^{-2}) \quad (2.2)$$

なる変数を導入すると, 方程式は

$$\left[ \frac{d^2}{dx^2} - \mu^3 x + \mu^2 \kappa \right] \Psi = 0 \quad (2.3)$$

となり, さらに,  $x$  から  $z$  への変数変換

$$z = \mu x - \kappa \quad (2.4)$$

を施すと, 方程式は

$$\left[ \frac{d^2}{dz^2} - z \right] \Psi = 0 \quad (2.5)$$

となる. これは Airy の微分方程式であり, この一般解は第 1 種, 第 2 種の Airy 関数  $\text{Ai}(z)$ ,  $\text{Bi}(z)$ , および, 任意定数  $C, D$  を用いて

$$\Psi = C\text{Ai}(z) + D\text{Bi}(z) \quad (2.6)$$

と表される. Airy 関数については, 「Bessel 関数と Airy 関数」(「数学・物理通信」4 巻 3 号) で詳しく述べたので, ここでは公式だけを述べるにとどめる. この関数は,  $\pm 1/3$  次の Bessel 関数を用いて,

$$\text{Ai}(z) = \begin{cases} \frac{1}{\pi} \sqrt{\frac{z}{3}} K_{1/3}\left(\frac{2}{3}z^{3/2}\right), & z \geq 0 \\ \frac{1}{3} \sqrt{-z} \left[ J_{1/3}\left(\frac{2}{3}(-z)^{3/2}\right) + J_{-1/3}\left(\frac{2}{3}(-z)^{3/2}\right) \right], & z < 0 \end{cases} \quad (2.7)$$

$$\text{Bi}(z) = \begin{cases} \sqrt{\frac{z}{3}} \left[ I_{1/3}\left(\frac{2}{3}z^{3/2}\right) + I_{-1/3}\left(\frac{2}{3}z^{3/2}\right) \right], & z \geq 0 \\ \sqrt{-\frac{z}{3}} \left[ J_{-1/3}\left(\frac{2}{3}(-z)^{3/2}\right) - J_{1/3}\left(\frac{2}{3}(-z)^{3/2}\right) \right], & z < 0 \end{cases} \quad (2.8)$$

と表される. ここに,  $J$  は第 1 種の Bessel 関数, また,  $I$  および,  $K$  は, それぞれ, 第 1 種, 第 2 種の変形 Bessel 関数である. これらの式は,  $z$  が正の場合と負の場合で, 見かけ上異なる形で定義されているが, 実際は, 整関数 (entire function) で, Bessel 関数の級数展開式を用いて展開したときは,  $z$  の正負でまったく同じ式,

$$\begin{aligned} \text{Ai}(z) &= \frac{1}{3^{2/3}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{3n}}{n! \Gamma(n + \frac{2}{3}) 3^{2n}} - \frac{1}{3^{4/3}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{3n+1}}{n! \Gamma(n + \frac{4}{3}) 3^{2n}} \\ \text{Bi}(z) &= \frac{1}{3^{1/6}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{3n}}{n! \Gamma(n + \frac{2}{3}) 3^{2n}} + \frac{1}{3^{5/6}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{3n+1}}{n! \Gamma(n + \frac{4}{3}) 3^{2n}} \end{aligned} \quad (2.9)$$

になる。これら関数の  $z$  が正で十分大きいときの漸近形は、Bessel 関数の漸近形から求められ、

$$\text{Ai}(z) \sim \frac{e^{-\frac{2}{3}z^{3/2}}}{2\sqrt{\pi}z^{1/4}}, \quad \text{Bi}(z) \sim \frac{e^{\frac{2}{3}z^{3/2}}}{\sqrt{\pi}z^{1/4}} \quad (2.10)$$

また、 $z$  が負で十分大きいときの漸近形は、

$$\text{Ai}(z) \sim \frac{\sin\left(\frac{2}{3}(-z)^{3/2} + \frac{\pi}{4}\right)}{\sqrt{\pi}(-z)^{1/4}}, \quad \text{Bi}(z) \sim \frac{\cos\left(\frac{2}{3}(-z)^{3/2} + \frac{\pi}{4}\right)}{\sqrt{\pi}(-z)^{1/4}} \quad (2.11)$$

となる。これらの式は  $z > 2$  の領域、あるいは  $z < -2$  の領域で良い近似を与える。

ここで (2.6) 式の解を元の変数  $x$  で表すと、

$$\Psi(x) = C\text{Ai}(\mu x - \kappa) + D\text{Bi}(\mu x - \kappa) \quad (2.12)$$

となる。ポテンシャルが周期的だからといって、波動関数も周期的になるわけではない。Floquet の定理によると、一般に、周期が 1 つ上がるごとに、波動関数は、前の周期のものに、伝播数  $K$ , ( $0 < K < \pi$ ) を用いた位相  $e^{iK}$  を掛けたもの、または、位相  $e^{-iK}$  を掛けたものになることが知られている。この位相における正負の符号は、波動関数が縮退していることを表すが、どちらを採用しても計算方式は同じになるので、以下では位相としてプラスの方  $e^{iK}$  の方で話を進める \*1。この Floquet の定理を用いると、 $0 \leq x < 1$  の範囲での解 (2.12) 式のつぎの周期にあたる  $1 \leq x < 2$  での波動関数  $\Psi(x)$  は

$$\Psi(x) = e^{iK} \left[ C\text{Ai}(\mu(x-1) - \kappa) + D\text{Bi}(\mu(x-1) - \kappa) \right] \quad (2.13)$$

となる。つぎに成すべきことは、これら 2 つの解、(2.12) (2.13) 式を、 $x = 1$  で、関数自身とその導関数が連続となるように繋ぐことである。結果は、

$$\begin{aligned} [\text{Ai}(\mu - \kappa) - e^{iK}\text{Ai}(-\kappa)]C + [\text{Bi}(\mu - \kappa) - e^{iK}\text{Bi}(-\kappa)]D &= 0 \\ [\text{Ai}'(\mu - \kappa) - e^{iK}\text{Ai}'(-\kappa)]C + [\text{Bi}'(\mu - \kappa) - e^{iK}\text{Bi}'(-\kappa)]D &= 0 \end{aligned} \quad (2.14)$$

となる。ここに、プライム付の  $\text{Ai}'$ ,  $\text{Bi}'$  は  $\text{Ai}$ ,  $\text{Bi}$  の導関数を表す。これを行列形式で表すと、

$$\begin{pmatrix} \text{Ai}(\mu - \kappa) - e^{iK}\text{Ai}(-\kappa) & \text{Bi}(\mu - \kappa) - e^{iK}\text{Bi}(-\kappa) \\ \text{Ai}'(\mu - \kappa) - e^{iK}\text{Ai}'(-\kappa) & \text{Bi}'(\mu - \kappa) - e^{iK}\text{Bi}'(-\kappa) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C \\ D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (2.15)$$

となる。この式から  $C$ ,  $D$  が両方ともゼロにならないためには、その係数行列式の値がゼロでなければならない。その前に、Airy 関数  $\text{Ai}$ ,  $\text{Bi}$  からできる Wronskian を

$$W(z) = \begin{vmatrix} \text{Ai}(z) & \text{Bi}(z) \\ \text{Ai}'(z) & \text{Bi}'(z) \end{vmatrix} \quad (2.16)$$

と定義しておく。この  $W(z)$  は  $\text{Ai}(z)$ ,  $\text{Bi}(z)$  が方程式 (2.5) を満たす独立解であることからゼロでない定数となるはずであるが、実際、 $\text{Ai}(z)$ ,  $\text{Bi}(z)$  に (2.7) (2.8) 式の  $z \geq 0$  の方を使い、変形 Bessel 関数における公式

$$I'_\alpha(z)I_{-\alpha}(z) - I_\alpha(z)I'_{-\alpha}(z) = \frac{2\sin(\alpha\pi)}{\pi z} \quad (2.17)$$

\*1  $K = 0$ ,  $\pi$  のときは、 $e^{iK}$  と  $e^{-iK}$  が等しくなるので、そのときは波動関数を  $K$  で微分したものがもう 1 つの独立解を与えるはずであるが、ここではこの場合を例外として扱わない

を用いると

$$W(z) \equiv \frac{1}{\pi} \quad (2.18)$$

となる. これを用いて, (2.15) 式の係数行列式の値がゼロとなる式は

$$\cos(K) = \frac{\pi}{2} [\text{Ai}(-\kappa)\text{Bi}'(\mu - \kappa) + \text{Ai}(\mu - \kappa)\text{Bi}'(-\kappa) - \text{Ai}'(-\kappa)\text{Bi}(\mu - \kappa) - \text{Ai}'(\mu - \kappa)\text{Bi}(-\kappa)] \quad (2.19)$$

となる. この式から  $K$  が実数で求まるためには右辺の絶対値が 1 以下でなければならない. また, このとき  $\cos(K)$  が  $K$  の偶関数であることから, 正負 2 つの  $K$  の値が求められるが, これが前述した位相に  $e^{\pm iK}$  の 2 つが存在することに対応している. これによって,  $\mu, \kappa$  が満たすべき範囲が決まり, さらに (2.2) 式から固定された  $V_0$  に対するエネルギー  $E$  の範囲, すなわち, エネルギーのバンド構造が決まる. したがって, この式がこの場合の固有値方程式となる.

以下, 波動関数に含まれる定数  $C, D$  を, (2.14) の第 1 式が満たされるように,

$$C = [\text{Bi}(\mu - \kappa) - e^{iK}\text{Bi}(-\kappa)], \quad D = -[\text{Ai}(\mu - \kappa) - e^{iK}\text{Ai}(-\kappa)] \quad (2.20)$$

と決めておき,  $0 \leq x < 1$  での波動関数を

$$\Psi(x) = [\text{Bi}(\mu - \kappa) - e^{iK}\text{Bi}(-\kappa)]\text{Ai}(\mu x - \kappa) - [\text{Ai}(\mu - \kappa) - e^{iK}\text{Ai}(-\kappa)]\text{Bi}(\mu x - \kappa) \quad (2.21)$$

と書いておく. もちろんこれは規格化されたものではない. Floquet の定理によると, 周期が 1 つ上がる毎に位相  $e^{iK}$  が付くので,  $n$  を任意の整数として,  $n \leq x < n+1$  での波動関数  $\Psi(x)$  は, 以下, エネルギー依存性を明示することにして,

$$\Psi(x, E) = e^{inK} \left[ [\text{Bi}(\mu - \kappa) - e^{iK}\text{Bi}(-\kappa)]\text{Ai}(\mu(x-n) - \kappa) - [\text{Ai}(\mu - \kappa) - e^{iK}\text{Ai}(-\kappa)]\text{Bi}(\mu(x-n) - \kappa) \right] \quad (2.22)$$

と表される.

### 3 固有関数の規格化

一般に異なる 2 つのエネルギー  $E, E'$  を考える. これに属する  $\kappa, K$  を, それぞれ,  $\kappa, \kappa'$  および,  $K, K'$  とする. このときの規格化積分は, (2.22) 式を考慮すると,

$$\int_{-\infty}^{\infty} \overline{\Psi(x, E)}\Psi(x, E')dx = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int_n^{n+1} \overline{\Psi(x, E)}\Psi(x, E')dx = \left( \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{-i(K-K')n} \right) \int_0^1 \overline{\Psi(x, E)}\Psi(x, E')dx \quad (3.1)$$

となる. この和の部分は, 超関数公式

$$\lim_{M \rightarrow \infty} \sum_{n=-M}^M e^{-i(K-K')n} = 2\pi\delta(K - K'), \quad 0 < K, K' < \pi \quad (3.2)$$

が使える, デルタ関数を用いた直交性がでる. つぎに, 積分の部分を実行するには,  $E, E'$  に対応する (2.3) 式を

$$\left[ \frac{d^2}{dx^2} - \mu^3 x + \mu^2 \kappa \right] \overline{\Psi(x, E)} = 0, \quad \left[ \frac{d^2}{dx^2} - \mu^3 x + \mu^2 \kappa' \right] \Psi(x, E') = 0 \quad (3.3)$$

と書いておく。ただし、 $E$  に対応する方は複素共役を取ったものにしておく。この第 1 式に  $\Psi(x, E')$  を、また、第 2 式には  $\overline{\Psi(x, E)}$  を掛けてから、辺々を引き算すると、

$$\frac{d}{dx} \left[ \frac{d\overline{\Psi(x, E)}}{dx} \Psi(x, E') - \overline{\Psi(x, E)} \frac{d\Psi(x, E')}{dx} \right] + \mu^2(\kappa - \kappa') \overline{\Psi(x, E)} \Psi(x, E') = 0 \quad (3.4)$$

となる。これを 0 から 1 まで積分すると

$$\int_0^1 \overline{\Psi(x, E)} \Psi(x, E') dx = \frac{1}{\mu^2(\kappa - \kappa')} \left[ \overline{\Psi(x, E)} \frac{d\Psi(x, E')}{dx} - \frac{d\overline{\Psi(x, E)}}{dx} \Psi(x, E') \right] \Big|_0^1 \quad (3.5)$$

を得る。この右辺に (2.21) 式を代入するわけだが、この計算はかなり面倒になる。代入したときは 64 項がでてくるが、そのうちの半分は相殺して、32 項となり、さらに、Wronskian の (2.18) 式を用いると、 $e^{-iK}$ ,  $e^{iK'}$  に比例する項は半分に減らすことができ、最終的に 20 項が残る。結果をうまくまとめるために、後で重要な働きをする因子  $S(\kappa)$  を

$$S(\kappa) = \text{Ai}(-\kappa)\text{Bi}(\mu - \kappa) - \text{Ai}(\mu - \kappa)\text{Bi}(-\kappa) \quad (3.6)$$

と定義する。これを用いて、(3.5) 式は

$$\begin{aligned} \int_0^1 \overline{\Psi(x, E)} \Psi(x, E') dx &= \frac{1}{\mu(\kappa - \kappa')} \left[ \right. \\ & S(\kappa) [\text{Ai}(\mu - \kappa')\text{Bi}'(-\kappa') - \text{Ai}'(-\kappa')\text{Bi}(\mu - \kappa')] - S(\kappa') [\text{Ai}(\mu - \kappa)\text{Bi}'(-\kappa) - \text{Ai}'(-\kappa)\text{Bi}(\mu - \kappa)] \\ & + e^{i(K' - K)} S(\kappa) [\text{Ai}(-\kappa')\text{Bi}'(\mu - \kappa') - \text{Ai}'(\mu - \kappa')\text{Bi}(-\kappa')] - e^{i(K' - K)} S(\kappa') [\text{Ai}(-\kappa)\text{Bi}'(\mu - \kappa) - \text{Ai}'(\mu - \kappa)\text{Bi}(-\kappa)] \\ & \left. + \frac{1}{\pi} (e^{iK'} + e^{-iK}) [S(\kappa') - S(\kappa)] \right] \quad (3.7) \end{aligned}$$

と、それでも少し長い式になる。ここに、この式で  $\kappa \rightarrow \kappa'$  のときは、0/0 の不定形になっていることに注意する。さらに、ここで、固有値方程式 (2.19) を用いてさらに変形すると、

$$\begin{aligned} \int_0^1 \overline{\Psi(x, E)} \Psi(x, E') dx &= \frac{1}{\mu(\kappa - \kappa')} \left[ [e^{i(K' - K)} - 1] S(\kappa) [\text{Ai}(-\kappa')\text{Bi}'(\mu - \kappa') - \text{Ai}'(\mu - \kappa')\text{Bi}(-\kappa')] \right. \\ & - [e^{i(K' - K)} - 1] S(\kappa') [\text{Ai}(-\kappa)\text{Bi}'(\mu - \kappa) - \text{Ai}'(\mu - \kappa)\text{Bi}(-\kappa)] \\ & \left. + \frac{1}{\pi} S(\kappa) [2 \cos(K') - (e^{iK'} + e^{-iK})] - \frac{1}{\pi} S(\kappa') [2 \cos(K) - (e^{iK'} + e^{-iK})] \right] \quad (3.8) \end{aligned}$$

となる。元の規格化積分 (3.1) 式は、この式と、デルタ関数  $\delta(K - K')$  の (3.2) 式との積となるので、

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} \overline{\Psi(x, E)} \Psi(x, E') dx &= \frac{2\pi}{\mu(\kappa - \kappa')} \left[ [e^{i(K' - K)} - 1] S(\kappa) [\text{Ai}(-\kappa')\text{Bi}'(\mu - \kappa') - \text{Ai}'(\mu - \kappa')\text{Bi}(-\kappa')] \right. \\ & - [e^{i(K' - K)} - 1] S(\kappa') [\text{Ai}(-\kappa)\text{Bi}'(\mu - \kappa) - \text{Ai}'(\mu - \kappa)\text{Bi}(-\kappa)] \\ & \left. + \frac{1}{\pi} S(\kappa) [2 \cos(K') - (e^{iK'} + e^{-iK})] - \frac{1}{\pi} S(\kappa') [2 \cos(K) - (e^{iK'} + e^{-iK})] \right] \delta(K - K') \quad (3.9) \end{aligned}$$

となる。ここで 1 つ注意が必要である。 $K$  の値は各バンドごとに、 $0 < K < \pi$  の値をとるので、バンドが異なれば  $K = K'$  であっても  $\kappa = \kappa'$  になるとは限らないということである。したがって、2 個のエネルギー  $E, E'$  が異なるバンドに属するときは、例え  $K = K'$  であっても  $\kappa \neq \kappa'$  なのでこの式の値はゼロとなり、異なるバンド間の直交性がでる。

$E, E'$  が同じバンドに属するときこの式は  $0/0$  の不定形となるので, l'Hôpital の定理にしたがって, 分母, 分子を, それぞれ,  $\kappa$  で偏微分してから,  $\kappa' = \kappa$  とおく. このとき, もちろん,  $K$  は  $\kappa$  の関数  $K(\kappa)$  として扱う. 結果は意外にきれいな形,

$$\int_{-\infty}^{\infty} \overline{\Psi(x, E)} \Psi(x, E') dx = -\frac{4}{\mu} S(\kappa) \frac{d \cos(K)}{d\kappa} \delta(K - K') \quad (3.10)$$

となる. この式のデルタ関数を除いた部分は正定値になるはずであるが, 固有値方程式 (2.19), および, Airy 関数  $Ai, Bi$  が方程式 (2.5) を満たすことから,

$$\frac{d \cos(K)}{d\kappa} = -\frac{\pi\mu}{2} S(\kappa) \quad (3.11)$$

となるので, 直交性の式は

$$\int_{-\infty}^{\infty} \overline{\Psi(x, E)} \Psi(x, E') dx = 2\pi S^2(\kappa) \delta(K - K') \quad (3.12)$$

と確かに正定値であることが確かめられる. あるいは,  $\delta(K - K')$  を  $\delta(E - E')$  で表すと,

$$\int_{-\infty}^{\infty} \overline{\Psi(x, E)} \Psi(x, E') dx = N^2(E) \delta(E - E') \quad (3.13)$$

となる. ここに, 規格化定数  $N^2(E)$  を

$$N^2(E) = 4\mu |S(\kappa)| \sin(K) \quad (3.14)$$

と定義する. これにより,  $\Psi(x, E)/N(E)$  が規格化された固有関数となる.

ついでながら, ここで, 流れ関数についても調べておく. (1.4) 式における変数の無次元化を, 時間  $t$  についても

$$\frac{\hbar}{m\ell^2} t \rightarrow t \quad (3.15)$$

と無次元化しておく, 時間依存型の Schrödinger 方程式は

$$\left[ -\frac{\partial^2}{\partial x^2} + V_0(x - [x]) \right] \Psi = 2i \frac{\partial \Psi}{\partial t} \quad (3.16)$$

となる. これから, 連続の方程式

$$\frac{\partial(\overline{\Psi}\Psi)}{\partial t} + \frac{\partial j}{\partial x} = 0, \quad j = \frac{1}{2i} \overline{\Psi} (\overrightarrow{\partial}_x - \overleftarrow{\partial}_x) \Psi \quad (3.17)$$

が導かれる. ここで,  $\Psi$  として, (2.21) 式を用いて, 流れ関数  $j$  を求めてみると,

$$j = \frac{\mu}{\pi} S(\kappa) \sin(K) \quad (3.18)$$

となる. この式から, 次節の数値計算例で見ると,  $S(\kappa)$  の符号はバンド毎に正負の値をとること, および, ここでは,  $0 < K < \pi$  としているので, 流れの方向は, バンドごとにエネルギーの小さい方から正と負の値を繰り返す. また, 先にも述べたようにこのモデルでは波動関数の縮退のため,  $K$  の符号を変えた場合も存在するが, そのときは, バンドごとに小さい方から負と正の値を繰り返すことになる.

ここで扱ったポテンシャルは, 鋸歯状という方向性があるものなので, 右進行波と左進行波で大きな差がでるものと期待したが, 結果的にはこれまでのものとの違いは存在しないことになる.



## 4 数値計算例

ここでは、固有値方程式 (2.19) の数値解析を試みる。このとき、Airy 関数  $\text{Ai}(z)$ ,  $\text{Bi}(z)$  については、 $|z| \leq 2$  のときは、 $n$  の和を 50 までとった級数展開式 (2.9) を、また、 $|z| > 2$  のときは、(2.10) (2.11) 式の漸近形を用いることにする。

初めに、この (2.19) 式において、 $V_0$  の値を一定の値に固定し、エネルギー  $E$  の ( $0 \leq E < 425$ ) の範囲に対し、伝播数  $K$  を求めたものを図 1, 図 2 に示す。これらのうち、図 1, 図 2 は、それぞれ、 $V_0 = 100$ ,  $V_0 = 200$  に対応する。

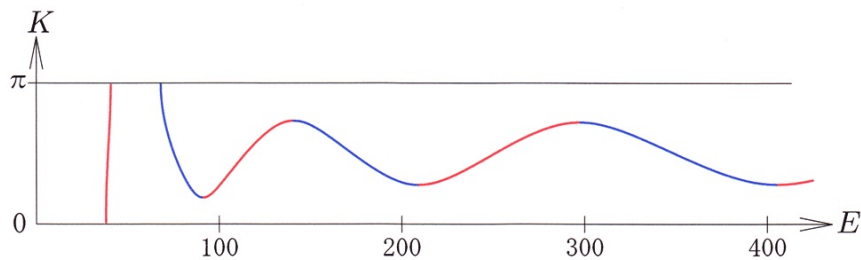


図 1  $V_0 = 100$  に固定したときの  $E$  と  $K$  の関係

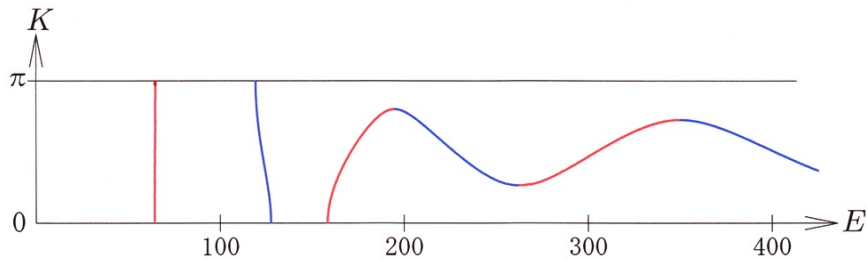


図 2  $V_0 = 200$  に固定したときの  $E$  と  $K$  の関係

これらの図についている曲線の色は、(3.6) 式で定義した  $S(\kappa)$  が正のときは赤、負のときは青となるように付けたものである。この図から分かるとおり、図 1 では、 $E \cong 40$  近傍に独立したバンドが存在するが、 $E \cong 70$  近傍からは、完全なバンド構造を作らずに連続スペクトラムになっており、 $K$  の値は、 $0$ ,  $\pi$  を超えない範囲内で振動している。しかもこの振動は、エネルギー  $E$  が大きくなるにつれ、その振幅は小さくなり、周期は大きくなる。 $E$  が無限大の極限では Airy 関数は (2.11) の漸近形からゼロとなるので、 $K$  の値は  $\pi/2$  に収束していくはずである。また、図 2 では、 $E \cong 65$ ,  $120$  近傍に 2 個のバンドが存在するが、 $E \cong 160$  近傍以上では、同じように、連続スペクトラムになっている。これらの事実は、いままでの周期ポテンシャルには見られなかった大きな特徴である。本来、バンドというのは、エネルギーが幅を持ちながら離散的になることを言うが、この連続スペクトラムになる部分は、バンドが癒着して不完全なバンドになったものと考えられる。前節で扱った固有関数の規格化のところというバンドとは、この不完全なバンドの部分も含めた議論と理解すべきものである。

図 3 は、 $V_0$  の値を固定せずに、 $V_0$  と  $E$  の 2 次元空間を走査させながら各点ごとに固有値方程式 (2.19) の右辺の値を計算させ、それが 1 のときは赤点で、また、 $-1$  のときは青点でプロットし、その値がこの中間の値のときは、赤から青まで連続的に変化する色で点をプロットしたものである。この図からも、おおよそ、 $V_0 > E$

の領域ではエネルギーバンド構造が現れるが、 $V_0 < E$  の領域では、完全に連続スペクトラムになることが見てとれる。

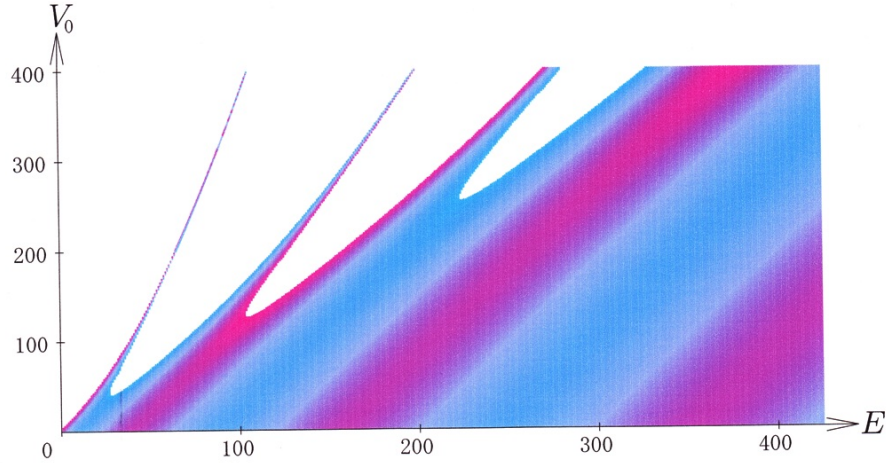


図3  $V_0$  と  $E$  の関係

## 5 おわりに

今回、鋸歯状ポテンシャルという何の役に立つのか分かりもしないようなものを敢えて解析してみたが、最後になってそれなりの効果はあったものと思われる。すなわち、《伝播数》、または、《波数》と呼ばれる  $K$  の名前のことである。本によっては、 $e^{iK}$ 、 $\cos(K)$  が周期  $2\pi$  を持つことに便乗して、エネルギーバンドが1つ上がるごとに、 $K$  の値に  $2\pi$  ずつ加えていき、エネルギーが上がるごとに  $K$  の値も増加していき、こともあろうに  $K$  のことを《波数》と言っているものがある。もっとも、(2.22) 式をガウス記号  $[\ ]$  で表すと、

$$\Psi(x, E) = e^{i[x]K} \left[ [\text{Bi}(\mu - \kappa) - e^{iK} \text{Bi}(-\kappa)] \text{Ai}(\mu(x - [x]) - \kappa) - [\text{Ai}(\mu - \kappa) - e^{iK} \text{Ai}(-\kappa)] \text{Bi}(\mu(x - [x]) - \kappa) \right] \quad (5.1)$$

となり、さらに指数関数のところを変形すると、

$$\begin{aligned} & \Psi(x, E) \\ &= e^{iKx} e^{-i(x-[x])K} \left[ [\text{Bi}(\mu - \kappa) - e^{iK} \text{Bi}(-\kappa)] \text{Ai}(\mu(x - [x]) - \kappa) - [\text{Ai}(\mu - \kappa) - e^{iK} \text{Ai}(-\kappa)] \text{Bi}(\mu(x - [x]) - \kappa) \right] \\ &= e^{iKx} \times [\text{周期関数}] \end{aligned} \quad (5.2)$$

となるので、 $K$  のことを《波数》と言いたくなる気持ちは理解できなくもない。しかし、正しい波数の定義は、

$$\Psi(x, E) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{ikx} \hat{\Psi}(k, E) dk \quad (5.3)$$

と波動関数を Fourier 変換したときの積分変数  $k$  のことである。また、《伝播数》にしても《伝播関数》(propagator) から想像されるイメージとはまったく結びつかない。

この《伝播数》《波数》という命名は、前から不思議なものと同様に感じていた。ここで扱ったようにバンドと連続スペクトラムが混在するときは《伝播》とか《波数》という意味合いはまったく存在しないし、ましてや、

(3.18) 式で示したように流れ関数  $j$  も  $K$  に比例している訳でもない.  $K$  は単に Floquet の定理にでてくる周期が 1 つあがるときの位相を決める数という意味しかないはずである. したがって,  $K$  は《位相定数》, あるいは定理発見者の名前を入れて, 《Floquet の位相定数》などという方がよいのではと考えられるが, いかがなものだろうか.

[ 謝辞 ]

今回もこの原稿を書くにあたって, 京都大学名誉教授の中西襄先生にご精読いただき, たくさんのコメントをいただきました. ここに, 謹んで感謝いたします.

# 遅れ制御の暖房機

世戸 憲治\*

## A Heating Unit with a Delay Control

Kenji SETO\*

### 1 はじめに

最近、中西襄先生が書かれた本「微分方程式」(丸善出版, 2016年)を読んできた。その本の中の第3章に「微分演算子の解析学」というのがあって\*<sup>1</sup>, 何かこれを使ったおもしろい例題が作れないかと考えてみた。いろいろ探した結果, ここで述べる「遅れ制御の暖房機」というのを思いついて書くことにした。微分演算子法というのは, 筆者にとっては, これまでほとんど扱ったことがなく, 難解なものであったが, ある程度は, 当を得たものができたと思っている。

### 2 方程式の導入

冬になると, 当然のことながら気温が下がるために, 生活のためには暖房機が欠かせなくなる。ここでは, 外気温と室温の関係を表わす方程式を作り, それが時間的にどのように変化するかを調べることにする。外気温を  $T_E$ , 暖房機の設定温度を  $T_0$ , また, 時刻  $t$  における室温を  $T(t)$  とする。室内から外に, 単位時間あたりに逃げていく熱量は, 温度差  $T(t) - T_E$  に比例し, これを家全体の熱容量で割ったものが, 単位時間あたりの温度降下となるので, これを  $a[T(t) - T_E]$  とする。また, 暖房器が, 単位時間に発熱する量は, 設定温度と室温との差に比例するものとし, これを同じく家全体の熱容量で割ったものが, 単位時間あたりの温度上昇を与える。ただし, ここでは, 暖房機が室温を感知してから実際に発熱し, 室内が温まるまでに時間  $\tau$  だけの遅れがでるものとし, 暖房機による単位時間あたりの温度上昇を  $b[T_0 - T(t - \tau)]$  とする。これらをまとめると, 室内の温度変化を表す方程式は,

$$\frac{d}{dt}T(t) = -a[T(t) - T_E] + b[T_0 - T(t - \tau)] \quad (2.1)$$

となる。ここで,  $a, b$  は時間の逆数の次元を持つ量であることに注意する。

ここまでは,  $T_E < T_0$  と想定して, 暖房機の設定としてきたが, これを  $T_E > T_0$  とすると, これは冷房機による温度変化にもそのまま使える式となる。

\* 北海学園大学名誉教授

E-mail: seto@pony.ocn.ne.jp

\*<sup>1</sup> 演算子法に関しては, 「数学・物理通信」(3巻5号「非可換量の係数をもつ線形常微分方程式の解法」中西襄)にも載っている。

### 3 方程式の解法

初めに数式簡素化のため、遅れ時間の  $\tau$  を時間の単位に取ることにして、 $t$ ,  $a$ ,  $b$  を無次元化し、

$$t/\tau \rightarrow t, \quad \tau a \rightarrow a, \quad \tau b \rightarrow b \quad (3.1)$$

と、改めておき直すことにする。この変換で方程式は、

$$\frac{d}{dt}T(t) = -a[T(t) - T_E] + b[T_0 - T(t-1)] \quad (3.2)$$

となる。この方程式を少し書き直して、

$$\frac{d}{dt}T(t) + a\left[T(t) - \frac{aT_E + bT_0}{a+b}\right] + b\left[T(t-1) - \frac{aT_E + bT_0}{a+b}\right] = 0 \quad (3.3)$$

とする。ここで、従属変数を

$$S(t) = T(t) - \frac{aT_E + bT_0}{a+b} \quad (3.4)$$

と変換すると、方程式は、

$$\frac{d}{dt}S(t) + aS(t) + bS(t-1) = 0 \quad (3.5)$$

となる。さらに、この両辺に  $e^{at}$  を掛けて、まとめ直すと、

$$\frac{d[e^{at}S(t)]}{dt} + b e^{at}S(t-1) = 0 \quad (3.6)$$

となるので、ここで、さらに、

$$U(t) = e^{at}S(t) \quad (3.7)$$

と定義しなおすと、

$$\frac{d}{dt}U(t) + cU(t-1) = 0 \quad (3.8)$$

となる。ここで、定数  $c$  を

$$c = b e^a \quad (3.9)$$

と定義する。

#### 3.1 微分演算子を用いた解法

ここで、 $U(t-1)$  を Taylor 展開すると、

$$U(t-1) = U(t) - \frac{1}{1!}U'(t) + \frac{1}{2!}U''(t) - \frac{1}{3!}U'''(t) + \dots = \left[1 - \frac{1}{1!}\frac{d}{dt} + \frac{1}{2!}\left(\frac{d}{dt}\right)^2 - \frac{1}{3!}\left(\frac{d}{dt}\right)^3 + \dots\right]U(t) \quad (3.10)$$

となるので、微分演算子を  $d/dt = D$  と書くことにすると、

$$U(t-1) = e^{-D}U(t) \quad (3.11)$$

となり，これから，方程式 (3.8) は

$$\varphi(D)U(t) = 0 \quad (3.12)$$

と表すことができる．ここに，微分演算子  $D$  の関数  $\varphi(D)$  を

$$\varphi(D) = D + ce^{-D} \quad (3.13)$$

と定義する．この方程式 (3.12) は，同次線形の無限階微分方程式である．これを解くためには，この演算子  $\varphi(D)$  を因数分解する必要がでてくる．そこで，この演算子  $D$  を普通の  $c$ -数のように扱い，

$$D = y + ix \quad (3.14)$$

とおいてみる．このとき，

$$\varphi(D) = y + ix + ce^{-y-ix} = y + ix + ce^{-y}(\cos x - i \sin x) \quad (3.15)$$

となるので，この実部，虚部を，それぞれ，ゼロとおくと，

$$y + ce^{-y} \cos x = 0, \quad x - ce^{-y} \sin x = 0 \quad (3.16)$$

となる．これら 2 式から，

$$y = -x \cot x, \quad y = \log\left(\frac{\sin x}{x}\right) + \log c \quad (3.17)$$

を得る．以下の図 1 に，これらの式をグラフ化したものを示す．ただし，この第 2 式に関しては， $c = 1$ ，したがって， $\log c = 0$  の場合だけを描いたので， $c$  の値を変えたときは，このグラフを上下に動かすことになる．

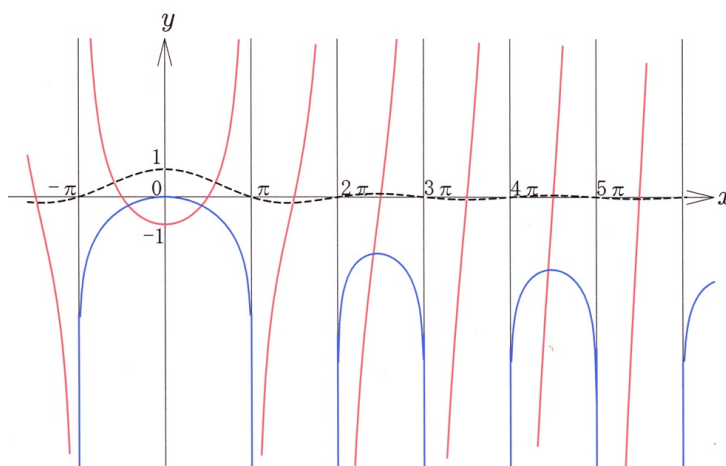


図 1 (3.17) 式のグラフ

この図では， $y = -x \cot x$  を赤線で， $y = \log(\sin x/x)$  を青線で示す．また，参考のために， $y = \sin x/x$  を黒点線で示してある．この図から，(3.17) の 2 本の式を満たす解は，赤線と青線の交点として，一般に，無限個存在し， $x > 0$  の側でいうと， $2k\pi < x < (2k+1)\pi$ ， $k = 0, 1, 2, \dots$  の各区間ごとに 1 個ずつ存在する．ただし， $c < 1/e$  では， $0 < x < \pi$  の区間の解は存在しなくなる．これらの解を， $x > 0$  の側で小さ

い方から,  $(x_k, y_k)$ ,  $k = 1, 2, 3, \dots$  とし,  $\alpha_k = y_k + ix_k$ ,  $k = 1, 2, 3, \dots$  とおくことにする. また,  $x < 0$  の側では, 扱っている式は 2 本とも  $x$  の偶関数なので,  $x$  の符号を変えたもの, すなわち, この複素共役  $\bar{\alpha}_k = y_k - ix_k$ ,  $k = 1, 2, 3, \dots$  が解となる.

以下, 「はじめに」にのところで述べた中西先生の本に従って, 議論を進めていくために, いったん, 方程式 (3.12) の右辺に  $F(t)$  を入れて,

$$\varphi(D)U(t) = F(t) \quad (3.18)$$

と, 非同次方程式にしておく.  $U(t)$  は  $t \geq -1$  の領域で定義されるが, これに合わせて  $F(t)$  も  $t \geq -1$  の領域で定義されるものとし,  $F(-1) = 0$  としておく. ただし, この  $F(t)$  は, 解が求まった後で, 全区間で  $F(t) \equiv 0$  とおくことにする. この式から, 形式的に,

$$U(t) = \frac{1}{\varphi(D)}F(t) = \frac{1}{\varphi(D)} \int_{-1}^{\infty} \delta(t-t')F(t')dt' = \frac{D}{\varphi(D)} \int_{-1}^{\infty} \theta(t-t')F(t')dt' \quad (3.19)$$

と書くことができる. ここに,  $\delta, \theta$  は, Dirac のデルタ関数, 単位階段関数である. ここで,  $1/\varphi(D)$  は  $\varphi(D)$  のゼロ点  $\alpha_k, \bar{\alpha}_k$  が求まっているものとする,

$$\frac{1}{\varphi(D)} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\varphi'(\alpha_k)(D - \alpha_k)} + \text{c.c.} \quad (3.20)$$

と部分分数に展開される. ここに, c.c. は前項の複素共役である. さらに,

$$\frac{D}{D - \alpha} \theta(t) = \frac{1}{1 - \alpha D^{-1}} \theta(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \alpha^n D^{-n} \theta(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha^n t^n}{n!} \theta(t) = e^{\alpha t} \theta(t) \quad (3.21)$$

となることを用いると, (3.19) 式は,

$$U(t) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\varphi'(\alpha_k)} \int_{-1}^t e^{\alpha_k(t-t')} F(t') dt' + \text{c.c.} \quad (3.22)$$

となる. これは一応の解ではあるが, このままでは,  $U(-1) = 0, U'(-1) = 0, U''(-1) = 0, \dots$  と,  $t = -1$  におけるすべての階数の微係数がゼロとなる.

方程式 (3.8) あるいは, (3.12) の解の形は, 初期条件によって大きく変化する. ここでは, 物理的条件から離れ, 最も簡単な解を与えるための初期条件として,

$$U(t) = 1, \quad -1 \leq t \leq 0 \quad (3.23)$$

と設定した場合を考えてみよう. 物理的考察による初期条件の設定に関しては, 「付録」で議論することにする. この初期条件を満たす解を得るためには, (3.22) 式における  $F(t)$  に

$$A(t) \equiv \varphi(D)[U(t)\theta(t+1)] - [\varphi(D)U(t)]\theta(t+1) \quad (3.24)$$

を付け加える. (3.13) 式を用いてこの新しく付け加える項を求めると,

$$A(t) = U(t)\delta(t+1) + cU(t-1)\theta(t) - cU(t-1)\theta(t+1) \quad (3.25)$$

となり, さらに (3.23) の初期条件を用いると,

$$A(t) = \delta(t+1) - c\theta(t+1)\theta(-t) \quad (3.26)$$

となる。(3.22) 式の  $F(t)$  にこの項を付け加え、その上で、本来存在しなかった  $F(t)$  をゼロとすると、

$$\begin{aligned} U(t) &= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\varphi'(\alpha_k)} \int_{-1}^t e^{\alpha_k(t-t')} [\delta(t'+1) - c\theta(t'+1)\theta(-t')] dt' + \text{c.c.} \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\varphi'(\alpha_k)} \left[ e^{\alpha_k(t+1)} - c \int_{-1}^{\text{Min}(t,0)} e^{\alpha_k(t-t')} dt' \right] + \text{c.c.} \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\varphi'(\alpha_k)} \left[ e^{\alpha_k(t+1)} + \frac{c}{\alpha_k} (e^{\alpha_k[t-\text{Min}(t,0)]} - e^{\alpha_k(t+1)}) \right] + \text{c.c.} \quad (3.27) \end{aligned}$$

となるが、これを場合分けして書くと、

$$U(t) = \begin{cases} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\varphi'(\alpha_k)} \left[ e^{\alpha_k(t+1)} + \frac{c}{\alpha_k} (1 - e^{\alpha_k(t+1)}) \right] + \text{c.c.}, & -1 \leq t \leq 0 \\ \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\varphi'(\alpha_k)} \left[ 1 + \frac{c}{\alpha_k} (e^{-\alpha_k} - 1) \right] e^{\alpha_k(t+1)} + \text{c.c.}, & 0 \leq t \end{cases} \quad (3.28)$$

と求められたことになる。ここで、注意が必要である。指数関数の  $e^{\alpha_k t}$  は、方程式 (3.8) あるいは (3.12) の解であるが、 $-1 \leq t \leq 0$  の領域では指数関数のほかに定数項が入ってくる。明らかに、この定数項は方程式の解ではない。これは、元来、方程式は  $t \geq 0$  の領域で満たされればよいからである。なお、初期条件により、この式で  $-1 \leq t \leq 0$  の領域では、

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\varphi'(\alpha_k)} \left[ e^{\alpha_k(t+1)} + \frac{c}{\alpha_k} (1 - e^{\alpha_k(t+1)}) \right] + \text{c.c.} \equiv 1, \quad -1 \leq t \leq 0 \quad (3.29)$$

となるはずであるが、これを直接確かめることはかなり困難そうで、ここでは、この問題を保留にしておく。

この解で1つ特徴的なことは、方程式 (3.17) から  $c$  の値が大きくなって、 $\pi/2$  以上になると  $\alpha_1$  の実部  $y_1$  が正となり、 $U(t)$  は時間と共に発散振動を起こすことになる。ただし、これが発散振動を起こしても、元の室温  $T(t)$  がただちに発散するわけではない。(3.4) (3.7) 式から、

$$T(t) = \frac{aT_E + bT_0}{a+b} + e^{-at}U(t) \quad (3.30)$$

となるので、室温  $T(t)$  が発散振動を起こすのは、 $y_1$  が  $a$  より大きくなったときである。 $y_1$  が  $a$  より小さいときは、この式の右辺2項目はゼロに収束するので、

$$T(t) \xrightarrow{t \rightarrow \infty} \frac{aT_E + bT_0}{a+b} \quad (3.31)$$

となる。したがって、暖房機を付けて設定温度を  $T_0$  にしても室温が  $T_0$  になるわけではなく、 $T_E$  と  $T_0$  に、 $a, b$  の重みを付けた平均値になるということである。どうりで、特に寒い日は暖房機の設定温度を高くしておかないと室内が寒くなる理由がここにある。これは冷房機の場合も同じことが言える。

## 3.2 (3.8) 式の別解法

この原稿を、中西先生に見ていただいたところ、初期条件 (3.23) 式を用いた方程式 (3.8) には、(3.28) 式よりはるかに簡単な解、

$$U(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-c)^k}{k!} (t-k+1)^k \theta(t-k+1) \quad (3.32)$$



があることを教えていただいた。この式は無限和の形で書かれているが、実際は  $t$  に依存する項数の有限和で書くことが可能で、

$$U(t) = \sum_{k=0}^{[t]+1} \frac{(-c)^k}{k!} (t-k+1)^k \quad (3.33)$$

と書き直すことができる。ここに、和の上限についている  $[\ ]$  は Gauss 記号である。この式が初期条件を満たす解であることは、方程式に代入することで簡単に確かめることができるが、ここで、この式の最も簡単な導出方法を述べておく。それは、 $t$  の値に応じて区分的に解いて行く方法で、いま、 $n$  を非負の正数として、区間  $n-1 \leq t \leq n$  における  $U(t)$  を  $U_n(t)$  と書くことにする。この書き方で、特に  $n=0$  のときは、初期条件 (3.23) 式で、

$$U_0(t) = 1 \quad (3.34)$$

となる。また、このとき方程式 (3.8) を書き直すと、

$$\frac{d}{dt}U_n(t) + cU_{n-1}(t-1) = 0, \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (3.35)$$

となる。これから、連続条件  $U_n(n-1) = U_{n-1}(n-1)$  を満たす解は、

$$U_n(t) = U_{n-1}(n-1) - c \int_{n-1}^t U_{n-1}(t-1) dt, \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (3.36)$$

という漸化式から求められる。すなわち、この式から (3.34) 式を出発点として、逐次  $n$  の値を大きくしていくことで、解が求められる。ここでは、 $n = 1, 2, 3$  とした場合を挙げると、

$$\begin{aligned} U_1(t) &= 1 - ct, \\ U_2(t) &= 1 - ct + \frac{c^2}{2}(t-1)^2, \\ U_3(t) &= 1 - ct + \frac{c^2}{2}(t-1)^2 - \frac{c^3}{3!}(t-2)^3 \end{aligned} \quad (3.37)$$

と求められる。ここまでくると一般形が予測でき、 $n-1 \leq t < n$  での解  $U_n(t)$  は、

$$U_n(t) = 1 - ct + \frac{c^2}{2}(t-1)^2 - \frac{c^3}{3!}(t-2)^3 + \dots + \frac{(-c)^n}{n!}(t-n+1)^n \quad (3.38)$$

となるはずで、この式が正しいことは、数学的帰納法で簡単に証明される。これは、(3.33) 式に他ならない。

かくて、方程式 (3.8) には (3.28) 式と (3.32) あるいは (3.33) 式というまったく形の異なる 2 つの解が存在することになる。この (3.33) 式の解は形が簡単であり、数値計算でグラフを描くときは便利であるが、この式からは、 $c$  の値が大きくなったときに発散振動を起こすことが見えてこない。

### 3.3 グラフ表示

ここでは、解 (3.33) 式に基づいて数値計算した結果をグラフ表示することにする (図 2)。このグラフは、 $c = 0, 0.5, 1.0, 2.0$  の 3 通りの場合について描いたものである。 $c = 0.5$  のときは、時間と共に、ほとんど振動しないで、ゼロに収束していく。しかし、 $c$  の値が大きくなり、 $c = 1.0$  のときは、減衰振動を繰り返しながらゼロに収束していき、 $c = 2.0$  になると、時間と共に発散振動を起こしてしまう。なお、この図は解 (3.33) 式に基づくものであるが、方程式 (3.8) から直接数値解法で描いたグラフも、当然のことながら、まったく同じものが描かれることを確かめた。

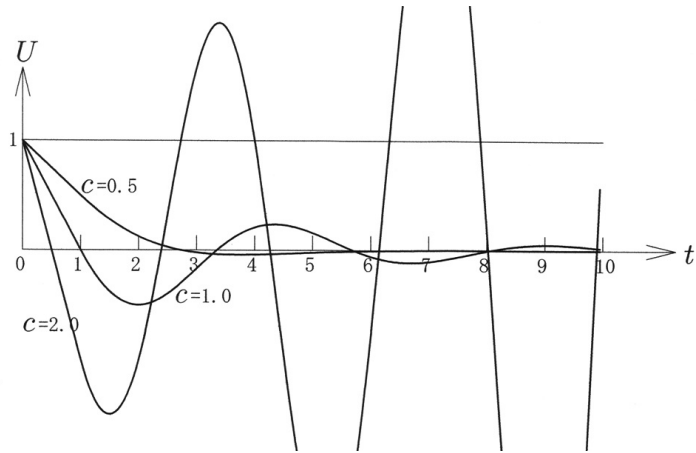


図2  $U(t)$  の解 (3.33) 式によるグラフ

#### 4 火力調整ができない暖房機の場合

火力調整ができない暖房機，すなわち，一定量の発熱をするか，完全に止まっているかのどちらかの状態しかとらない暖房機の場合を考えよう．もちろん，ここで，「火力調整ができない」ということは，手動ではできるが，自動ではできないという意味である．ほとんどの暖房機はこのタイプである．このときは，(2.1) 式において，右辺 2 項目の  $b[T_0 - T(t - \tau)]$  を変えて，

$$\frac{d}{dt}T(t) = -a[T(t) - T_E] + bT_0\theta(T_0 - T(t - \tau)) \quad (4.1)$$

とする．ここに， $\theta$  は単位階段関数である．また， $b$  の後の  $T_0$  は次元合せのために挿入したもので特に意味はない．この式で， $a, b$  は時間の逆数の次元を持つが，これに (3.1) 式と同じ変換を施して， $t, a, b$  を無次元化すると，

$$\frac{d}{dt}T(t) = -a[T(t) - T_E] + bT_0\theta(T_0 - T(t - 1)) \quad (4.2)$$

となる．ここで，従属変数を

$$S(t) = \frac{T(t) - T_E}{T_0 - T_E} \quad (4.3)$$

と変換し， $T_0 - T_E > 0$  として，正定数  $\alpha$  に対し， $\theta(\alpha x) = \theta(x)$  なることを用いると，

$$\frac{d}{dt}S(t) + aS(t) = c\theta(1 - S(t - 1)) \quad (4.4)$$

となる．ここで，

$$c = \frac{bT_0}{T_0 - T_E} \quad (4.5)$$

と定義する．この方程式 (4.4) は， $\theta$  関数が入ってくるので，非線形の無限階微分方程式である．しかし， $\theta$  関数は 0 か 1 の値しかとらないので，区分的に解いていくことは可能である．

$t = 0$  の瞬間に暖房機のスイッチを入れるものとし，それまでの室温は外気温に等しいものとして， $T(t) = T_E$ ， $-1 < t < 0$ ，とする．したがって，(4.3) 式から，

$$S(t) = 0, \quad -1 < t < 0 \quad (4.6)$$

を初期条件とする。スイッチを入れてから当分の間は、(4.4) 式の  $\theta$  関数の値は 1 となるので、

$$\frac{d}{dt}S(t) + aS(t) = c \quad (4.7)$$

となる。この初期条件を満たす解は、

$$S(t) = \frac{c}{a}(1 - e^{-at}) \quad (4.8)$$

となる。ここで、もし、 $c/a < 1$  であれば、暖房機はストップすることなく連続運転状態となる。このとき、十分時間が経過すると、 $S(t) \rightarrow c/a$  となるので、(4.3) 式から、

$$T(t) \xrightarrow{t \rightarrow \infty} \frac{(a-c)T_E + cT_0}{a} \quad (4.9)$$

となり、これも、設定温度  $T_0$  に達しないままこの値に収束することになる。

$c/a > 1$  の場合は、暖房機は室温が設定温度  $T_0$  を超えても、そのまま運転を続け、超えてから時間が 1 を経過した時点で、ストップすることになる。このストップする時間を  $t_1$  とすると、これは、 $S(t) = 1$  となる時間に 1 を加えた時間で、

$$t_1 = 1 - \frac{1}{a} \log \left( 1 - \frac{a}{c} \right) \quad (4.10)$$

となり、この時点での  $S(t_1)$  は

$$S(t_1) = \frac{c}{a}(1 - e^{-at_1}) \quad (4.11)$$

となる。ストップした後は、冷却を続け、その間での  $S(t)$  は、

$$S(t) = S(t_1)e^{-a(t-t_1)} \quad (4.12)$$

となる。その後、室温が設定温度以下になってから、さらに、時間が 1 経過したのち再び運転を始める。このときの時間を  $t_2$  とすると、

$$t_2 = 1 + t_1 + \frac{1}{a} \log S(t_1) \quad (4.13)$$

となり、その時点での  $S(t_2)$  は

$$S(t_2) = S(t_1)e^{-a(t_2-t_1)} = e^{-a} \quad (4.14)$$

となる。再び運転を初めてからの  $S(t)$  は

$$S(t) = \frac{c}{a} - \left( \frac{c}{a} - e^{-a} \right) e^{-a(t-t_2)} \quad (4.15)$$

となり、再びストップする時間を  $t_3$  とすると、

$$t_3 = 1 + t_2 + \frac{1}{a} \log \left( \frac{c - a e^{-a}}{c - a} \right) \quad (4.16)$$

と求められる。これ以降は、運転と停止を繰り返す周期運動となり、その周期は、

$$t_3 - t_1 = 2 + \frac{1}{a} \log \left[ \frac{(c - a e^{-a})[c - (c - a)e^{-a}]}{a(c - a)} \right] \quad (4.17)$$

で与えられる。

以上のことを確かめるため、方程式 (4.4) を、直接、初期条件 (4.6) 式の基に数値的に解いてみる。ここでは、 $a = 1$ ,  $c = 0.8$  の場合と  $a = 1$ ,  $c = 1.5$  の 2 通りの場合を解いてみたものを図 3 に示す。

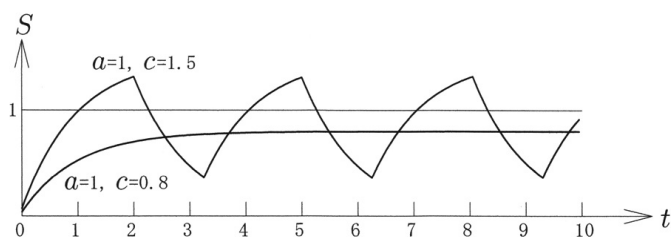


図3  $S(t)$  の数値解によるグラフ

見て分かる通り、 $a = 1$ ,  $c = 0.8$  の場合は時間が経つと、 $S$  の値は、 $c/a = 0.8$  に収束する。また、 $c/a$  が 1 より大きい  $a = 1$ ,  $c = 1.5$  の場合は、 $S$  の値は 1 の周りに激しい振動を起こす。このときの周期は、(4.17) 式から、 $t_3 - t_1 \cong 3.0918 \dots$  となる。

## 5 おわりに

筆者が子供の頃は、暖房といえば石炭ストーブであった。それがいつの間にか、灯油ストーブに替わった。もちろん、これらのストーブには、温度コントローラーなどというものは無く、暑さ寒さの調整はすべて手動で行わなければならない。現在は、温水暖房機を使っている。これは、灯油で温めた温水を、各部屋に取り付けたパネルヒーターに循環させるもので、一度、設定温度をセットした後は、温度調整は自動である。しかし、ここで説明したように、温度を一定に保つことは、かなり大変なことであることがわかる。

## 6 付録：物理的考察による初期条件を設定した場合

(3.23) 式による初期条件は、方程式 (3.8) がどのような解を持つかを、試すためのものであった。ここでは、より具体的、物理的な設定による初期条件の基に解いた場合はどうなるかについて述べておく。方程式 (3.2) において、暖房機のスイッチを入れる前の室温  $T(t)$  は、外気温の  $T_E$  に等しいとして、

$$T(t) = T_E, \quad -1 \leq t \leq 0 \quad (6.1)$$

とする。これによって、(3.4) 式で定義される  $S(t)$  の初期条件は、

$$S(t) = \frac{b(T_E - T_0)}{a + b} \stackrel{\text{def}}{=} T_S, \quad -1 \leq t \leq 0 \quad (6.2)$$

となり、さらに、(3.7) 式で定義される  $U(t)$  の初期条件は、

$$U(t) = T_S e^{at}, \quad -1 \leq t \leq 0 \quad (6.3)$$

となる。これから、(3.25) 式の  $A(t)$  は、(3.26) 式に替わって

$$A(t) = T_S e^{-a} [\delta(t+1) - c e^{at} \theta(t+1) \theta(-t)] \quad (6.4)$$

となる．これを (3.22) 式の  $F(t)$  に代入して，

$$\begin{aligned}
U(t) &= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{T_S e^{-a}}{\varphi'(\alpha_k)} \int_{-1}^t e^{\alpha_k(t-t')} [\delta(t'+1) - c e^{at'} \theta(t'+1) \theta(-t')] dt' + \text{c.c.} \\
&= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{T_S e^{-a}}{\varphi'(\alpha_k)} \left[ e^{\alpha_k(t+1)} - c \int_{-1}^{\text{Min}(t,0)} e^{\alpha_k t + (a-\alpha_k)t'} dt' \right] + \text{c.c.} \\
&= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{T_S e^{-a}}{\varphi'(\alpha_k)} \left[ e^{\alpha_k(t+1)} - \frac{c}{a-\alpha_k} (e^{\alpha_k t + (a-\alpha_k)\text{Min}(t,0)} - e^{\alpha_k t - (a-\alpha_k)}) \right] + \text{c.c.} \quad (6.5)
\end{aligned}$$

となる．ただし，ここでは， $a \neq \alpha_k$  とした．これを場合分けして書くと

$$U(t) = \begin{cases} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{T_S e^{-a}}{\varphi'(\alpha_k)} \left[ e^{\alpha_k(t+1)} - \frac{c}{a-\alpha_k} (e^{at} - e^{\alpha_k(t+1)-a}) \right] + \text{c.c.} & -1 \leq t \leq 0 \\ \sum_{k=1}^{\infty} \frac{T_S e^{-a}}{\varphi'(\alpha_k)} \left[ 1 - \frac{c}{a-\alpha_k} (e^{-\alpha_k} - e^{-a}) \right] e^{\alpha_k(t+1)} + \text{c.c.} & 0 \leq t \end{cases} \quad (6.6)$$

という解を得る．仮にここで， $T_S = 1$ ， $a = 0$  とするとこの式は，前に求めた (3.28) 式と一致する．この場合も前の式のとときと同様に， $\alpha_k$  の実部  $y_k$  が正のときは，時間の増大と共に発散振動を起こす．

つぎに，この (6.3) 式の初期条件の場合も (3.32) 式以下で示した区分的に解いていく方法を試してみよう．前と同じく， $n$  を非負整数として，区間  $n-1 \leq t \leq n$  における  $U(t)$  を  $U_n(t)$  と書くことにする．初期条件から，

$$U_0(t) = T_S e^{at} \quad (6.7)$$

となるので，この条件の基に，(3.36) 式を解いていくと， $n = 1, 2, 3$  に対し，

$$\begin{aligned}
U_1(t) &= \frac{T_S}{a} (a + b - b e^{at}) \\
U_2(t) &= \frac{T_S}{a} \left[ c(a+b) \left( 1 + \frac{1}{c} - \frac{1}{a} - t \right) + \frac{b^2}{a} e^{at} \right] \\
U_3(t) &= \frac{T_S}{a} \left\{ c^2(a+b) \left[ 2 + \frac{1}{c^2} - \frac{1}{ac} + \frac{1}{c} + \frac{1}{a^2} - \frac{2}{a} - \left( 2 + \frac{1}{c} - \frac{1}{a} \right) t + \frac{1}{2} t^2 \right] - \frac{b^3}{a^2} e^{at} \right\}
\end{aligned} \quad (6.8)$$

と求められる．ここで，(3.9) 式から  $c e^{-a} = b$  となることを用いた．しかしながらこれらの式から，その一般形は簡単には見えてこない．これらの式で， $t$  の多項式となる部分が，Laguerre 多項式となることを期待した．しかし， $U_1$ ， $U_2$  の部分はまとまった形になるが， $U_3$  からはお釣りの部分が残ってしまい一般形が予測できない式になってしまう．

#### [ 謝辞 ]

今回も，京都大学名誉教授の中西襄先生にこの原稿を見ていただきました．先生からは，私が気づいていなかった (3.32) 式の解の存在を教えてくださいました．したがって，今回のものの半分は先生のご助力でできたものです．ここに，心から深謝いたします．

# コサインの正負冪乗の有限和とチェビシェフ多項式

Finite Sums of Positive and Negative Powers of Cosines  
and Čebyšev Polynomials

中西 襄<sup>\*1</sup>

Noboru NAKANISHI<sup>\*2</sup>

## 1 はじめに

この論文では、 $N$  を正の整数、 $n$  を正または負の整数とするときの有限級数

$$V_n(N, x) \equiv \sum_{r=0}^{N-1} \left[ \cos \left( x + \frac{2r\pi}{N} \right) \right]^n \quad (1.1)$$

の和公式を与える。  $x$  を  $\pi/2$  だけずらせば、 $\cos$  を  $\sin$  に変えることができる。

また (1.1) を  $x$  について微分すれば、 $\sin$  がかった形の級数和の公式が得られる。ただし、この方法では  $\cos$  の  $-1$  乗の場合（この場合は  $\tan$  の和になる）は得られないが、別の方法で和公式が得られる。 $\sin$  の冪が 2 乗以上の場合、 $\sin^2 X = 1 - \cos^2 X$  を使えば 0 乗と 1 乗の場合に帰着する。

和公式は「三角関数のパラメータを含む関数の有限級数の和 2」（「数学・物理通信」5-10）で証明した一般公式

$$\begin{aligned} & \sum_{r=0}^{N-1} \frac{1}{1 + a^2 - (1 - a^2) \cos \left( x + \frac{2r\pi}{N} \right)} \\ &= \frac{N}{2a} \cdot \frac{(1 + a)^{2N} - (1 - a)^{2N}}{(1 + a)^{2N} + (1 - a)^{2N} - 2(1 - a^2)^N \cos(Nx)} \end{aligned} \quad (1.2)$$

から導く。

負冪乗の場合にはチェビシェフ多項式が有効に応用される。論文末尾に、直接関係ないが、余談としてチェビシェフ多項式を利用する面白い級数和の話をつけ加える。

## 2 正冪の場合

本節では正冪の場合を考える。  $n \geq 0$  とする。

(1.2) の両辺に  $1 + a^2$  を乗じ、

$$\frac{1 - a^2}{1 + a^2} = \lambda \quad (2.1)$$

---

<sup>\*1</sup> 京都大学名誉教授

<sup>\*2</sup> nbr-nak@trio.plala.or.jp

とおけば,

$$a = \sqrt{\frac{1-\lambda}{1+\lambda}}, \quad \frac{1+a^2}{2a} = \frac{1}{\sqrt{1-\lambda^2}} \quad (2.2)$$

であるから, (1.1) は

$$\sum_{r=0}^{N-1} \frac{1}{1-\lambda \cos(x + \frac{2r\pi}{N})} = \frac{N}{\sqrt{1-\lambda^2}} \times \frac{(\sqrt{1+\lambda} + \sqrt{1-\lambda})^{2N} - (\sqrt{1+\lambda} - \sqrt{1-\lambda})^{2N}}{(\sqrt{1+\lambda} + \sqrt{1-\lambda})^{2N} + (\sqrt{1+\lambda} - \sqrt{1-\lambda})^{2N} - 2^{N+1}\lambda^N \cos(Nx)} \quad (2.3)$$

となる. この右辺は

$$(\sqrt{1+\lambda} \pm \sqrt{1-\lambda})^2 = 2(1 \pm \sqrt{1-\lambda^2}) \quad (2.4)$$

により,

$$\frac{N}{\sqrt{1-\lambda^2}} \cdot \frac{(1 + \sqrt{1-\lambda^2})^N - (1 - \sqrt{1-\lambda^2})^N}{(1 + \sqrt{1-\lambda^2})^N + (1 - \sqrt{1-\lambda^2})^N - 2\lambda^N \cos(Nx)} \quad (2.5)$$

と書き換えられる. 他方, (2.3) の左辺を展開すれば,

$$\sum_{n=0}^{\infty} \lambda^n V_n(N, x) \quad (2.6)$$

であるから, 結局  $V_n(N, x)$  は (2.5) の  $\lambda^n$  の係数で与えられることが分かる.

$N$  が具体的な (大きくない) 値のときは (2.5) は簡単に計算できるが, 興味があるのは  $N$  の値が一般の場合であり, その場合はこの形のままでは扱いにくい. そこで, 以下で  $N$  の値を特定しないで, (2.5) を計算する.

$|\lambda|$  が小さいとき,  $1 + \sqrt{1-\lambda^2}$  は 2 に近く,  $1 - \sqrt{1-\lambda^2}$  は  $\lambda^2/2$  に近いから, (2.5) の分母分子を  $(1 + \sqrt{1-\lambda^2})^N$  で割った形にしておくのが,  $\lambda$  の冪展開を考えるうえで便利である. そこで

$$t = \left( \frac{1 - \sqrt{1-\lambda^2}}{1 + \sqrt{1-\lambda^2}} \right)^{N/2} = \frac{\lambda^N}{(1 + \sqrt{1-\lambda^2})^N} \quad (2.7)$$

とおけば, (2.5) はちょうどうまく, よく知られたフーリエ展開公式\*3

$$\frac{1-t^2}{1-2t \cos \theta + t^2} = 1 + 2 \sum_{k=1}^{\infty} t^k \cos(k\theta) \quad (2.8)$$

が使える形をしていることがわかる. こうして (2.3) から, 公式

$$\sum_{n=0}^{\infty} \lambda^n V_n(N, x) = \frac{N}{\sqrt{1-\lambda^2}} \left[ 1 + 2 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\lambda^{kN}}{(1 + \sqrt{1-\lambda^2})^{kN}} \cos(kNx) \right] \quad (2.9)$$

が得られる.

(2.9) は

$$\sum_n \lambda^n V_n(N, x) = \frac{N}{\sqrt{1-\lambda^2}} + O(\lambda^N) \quad (2.10)$$

\*3 たとえば, 「岩波 数学辞典」巻末公式集の「Fourier 級数」参照.

であるから,  $n < N$  に対しては, 2 項展開式

$$\frac{1}{\sqrt{1-\lambda^2}} = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(2j-1)!}{2^{2j-1}j!(j-1)!} \lambda^{2j} \quad (2.11)$$

により,

$$\begin{aligned} V_n(N, x) &= \frac{(n-1)! \cdot N}{2^{n-1}(\frac{n}{2})!(\frac{n}{2}-1)!} \quad (n: \text{偶数}) \\ &= 0 \quad (n: \text{奇数}) \end{aligned} \quad (2.12)$$

となることがわかる. 項数が冪の指数より大きければ和が  $x$  に依存しないことは, 注目に値する.

一般の場合は, (2.9) の右辺で寄与するのは  $\cos(kNx)$  ( $k \leq n/N$ ) の項である. (2.11) と展開式

$$\frac{1}{(1+\sqrt{1-\lambda^2})^M} = \frac{1}{2^M} \left[ 1 + M \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(M+2m-1)!}{2^{2m}m!(M+m)!} \lambda^{2m} \right] \quad (2.13)$$

を用いて計算すればよい. (2.13) の証明はかなり面倒なので, 付録 1 に与える.

(2.9) の右辺は  $\lambda^2$  と  $\lambda^N$  による冪級数だから,  $N$  が偶数ならば奇数次はない. したがって,  $N$  が偶数で  $n$  が奇数のとき,  $V_n(N, x) = 0$  となる. これは, 級数の第  $r$  項と第  $r + \frac{N}{2}$  項とがキャンセルすることによる結果である.

### 3 負冪の場合

本節では負冪乗の和公式を考察する. すなわち  $n$  を正として,

$$V_{-n}(N, x) \equiv \sum_{r=0}^{N-1} \frac{1}{\left[ \cos\left(x + \frac{2r\pi}{N}\right) \right]^n} \quad (3.1)$$

を求める. 公式 (1.2) を解析接続して  $a = ib$  ( $b$  は実数) とすると,

$$\begin{aligned} &\sum_{r=0}^{N-1} \frac{1}{1-b^2 - (1+b^2)\cos\left(x + \frac{2r\pi}{N}\right)} \\ &= \frac{N}{2ib} \cdot \frac{(1+ib)^{2N} - (1-ib)^{2N}}{(1+ib)^{2N} + (1-ib)^{2N} - 2(1+b^2)^N \cos(Nx)} \end{aligned} \quad (3.2)$$

となる. (3.2) の両辺に  $1+b^2$  を乗じ,

$$\frac{1-b^2}{1+b^2} = \lambda \quad (3.3)$$

とおけば,

$$b = \sqrt{\frac{1-\lambda}{1+\lambda}} \quad (3.4)$$



であるから, (3.1) は前節と同様にして,

$$\begin{aligned} \sum_{r=0}^{N-1} \frac{1}{\lambda - \cos(x + \frac{2r\pi}{N})} &= - \sum_{r=0}^{N-1} \frac{1}{\cos(x + \frac{2r\pi}{N}) \left(1 - \frac{\lambda}{\cos(x + \frac{2r\pi}{N})}\right)} \\ &= \frac{N}{i\sqrt{1-\lambda^2}} \cdot \frac{(\lambda + i\sqrt{1-\lambda^2})^N - (\lambda - i\sqrt{1-\lambda^2})^N}{(\lambda + i\sqrt{1-\lambda^2})^N + (\lambda - i\sqrt{1-\lambda^2})^N - 2\cos(Nx)} \end{aligned} \quad (3.5)$$

となる.

(3.5) の右边を計算するには, チェビシエフ多項式を利用するのが便利であるので, その公式 (証明は付録 2 に与えた) を引用しておく \*4.

第 1 種チェビシエフ多項式:

$$\begin{aligned} T_N(x) &\equiv \cos(N \arccos x) \\ &= \frac{1}{2} [(x + i\sqrt{1-x^2})^N + (x - i\sqrt{1-x^2})^N] \\ &= \frac{N}{2} \sum_{m=0}^{[N/2]} (-1)^m \frac{(N-m-1)!}{m!(N-2m)!} (2x)^{N-2m}, \end{aligned} \quad (3.6)$$

第 2 種チェビシエフ多項式:

$$\begin{aligned} U_N(x) &\equiv \frac{\sin((N+1) \arccos x)}{\sin(\arccos x)} \\ &= \frac{1}{2i\sqrt{1-x^2}} [(x + i\sqrt{1-x^2})^{N+1} - (x - i\sqrt{1-x^2})^{N+1}] \\ &= \sum_{m=0}^{[N/2]} (-1)^m \frac{(N-m)!}{m!(N-2m)!} (2x)^{N-2m}, \end{aligned} \quad (3.7)$$

関係式:

$$\frac{d}{dx} T_N(x) = N U_{N-1}(x). \quad (3.8)$$

したがって, (3.5) は

$$- \sum_{n=0}^{\infty} \lambda^n V_{-(n+1)}(N, x) = \frac{N U_{N-1}(\lambda)}{T_N(\lambda) - \cos(Nx)} = \frac{\partial}{\partial \lambda} \log(T_N(\lambda) - \cos(Nx)) \quad (3.9)$$

と書くことができる. 両辺を  $\lambda$  について 0 から積分すると,

$$- \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\lambda^{n+1}}{n+1} V_{-(n+1)}(N, x) = \log \left( \frac{T_N(\lambda) - \cos(Nx)}{T_N(0) - \cos(Nx)} \right) \quad (3.10)$$

となる. ここに, (3.6) からわかるように,  $T_N(0)$  は  $N$  が偶数ならば  $(-1)^{N/2}$ , 奇数ならば 0 である. 右边を  $\log(1-X)$  の形に書き直して展開し, 整理すると,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\lambda^n}{n} V_{-n}(N, x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} \left( \frac{T_N(\lambda) - T_N(0)}{\cos(Nx) - T_N(0)} \right)^k \quad (3.11)$$

\*4 たとえば, 英語版ウィキペディア <http://en.wikipedia.org/> の項目 “Chebyshev polynomials” 参照.

となる．これに第1種チェビシェフ多項式の展開式を代入すればよい． $n = 1, 2, 3, 4$  について具体的に計算してみよう．

$N$  が偶数のとき，(3.11) の右辺は，

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} \left( \frac{T_N(\lambda) - (-1)^{N/2}}{\cos(Nx) - (-1)^{N/2}} \right)^k = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} \left( \frac{\frac{1}{2}N^2\lambda^2 - \frac{1}{24}N^2(N^2 - 4)\lambda^4 + O(\lambda^6)}{1 - (-1)^{N/2}\cos(Nx)} \right)^k \quad (3.12)$$

と書ける． $n$  が奇数ならばもちろん  $V_{-n}(N, x) = 0$  である． $n = 2, 4$  のときは，

$$\begin{aligned} V_{-2}(N, x) &= \frac{N^2}{1 - (-1)^{N/2}\cos(Nx)}, \\ V_{-4}(N, x) &= \frac{N^4}{2[1 - (-1)^{N/2}\cos(Nx)]^2} - \frac{N^2(N^2 - 4)}{6[1 - (-1)^{N/2}\cos(Nx)]} \end{aligned} \quad (3.13)$$

を得る．

$N$  が奇数のとき，(3.11) の右辺は，

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} \left( \frac{T_N(\lambda)}{\cos(Nx)} \right)^k = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} \left( \frac{(-1)^{(N-1)/2}[N\lambda - \frac{1}{6}N(N^2 - 1)\lambda^3] + O(\lambda^5)}{\cos(Nx)} \right)^k \quad (3.14)$$

となるから， $n = 1, 2, 3, 4$  に対して，

$$\begin{aligned} V_{-1}(N, x) &= \frac{(-1)^{(N-1)/2}N}{\cos(Nx)}, \\ V_{-2}(N, x) &= \frac{N^2}{\cos^2(Nx)}, \\ V_{-3}(N, x) &= (-1)^{(N-1)/2} \left( \frac{N^3}{\cos^3(Nx)} - \frac{N(N^2 - 1)}{2\cos(Nx)} \right), \\ V_{-4}(N, x) &= \frac{N^4}{\cos^4(Nx)} - \frac{2N^2(N^2 - 1)}{3\cos^2(Nx)} \end{aligned} \quad (3.15)$$

を得る．もちろん  $V_{-n}(1, x) = 1/\cos^n x$  になっている．

なお， $V_{-2}(N, x)$  に対する式 ((3.13) の第1式と (3.15) の第2式) は，森口繁一他著「数学公式II」の p.20 に載っているものに一致する．

## 4 補足

(3.1) を  $x$  で微分すると，

$$\sum_{r=0}^{N-1} \frac{\sin\left(x + \frac{2r\pi}{N}\right)}{\left[\cos\left(x + \frac{2r\pi}{N}\right)\right]^{n+1}} = \frac{1}{n} \frac{d}{dx} V_{-n}(N, x) \quad (4.1)$$

となるから，分子にサインがある級数の和は  $V_{-n}(N, x)$  に対する公式 (3.11) からすぐに計算できる．ただし，

$$\sum_{r=0}^{N-1} \frac{\sin\left(x + \frac{2r\pi}{N}\right)}{\cos\left(x + \frac{2r\pi}{N}\right)} = \sum_{r=0}^{N-1} \tan\left(x + \frac{2r\pi}{N}\right) \quad (4.2)$$

だけはこの方法では得られない。(4.2)に対する公式は、森口繁一他著「数学公式 II」の p.18 に載っているが、念のため直接証明を与えておこう。

円分方程式  $X^N - 1 = 0$  の  $N$  個の解は  $X = e^{2\pi i(r/N)}$  ( $r = 0, 1, \dots, N-1$ ) であるから、因数分解

$$X^N - 1 = \prod_{r=0}^{N-1} (X - e^{(2r/N)\pi i}) \quad (4.3)$$

ができる。(4.3) に  $X = e^{(-2x+\pi)i}$  を代入すると、

$$\begin{aligned} & -e^{(-2Nx+(N-1)\pi)i} - 1 \\ &= \prod_{r=0}^{N-1} (-e^{-2xi} - e^{(2r/N)\pi i}) \\ &= (e^{-xi})^N (e^{(1/N)\pi i})^{N(N-1)/2} \prod_{r=0}^{N-1} (-e^{-(x+(r/N)\pi)i} - e^{(x+(r/N)\pi)i}) \\ &= (-2)^N e^{-(Nx-(N-1)\pi/2)i} \prod_{r=0}^{N-1} \cos\left(x + \frac{r\pi}{N}\right) \end{aligned} \quad (4.4)$$

となるから、

$$\prod_{r=0}^{N-1} \cos\left(x + \frac{r\pi}{N}\right) = \frac{(-1)^{N-1}}{2^{N-1}} \cos\left(Nx - \frac{(N-1)\pi}{2}\right) \quad (4.5)$$

というコサインの有限乗積の公式が得られる。これは「等比数列のコサインの有限乗積」(「数学・物理通信」3-6) で用いた公式の拡張である。

(4.5) の対数を微分すれば、 $\tan$  の和公式

$$\sum_{r=0}^{N-1} \tan\left(x + \frac{2r\pi}{N}\right) = N \tan\left(Nx - \frac{(N-1)\pi}{2}\right) = -N \cot\left(Nx + \frac{1}{2}N\pi\right) \quad (4.6)$$

が得られる。

## 5 付録 1 : (2.13) の証明

証明すべき式は、

$$2^M (1 + \sqrt{1-x})^{-M} = 1 + M \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(M+2m-1)!}{m!(M+m)!} \left(\frac{x}{4}\right)^m \quad (5.1)$$

である。 $M=1$  のときは、

$$\frac{2}{1 + \sqrt{1-x}} = \frac{2(1 - \sqrt{1-x})}{x} = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(2m)!}{m!(m+1)!} \left(\frac{x}{4}\right)^m, \quad (5.2)$$

であるから OK である。そこで  $M$  に関する数学的帰納法を用いる。すなわち

$$\begin{aligned} & \left[1 + M \sum_{j=1}^{\infty} \frac{(M+2j-1)!}{j!(M+j)!} \left(\frac{x}{4}\right)^j\right] \left[\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(2k)!}{k!(k+1)!} \left(\frac{x}{4}\right)^k\right] \\ &= 1 + (M+1) \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(M+2m)!}{m!(M+m+1)!} \left(\frac{x}{4}\right)^m \end{aligned} \quad (5.3)$$

を示せばよい. (5.3) の左辺を展開して  $(x/4)^m$  の係数を拾うと,

$$\frac{(2m)!}{m!(m+1)!} + M \sum_{j=1}^m \frac{(M+2j-1)!(2m-2j)!}{j!(M+j)!(m-j)!(m-j+1)!} = (M+1) \frac{(M+2m)!}{m!(M+m+1)!} \quad (5.4)$$

となる. このままでは扱いにくいので, 和にかかる係数の  $M$  を  $(M+2j)-2j$  と書き換えて階乗に含ませるように変形すると,

$$\begin{aligned} \sum_{j=0}^m \frac{(M+2j)!(2m-2j)!}{j!(M+j)!(m-j)!(m-j+1)!} - 2 \sum_{j=1}^m \frac{(M+2j-1)!(2m-2j)!}{(j-1)!(M+j)!(m-j)!(m-j+1)!} \\ = \frac{(M+2m+1)!}{m!(M+m+1)!} - 2 \frac{(M+2m)!}{(m-1)!(M+m+1)!} \end{aligned} \quad (5.5)$$

となる (ここで (5.4) の左辺第 1 項は, (5.5) の左辺第 1 項の  $j=0$  部分として取り込んだ.). (5.5) をよく眺めると, 両辺の第 1 項で置き換え  $M \mapsto M+1$ ,  $m \mapsto m-1$ ,  $j \mapsto j-1$  を行えば, 係数の  $-2$  を除き, ちょうど両辺の第 2 項になる. したがって,

$$\sum_{j=0}^m \frac{(M+2j)!(2m-2j)!}{j!(M+j)!(m-j)!(m-j+1)!} = \frac{(M+2m+1)!}{m!(M+m+1)!} \quad (5.6)$$

が成立すればよいわけである. 以下有限級数の和公式 (5.6) を証明しよう. (5.6) の左辺を  $\Phi(M, m)$  と書く.

記号  $(\alpha)_k \equiv \alpha(\alpha+1)\cdots(\alpha+k-1)$  を使うと, (3-2) 型の一般化超幾何関数は, 級数展開

$${}_3F_2(a_1, a_2, a_3; c_1, c_2; x) \equiv \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(a_1)_j (a_2)_j (a_3)_j}{(c_1)_j (c_2)_j j!} x^j \quad (5.7)$$

で定義される.  $a_1, a_2, a_3$  のいずれかが負の整数ならばこれは有限級数になる. また,  $x=1$  における値に対して, ザールシュッツの定理 (Saalschütz's Theorem) <sup>\*5</sup>

$${}_3F_2(a, b, -n; c, 1+a+b-c-n; 1) = \frac{(c-a)_n (c-b)_n}{(c)_n (c-a-b)_n} \quad (5.8)$$

が成立するので, これを利用する.

さて,  $\Phi(M, m)$  は,

$$\begin{aligned} (M+2j)! &= M! 2^{2j} \left(\frac{M+1}{2}\right)_j \left(\frac{M+2}{2}\right)_j, \\ (2m-2j)! &= \frac{(2m)!}{2^{2j} (-m)_j (-m+\frac{1}{2})_j}, \\ (M+j)! &= M!(M+1)_j, \\ (m-j)! &= \frac{(-1)^j m!}{(-m)_j}, \\ (m-j+1)! &= \frac{(-1)^j (m+1)!}{(-m-1)_j} \end{aligned} \quad (5.9)$$

<sup>\*5</sup> Bateman Manuscript Project, Higher Transcendental Functions, Vol.1, p.188, または英語版ウィキペディア <http://en.wikipedia.org/> の項目 “Generalized hypergeometric functions” 参照.

であるから,  $a_1 = \frac{M+1}{2}$ ,  $a_2 = \frac{M+2}{2}$ ,  $a_3 = -m-1$ ,  $c_1 = M+1$ ,  $c_2 = -m + \frac{1}{2}$  の場合の  ${}_3F_2$  の形になっている. ただし,  $(-m)_j$  が分母分子でキャンセルしてしまったので,  $j = m+1$  の項は後者のみに存在する. つまり第  $m+1$  項の分だけ差し引いておかなければならない. したがって,

$$\begin{aligned} \Phi(M, m) = & \frac{(2m)!}{m!(m+1)!} \left[ {}_3F_2\left(\frac{M+1}{2}, \frac{M+2}{2}, -m-1; M+1, -m + \frac{1}{2}; 1\right) \right. \\ & \left. - \frac{\left(\frac{M+1}{2}\right)_{m+1} \left(\frac{M+2}{2}\right)_{m+1} (-m-1)_{m+1}}{(M+1)_{m+1} \left(-m + \frac{1}{2}\right)_{m+1} (m+1)!} \right] \end{aligned} \quad (5.10)$$

となる.  $1 + \frac{M+1}{2} + \frac{M+2}{2} - (M+1) + (-m-1) = -m + \frac{1}{2}$  だから, ザールシュッツの定理 (5.8) が使えて,

$$\Phi(M, m) = \frac{(2m)!}{m!(m+1)!} \left[ \frac{\left(\frac{M+1}{2}\right)_{m+1} \left(\frac{M}{2}\right)_{m+1}}{(M+1)_{m+1} \left(-\frac{1}{2}\right)_{m+1}} - \frac{\left(\frac{M+1}{2}\right)_{m+1} \left(\frac{M+2}{2}\right)_{m+1} (-m-1)_{m+1}}{(M+1)_{m+1} \left(-m + \frac{1}{2}\right)_{m+1} (m+1)!} \right] \quad (5.11)$$

となる. これを計算すると,

$$\begin{aligned} \Phi(M, m) &= \frac{(2m)!}{m!(m+1)!} \left[ -\frac{M}{2} \cdot \frac{(M+2m+1)!m!}{(M+m+1)!(2m)!} + \frac{1}{2} \cdot \frac{(M+2m+2)!m!}{(M+m+1)!(2m)!} \right] \\ &= \frac{(M+2m+1)!}{(m+1)!(M+m+1)!} \left[ -\frac{M}{2} + \frac{1}{2}(M+2m+2) \right] \\ &= \frac{(M+2m+1)!}{m!(M+m+1)!} \end{aligned} \quad (5.12)$$

となって, (5.6) の右辺が得られる. これで (5.6) が証明されたので, (2.13) の証明が完結した.

なお, ここでは  $M$  は正の整数としたが, (5.6) の証明は容易に  $M$  が任意の複素数の場合に拡張できる. (5.1) も階乗をガンマ関数に置き換えれば,  $M$  が複素数の場合も成立するであろうが, 数学的帰納法による証明は使えない. (5.1) を数学的帰納法によらずに証明する方法はないだろうか.

## 6 付録 2 : チェビシエフ多項式の展開式の証明

第 1 種チェビシエフ多項式に関する式 (3.6) の証明を書いた文献が見当たらなかったため, 念のためここに与えておこう. 第 2 種チェビシエフ多項式に関する式 (3.7) は, 関係式 (3.8) を使えば, (3.6) から直ちに導かれる.

(3.6) の第 2 行目

$$T_N(x) = \frac{1}{2} \left[ (x + i\sqrt{1-x^2})^N + (x - i\sqrt{1-x^2})^N \right] \quad (6.1)$$

は第 1 行目の定義式をオイラーの公式を使って書き直ただけであるが, 第 3 行目の展開式

$$\tilde{T}_N(x) \equiv \frac{N}{2} \sum_{m=0}^{[N/2]} (-1)^m \frac{(N-m-1)!}{m!(N-2m)!} (2x)^{N-2m} \quad (6.2)$$

の導出は簡単ではない。以下、 $\tilde{T}_N(x) = T_N(x)$  を  $N$  についての数学的帰納法によって証明する。

恒等式

$$2x = (x + i\sqrt{1-x^2}) + (x - i\sqrt{1-x^2}) \quad (6.3)$$

の両辺をそれぞれ (6.1) の両辺に乗ずると、漸化式

$$2xT_N(x) = T_{N+1}(x) + T_{N-1}(x) \quad (6.4)$$

が得られる。 $\tilde{T}_1(x) = x = T_1(x)$ ,  $\tilde{T}_2(x) = 2x^2 - 1 = T_2(x)$  であるから、

$$2x\tilde{T}_N(x) = \tilde{T}_{N+1}(x) + \tilde{T}_{N-1}(x) \quad (6.5)$$

がいえれば、証明が完結する。(6.2) (ただし  $N \mapsto N \pm 1$  とする) を用いて (6.5) の右辺を書き下すが、第 2 項で  $m \mapsto m - 1$  にした形にしておく、

$$\begin{aligned} \tilde{T}_{N+1}(x) + \tilde{T}_{N-1}(x) &= \frac{N+1}{2} \sum_{m=0}^{[(N+1)/2]} (-1)^m \frac{(N-m)!}{m!(N-2m+1)!} (2x)^{N-2m+1} \\ &\quad + \frac{N-1}{2} \sum_{m=1}^{[(N+1)/2]} (-1)^{m-1} \frac{(N-m-1)!}{(m-1)!(N-2m+1)!} (2x)^{N-2m+1} \end{aligned} \quad (6.6)$$

となる。これを計算すると、

$$\begin{aligned} &\tilde{T}_{N+1}(x) + \tilde{T}_{N-1}(x) \\ &= \frac{1}{2}(2x)^{N+1} + \frac{1}{2} \sum_{m=1}^{[(N+1)/2]} (-1)^m [(N+1)(N-m) - (N-1)m] \times \\ &\quad \frac{(N-m-1)!}{m!(N-2m+1)!} (2x)^{N-2m+1} \\ &= \frac{1}{2}(2x)^{N+1} + \frac{N}{2} \sum_{m=1}^{[(N+1)/2]} (-1)^m \frac{(N-m-1)!}{m!(N-2m)!} (2x)^{N-2m+1} \\ &= \frac{N}{2} \sum_{m=0}^{[(N+1)/2]} (-1)^m \frac{(N-m-1)!}{m!(N-2m)!} (2x)^{N-2m} \cdot (2x) \end{aligned} \quad (6.7)$$

となる。 $1/(-1)! = 0$  だから、ここで  $[(N+1)]/2$  は  $[N/2]$  としてもよい。したがって (6.7) は  $2x\tilde{T}_N(x)$  に等しい。(6.5) がいえたので、証明は終了する。

\*\*\*\*\*

余談であるが、近畿大学では毎年 11 月 3 日に「無差別数学コンテスト」が行われている<sup>\*6</sup>。出題される問題は高等数学を知らなくても理解できるもので、ちょっと面白い難問が提出される。去年 (2015 年) の出題に次のようなのがあった<sup>\*7</sup>：有限級数

$$\sigma_N \equiv \sum_{m=0}^{[N/2]} (-1)^m \frac{N-m}{N-m} C_m \quad (6.8)$$

<sup>\*6</sup> <http://www.math.kindai.ac.jp> 参照。

<sup>\*7</sup> 文字は変更した。

の和を求めよというものである。正面からこの和を求めようとしても、なかなかうまくいかない。実際に数値をあたってみると、 $\sigma_N = \delta_N/N$  とおくと、面白いことに  $\delta_N$  は 6 を周期としているのである。すなわち  $\delta_1 = \delta_7 = 1$ ,  $\delta_2 = \delta_8 = -1$ ,  $\delta_3 = \delta_9 = -2$ ,  $\delta_4 = \delta_{10} = -1$ ,  $\delta_5 = \delta_{11} = 1$ ,  $\delta_6 = \delta_{12} = 2$  のようになるので、 $\delta_N = 2 \cos(N\pi/3)$  であると予想される。

(6.8) を (3.6) と比べると、証明は

$$\sigma_N = \frac{2}{N} T_N\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{2}{N} \cos\left(\frac{N\pi}{3}\right) \quad (6.9)$$

で済むことがわかる。しかしチェビシエフ多項式のことを知らなければ、上記の帰納法による証明を思いつくのは難しいであろう。

(6.9) と同様なことを第 2 種チェビシエフ多項式 (3.7) について考えれば、

$$\sum_{m=0}^{[N/2]} (-1)^m {}_{N-m}C_m = U_N\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\sin((N+1)\pi/3)}{\sin(\pi/3)} \quad (6.10)$$

となる。すなわち、周期 6 で  $1, 0, -1, -1, 0, 1$  を繰り返す。

一般にチェビシエフ多項式 (3.6), (3.7) は  $x = \cos(2\pi/n)$  のとき、周期  $n$  をもつ。2 項係数に関係する有限級数の和が、このように周期性をもつのは興味深い。

## 編集後記

今年も12月となった。6巻8号に続けて、6巻9号を発行する。今年の「数学・物理通信」の発行を6巻9号で終えてもいいのであるが、今年中にもう一号発行したいと考えている。

それは前々からこの編集後記で述べていた原稿の投稿資格を限定するために変更した投稿規定を載せる号がほしいからである。今年の最終号にあたる次号の6巻10号に新しい投稿規定を載せるつもりである。

投稿資格が無限定であると、やはり收拾がつかなくなる恐れが大きい。そういうことをできるだけ避けたいという気持ちがある。これは編集人のわがまとも言えるが、どこからも資金的な援助を受けているわけではないし、個人のやっているサーキュラーであるから、お許しをいただきたい。

(矢野 忠)