

数学・物理通信

7卷3号 2017年6月

編集 新関章三・矢野 忠

2017年6月1日

目次 (Contents)

1. 変数を含むコタンジェントの冪乗の有限和	中西 襄	2
2. 量子力学における周期ポテンシャル問題 (5)	世戸憲治	12
3. 超弦理論と Dirac のハサミ	伊藤仁之	20
4. n 次元の球の体積 1	矢野 忠	22
5. 編集後記	新関章三	30
1. Finite Sums of Powers of the Cotangents Involving a Variable	Noboru NAKANISHI	2
2. A Periodic Potential Problem in Quantum Mechanics (5)	Kenji SETO	12
3. Superstring Theory and Dirac's Scissors	Hitoshi ITO	20
4. The Volume of n -dimensional Hypersphere 1	Tadashi YANO	22
5. Editorial Comments	Shozo NIIZEKI	30

変数を含むコタンジェントの冪乗の有限和

Finite Sums of Powers of the Cotangents Involving a Variable

中西 襄¹

Noboru NAKANISHI

1 はじめに

「コサインの正負冪乗の有限和とチェビシェフ多項式」(「数学・物理通信」6-7)で、変数 x を含むコサインの正負冪乗の有限和を求める公式を与えた。この公式から、変数 x を含むタンジェント (もしくはコタンジェント) の2乗以上の冪乗の有限和を求める公式を導くことが可能である。しかし、その「追記」(「数学・物理通信」7-2)で注意したように、各項の r 依存性は、タンジェントの周期 π に対応した $(r/N)\pi$ ではなく、コサインの周期 2π に対応した $(r/N)(2\pi)$ であった。

そこで今回の論文では、周期 π に対応した級数の和公式を求めることを考える。タンジェントについて考える代わりに、コタンジェントの和公式を主にして定式化した。そのほうが少しばかりきれいに扱えるからである²。タンジェントに関する公式は、(1.5)に与えるように、コタンジェントに関するそれからすぐに導ける。

出発点は「コサインの正負冪乗の有限和とチェビシェフ多項式」において例外とした1乗の場合の和公式である。そしてコタンジェントのよく知られた微分公式 $(d/dx) \cot x = -(1 + \cot^2 x)$ に注目して、一般冪乗の級数和对する漸化式を導く。この両者を用いて和公式を計算するのである。

以下で考察する級数は、

$$W_n(N, x) \equiv \sum_{r=0}^{N-1} \left[\cot \left(x + \frac{r\pi}{N} \right) \right]^n \quad (1.1)$$

である (r の前に因子2がないことに注意)。コタンジェントの周期性 $\cot(\theta + \pi) = \cot \theta$ を使うと、定義から明らかに

$$W_n(N, x) = W_n(N, x + \pi) \quad (1.2)$$

である。また $\cot(-\theta) = -\cot \theta$ と (1.2) を使い、和の取り順を逆にすると、

$$W_n(N, -x) = (-1)^n W_n(N, x) \quad (1.3)$$

を得る。すなわち $W_n(N, x)$ は、 n が偶数ならば x の偶関数、奇数ならば奇関数である。

タンジェントの冪乗和との関係は、 $\tan \theta = (\cot \theta)^{-1}$ により、

$$W_{-n}(N, x) = \sum_{r=0}^{N-1} \left[\tan \left(x + \frac{r\pi}{N} \right) \right]^n \quad (1.4)$$

であるが、 $\cot(\theta + (\pi/2)) = -\tan \theta$ により、

$$W_{-n}(N, x) = (-1)^n W_n \left(N, x + \frac{\pi}{2} \right) \quad (1.5)$$

となるので、タンジェントに関する和公式は改めて計算しなくてもよい。

¹ 京都大学名誉教授, nbr-nak@trio.plala.or.jp

² (2.2) と (6.3) とを比較せよ。

2 $n = 1$ の場合

(1.1) の $n = 0$ の場合は明らかに

$$W_0(N, x) = N \quad (2.1)$$

である.

(1.1) の $n = 1$ の場合は,

$$W_1(N, x) = N \cot(Nx) \quad (2.2)$$

で与えられる³. 証明は「コサインの正負冪乗の有限和とチェビシエフ多項式」(「数学・物理通信」6-7) で与えたタンジェントの場合の証明を少し修正すればよい.

証明: 円分方程式 $X^N - 1 = 0$ の N 個の解は $X = e^{2\pi i(r/N)}$ ($r = 0, 1, \dots, N-1$) であるから, その左辺は

$$X^N - 1 = \prod_{r=0}^{N-1} (X - e^{(2r/N)\pi i}) \quad (2.3)$$

のように因数分解ができる. $X = e^{-2xi}$ を代入すると,

$$\begin{aligned} e^{-2Nxi} - 1 &= \prod_{r=0}^{N-1} (e^{-2xi} - e^{(2r/N)\pi i}) \\ &= (e^{-xi})^N (e^{(1/N)\pi i})^{N(N-1)/2} \prod_{r=0}^{N-1} (e^{-(x+(r/N)\pi)i} - e^{(x+(r/N)\pi)i}) \\ &= (-2i)^N e^{-(Nx-(N-1)\pi/2)i} \prod_{r=0}^{N-1} \sin\left(x + \frac{r\pi}{N}\right) \end{aligned} \quad (2.4)$$

となるから,

$$\prod_{r=0}^{N-1} \sin\left(x + \frac{r\pi}{N}\right) = \frac{1}{2^{N-1}} \sin(Nx) \quad (2.5)$$

を得る. ただしサインのオイラー公式を用いた. (2.5) の対数を取りそれを微分すれば,

$$\sum_{r=0}^{N-1} \cot\left(x + \frac{2r\pi}{N}\right) = N \cot(Nx) \quad (2.6)$$

が得られる. □

3 コタンジェントの冪乗の級数和

$\cot \theta$ の微分が $-\csc^2 \theta = -(1 + \cot^2 \theta)$ であることから,

$$W'_n(N, x) = -n[W_{n-1}(N, x) + W_{n+1}(N, x)] \quad (3.1)$$

である. ただしプライムは x に関する微分を表す. $n \geq 1$ のとき, (3.1) から漸化式

$$W_{n+1}(N, x) = -\frac{1}{n} W'_n(N, x) - W_{n-1}(N, x) \quad (3.2)$$

³この式は森口繁一他著「数学公式 II」p.18 に載っている. なお, (2.5) は p.26 にある.

が成立することがわかる. (2.1) と (2.2) より $W_0(N, x) = N$ および $W_1(N, x) = w$ であるから, (3.2) を使えば逐次 $W_n(N, x)$ を計算することができる. ただし

$$w \equiv N \cot(Nx) \quad (3.3)$$

とおいた. このとき

$$w' = -(w^2 + N^2) \quad (3.4)$$

である. 数学的帰納法により, $W_n(N, x)$ は w と N に関する多項式で, その各項の w に関する次数と N に関する次数との和は n を超えないことがわかる.

以下において, 混乱を生ずるおそれがない場合は $W_n(N, x)$ を W_n と略記する. $n = 5$ までの計算結果は,

$$\begin{aligned} W_0 &= N, \\ W_1 &= w, \\ W_2 &= w^2 + N(N-1), \\ W_3 &= w^3 + (N^2-1)w, \\ W_4 &= w^4 + \frac{4}{3}(N^2-1)w^2 + \frac{1}{3}N(N-1)(N^2+N-3), \\ W_5 &= w^5 + \frac{5}{3}(N^2-1)w^3 + \frac{1}{3}(N^2-1)(2N^2-3)w \end{aligned} \quad (3.5)$$

となる. さらに $n = 8$ まで進めると,

$$\begin{aligned} W_6 &= w^6 + 2(N^2-1)w^4 + \frac{1}{15}(N^2-1)(17N^2-23)w^2 \\ &\quad + \frac{1}{15}N(N-1)[2N(N+1)(N^2-4)+15], \\ W_7 &= w^7 + \frac{7}{3}(N^2-1)w^5 + \frac{7}{45}(N^2-1)(11N^2-14)w^3 \\ &\quad + \frac{1}{45}(N^2-1)(17N^4-53N^2+45)w, \\ W_8 &= w^8 + \frac{8}{3}(N^2-1)w^6 + \frac{4}{15}(N^2-1)(9N^2-11)w^4 \\ &\quad + \frac{8}{315}(N^2-1)(31N^4-88N^2+66)w^2 \\ &\quad + \frac{1}{315}N(N-1)[N(N+1)(17N^4-95N^2+213)-315]. \end{aligned} \quad (3.6)$$

これらの式から W_n の一般形を推測するのは不可能に近い. だがこれを

$$\begin{aligned} W_2 - wW_1 &= (N-1)W_0, \\ W_3 - wW_2 &= (N-1)W_1, \\ W_4 - wW_3 &= \frac{1}{3}(N^2-1)W_2 + \frac{1}{3}(N-1)(N-2)W_0, \\ W_5 - wW_4 &= \frac{1}{3}(N^2-1)W_3 + \frac{1}{3}(N-1)(N-2)W_1, \end{aligned} \quad (3.7)$$

および

$$\begin{aligned}
W_6 - wW_5 &= \frac{1}{3}(N^2 - 1)W_4 + \frac{1}{45}(N^2 - 1)(N^2 - 4)W_2 \\
&\quad + \frac{1}{45}(N - 1)(N - 2)(N^2 + 3N - 13)W_0, \\
W_7 - wW_6 &= \frac{1}{3}(N^2 - 1)W_5 + \frac{1}{45}(N^2 - 1)(N^2 - 4)W_3 \\
&\quad + \frac{1}{45}(N - 1)(N - 2)(N^2 + 3N - 13)W_1, \\
W_8 - wW_7 &= \frac{1}{3}(N^2 - 1)W_6 + \frac{1}{45}(N^2 - 1)(N^2 - 4)W_4 \\
&\quad + \frac{1}{945}(N^2 - 1)(N^2 - 4)(2N^2 - 11)W_2 \\
&\quad + \frac{1}{945}(N - 1)(N - 2)(2N^4 + 6N^3 - 28N^2 - 96N + 251)W_0
\end{aligned} \tag{3.8}$$

のように書き直してみると、幾分規則性が見えてくる。たとえば、 $W_{2m} - wW_{2m-1}$ と $W_{2m+1} - wW_{2m}$ の展開係数はすべて一致するようである。 W_{n-2} の係数は、 $n \geq 4$ で $(N^2 - 1)/3$ である。さらに W_{n-4} の係数は、 $n \geq 6$ で $(N^2 - 1)(N^2 - 4)/45$ であるようだ。このような性質は、 W_{n-2k} に対し、 $n \geq 2k + 2$ で成立するのかもしれない。しかし、やはり $W_n - wW_{n-1}$ の一般形の推定は難しい。ただし、 $N = 1$ のときに右边が 0 になること、および $N = 2$ のときに右边が W_{n-2} に等しくなることは、次節で示すように一般的に証明できる。

4 $N = 2^k$ の場合

$N = 1$ のときは、定義から明らかに

$$W_n = \cot^n x = w^n \tag{4.1}$$

である。

$N = 2$ のときは

$$W_n - wW_{n-1} = W_{n-2} \tag{4.2}$$

が成立する。

証明： 簡単のため、 $\sin x \equiv s$ 、 $\cos x \equiv c$ と書くと、

$$\begin{aligned}
W_n &= \cot^n x + \cot^n(x + (\pi/2)) = \cot^n x + (-1)^n \tan^n x \\
&= \frac{c^{2n} + (-1)^n s^{2n}}{s^n c^n}
\end{aligned} \tag{4.3}$$

なるゆえ、

$$\begin{aligned}
wW_{n-1} &= W_1 W_{n-1} = \frac{c^2 - s^2}{sc} \cdot \frac{c^{2n-2} + (-1)^{n-1} s^{2n-2}}{s^{n-1} c^{n-1}} \\
&= \frac{c^{2n} - s^2 c^{2n-2} + (-1)^n (s^{2n} - c^2 s^{2n-2})}{s^n c^n} \\
&= W_n - \frac{c^{2(n-2)} + (-1)^{n-2} s^{2(n-2)}}{s^{n-2} c^{n-2}} \\
&= W_n - W_{n-2}
\end{aligned} \tag{4.4}$$

となる。これを移項すればよい。□

$N = 4$ のとき, (3.5), (3.6) から

$$\begin{aligned}
W_2 &= w^2 + 12, \\
W_3 &= w^3 + 15w, \\
W_4 &= w^4 + 20w^2 + 68, \\
W_5 &= w^5 + 25w^3 + 145w, \\
W_6 &= w^6 + 30w^4 + 249w^2 + 396, \\
W_7 &= w^7 + 35w^5 + 378w^3 + 1183w, \\
W_8 &= w^8 + 40w^6 + 532w^4 + 2512w^2 + 2308
\end{aligned} \tag{4.5}$$

を得る. また, (3.7), (3.8) からは

$$\begin{aligned}
W_2 - wW_1 &= 3W_0, \\
W_3 - wW_2 &= 3W_1, \\
W_4 - wW_3 &= 5W_2 + 2W_0, \\
W_5 - wW_4 &= 5W_3 + 2W_1, \\
W_6 - wW_5 &= 5W_4 + 4W_2 + 2W_0, \\
W_7 - wW_6 &= 5W_5 + 4W_3 + 2W_1, \\
W_8 - wW_7 &= 5W_6 + 4W_4 + 4W_2 + 2W_0
\end{aligned} \tag{4.6}$$

を得る. (4.6) における係数は驚くべくシンプルである.

$N = 8$ のとき, (3.5), (3.6) から,

$$\begin{aligned}
W_2 &= w^2 + 56, \\
W_3 &= w^3 + 63w, \\
W_4 &= w^4 + 84w^2 + 1288, \\
W_5 &= w^5 + 105w^3 + 2625w, \\
W_6 &= w^6 + 126w^4 + 4473w^2 + 32312, \\
W_7 &= w^7 + 147w^5 + 6762w^3 + 92799w, \\
W_8 &= w^8 + 168w^6 + 9492w^4 + 194256w^2 + 816136
\end{aligned} \tag{4.7}$$

を得る. (3.7), (3.8) からは

$$\begin{aligned}
W_2 - wW_1 &= 7W_0, \\
W_3 - wW_2 &= 7W_1, \\
W_4 - wW_3 &= 21W_2 + 42W_0, \\
W_5 - wW_4 &= 21W_3 + 42W_1, \\
W_6 - wW_5 &= 21W_4 + 84W_2 + 70W_0, \\
W_7 - wW_6 &= 21W_5 + 84W_3 + 70W_1, \\
W_8 - wW_7 &= 21W_6 + 84W_4 + 468W_2 + 398W_0
\end{aligned} \tag{4.8}$$

を得る.

上の結果から, N が 2 の冪乗であると, いずれの式も係数はすべて正の整数になるようである. もし係数がすべて整数だという性質が, $N = 2^k$ のときつねに成立するとすると, 一般式に現れる係数の N 依存性はかなり制約のきついものとなる.

(3.7) の第 3 式以下と (3.8) の各式の右辺第 1 項に現れる $(N^2 - 1)/3$ は, $N = 2^k$ のとき必ず整数になる. じっさい, 任意の隣接する 3 つの整数はそのうち 1 個が必ず 3 の倍数だから, $2^k - 1, 2^k, 2^k + 1$ のうちの 1 つは 3 の倍数である. 2^k は 3 の倍数ではないから, $N^2 - 1 = (2^k - 1)(2^k + 1)$ は 3 の倍数である.

同様に (3.8) の第 2 項に現れる $(N^2 - 1)(N^2 - 4)$ は, $N = 2^k$ ($k \geq 2$) のとき 45 の倍数である. なぜなら, 上述により $2^{2k} - 1$ と $4(2^{2(k-1)} - 1)$ はともに 3 の倍数である. したがって, $(N^2 - 1)(N^2 - 4)$ は 9 の倍数である. 隣接する 5 つの整数 $2^k - 2, 2^k - 1, 2^k, 2^k + 1, 2^k + 2$ のうちの 1 つは 5 の倍数であるが, 2^k は 5 の倍数ではないから, $(N^2 - 1)(N^2 - 4)$ はまた 5 の倍数でもある. したがってそれは 45 で整除される.

(3.8) 第 1 式と第 2 式の第 3 項に現れる $(N - 1)(N - 2)(N^2 + 3N - 13)$ の場合は, $= (N^2 - 1)(N^2 - 4) - 15(N - 1)(N - 2)$ だから上の場合に帰着する. ほかの場合も同様に扱えると期待されるが, 一般的な考察は難しい.

5 正冪の級数和と負冪の級数和との関係

1 節で指摘したように, タンジェントの冪乗和はコタンジェントの冪乗和に帰着する. すなわち, 冪指数 n が負の場合は, (1.5) によって n が正の場合に還元される. しかし, 級数の和の性質を利用すると, x の値を変えない還元公式が得られるのである. 面白いことに, この還元公式は, N が偶数か奇数かによって形が異なる.

N が偶数ならば,

$$W_{-n}(N, x) = (-1)^n W_n(N, x). \quad (5.1)$$

証明:

$$W_{-n}(N, x) = \sum_{r=0}^{N-1} \left[\tan \left(x + \frac{r\pi}{N} \right) \right]^n = \left(\sum_{r=0}^{N/2-1} + \sum_{r=N/2}^{N-1} \right) \left[\tan \left(x + \frac{r\pi}{N} \right) \right]^n \quad (5.2)$$

において, $\tan \theta = \tan(\theta + \pi)$ を使って右辺第 1 項の r についての和を N から $3N/2 - 1$ までに変えれば,

$$W_{-n}(N, x) = \sum_{r=N/2}^{3N/2-1} \left[\tan \left(x + \frac{r\pi}{N} \right) \right]^n = \sum_{r=0}^{N-1} \left[\tan \left(x + \frac{r\pi}{N} + \frac{\pi}{2} \right) \right]^n \quad (5.3)$$

となる. $\tan(\theta + \pi/2) = -\cot \theta$ なるゆえ,

$$W_{-n}(N, x) = (-1)^n \sum_{r=0}^{N-1} \left[\cot \left(x + \frac{r\pi}{N} \right) \right]^n = (-1)^n W_n(N, x) \quad (5.4)$$

を得る. \square

N が奇数ならば,

$$W_{-n}(N, x) = (-1)^n [W_n(2N, x) - W_n(N, x)]. \quad (5.5)$$

証明：

$$\begin{aligned}
W_{-n}(N, x) &= \left(\sum_{r=0}^{(N-1)/2} + \sum_{(N+1)/2}^{N-1} \right) \left[\tan \left(x + \frac{r\pi}{N} \right) \right]^n \\
&= \left(\sum_{r=N}^{(3N-1)/2} + \sum_{(N+1)/2}^{N-1} \right) \left[\tan \left(x + \frac{r\pi}{N} \right) \right]^n \\
&= \sum_{r=0}^{N-1} \left[\tan \left(x + \frac{(r + (N+1)/2)\pi}{N} \right) \right]^n \\
&= \sum_{r=0}^{N-1} \left[\tan \left(x + \frac{(2r+1)\pi}{2N} + \frac{\pi}{2} \right) \right]^n \\
&= (-1)^n \sum_{r=0}^{N-1} \left[\cot \left(x + \frac{(2r+1)\pi}{2N} \right) \right]^n.
\end{aligned} \tag{5.6}$$

他方,

$$W_n(N, x) = \sum_{r=0}^{N-1} \left[\cot \left(x + \frac{2r\pi}{2N} \right) \right]^n \tag{5.7}$$

であるから,

$$(-1)^n W_{-n}(N, x) + W_n(N, x) = W_n(2N, x) \tag{5.8}$$

となり, (5.5) を得る. \square

6 タンジェントの冪乗の級数和

負冪の場合, すなわちタンジェントの正冪の級数和

$$W_{-n}(N, x) = \sum_{r=0}^{N-1} \left[\tan \left(x + \frac{r\pi}{N} \right) \right]^n \tag{6.1}$$

を考察する ($n > 0$).

$-x + (\pi/2) \equiv \tilde{x}$ とおくと, (1.3) と (1.5) から,

$$W_{-n}(N, x) = (-1)^n W_{-n}(N, -x) = W_n(N, \tilde{x}) \tag{6.2}$$

である. つまりタンジェントに関する式は, コタンジェントに関する式の x を \tilde{x} に置き換えれば得られる. とくに,

$$W_{-1}(N, x) = \tilde{w} \equiv N \cot(N\tilde{x}) = -N \cot \left(Nx - \frac{N\pi}{2} \right) \tag{6.3}$$

である. すなわち \tilde{w} は, N が偶数ならば $-N \cot(Nx)$, N が奇数ならば $N \tan(Nx)$ である.

(3.5) の x を \tilde{x} に置き換えると,

$$\begin{aligned}
W_{-1} &= \tilde{w}, \\
W_{-2} &= \tilde{w}^2 + N(N-1), \\
W_{-3} &= \tilde{w}^3 + (N^2-1)\tilde{w}, \\
W_{-4} &= \tilde{w}^4 + \frac{4}{3}(N^2-1)\tilde{w}^2 + \frac{1}{3}N(N-1)(N^2+N-3), \\
W_{-5} &= \tilde{w}^5 + \frac{5}{3}(N^2-1)\tilde{w}^3 + \frac{1}{3}(N^2-1)(2N^2-3)\tilde{w}
\end{aligned} \tag{6.4}$$

がわかる. $n \geq 6$ も同様.

さて, N が偶数の場合は, $\tilde{w} = -w$ であるから, 上の結果は (5.1) と (1.3) から直ちに従うものである. しかし N が奇数の場合は, (5.5) と上の結果とのコンシステンシーは自明ではない. (5.5) の $n = 1$ の場合は, コタンジェントの倍角公式 $\cot(2\theta) = \frac{1}{2}(\cot \theta - \tan \theta)$ を用いて,

$$\begin{aligned}
W_{-1}(N, x) &= -[W_1(2N, x) - W_1(N, x)] \\
&= -2N \cot(2Nx) + N \cot(Nx) \\
&= -N[\cot(Nx) - \tan(Nx)] + N \cot(Nx) \\
&= N \tan(Nx) \\
&= \tilde{w}
\end{aligned} \tag{6.5}$$

のように確かめられる. 同様に (5.5) の $n = 2, 3$ の場合は,

$$\begin{aligned}
W_{-2}(N, x) &= W_2(2N, x) - W_2(N, x) \\
&= [2N \cot(2Nx)]^2 + 2N(2N - 1) - [N \cot(Nx)]^2 - N(N - 1) \\
&= N^2[\cot(Nx) - \tan(Nx)]^2 - N^2 \cot^2(Nx) + 3N^2 - N \\
&= [N \tan(Nx)]^2 + N^2 - N \\
&= \tilde{w}^2 + N(N - 1);
\end{aligned} \tag{6.6}$$

$$\begin{aligned}
W_{-3}(N, x) &= -[W_3(2N, x) - W_3(N, x)] \\
&= -[2N \cot(2Nx)]^3 - [(2N)^2 - 1][2N \cot(2Nx)] \\
&\quad + [N \cot(Nx)]^3 + (N^2 - 1)N \cot(Nx) \\
&= -N^3[\cot(Nx) - \tan(Nx)]^3 - (4N^2 - 1)N[\cot(Nx) - \tan(Nx)] \\
&\quad + N^3 \cot^3(Nx) + (N^2 - 1)N \cot(Nx) \\
&= [N \tan(Nx)]^3 + (N^2 - 1)[N \tan(Nx)] \\
&= \tilde{w}^3 + (N^2 - 1)\tilde{w}
\end{aligned} \tag{6.7}$$

のように確認できる.

この性質はきつい条件であり, $W_n(N, x)$ の形をほとんど決定する. たとえば, $W_2(N, x)$ を $w^2 + f(N)$ と仮定するとき, (6.6) の計算から, $f(N)$ は関数方程式

$$f(2N) = 2f(N) + 2N^2 \tag{6.8}$$

を満たさなければならないはずである. (6.8) の解は

$$f(N) = N^2 + cN \tag{6.9}$$

で与えられる. c は任意定数だが, (4.1) を使えば $f(1) = 0$ でなければならないので, $c = -1$ と決まる.

一般に, 関係式 $W_n(2N, x) = W_n(N, x) + (-1)^n W_{-n}(N, x)$ (N を奇数に限定しなくてもよい) と「 $W_{-n}(N, x)$ の $\tilde{w} = N \tan(Nx)$ での関数形は $W_n(N, x)$ の $w = N \cot(Nx)$ での関数形と同形である」という命題に, w の n 次多項式 $W_n(N, x)$ の最高次の項の係数が 1 であることと付加条件 $W_n(1, x) = w^n$ をつければ, $W_n(N, x)$ の形は一意的に決まることが証明できる (数学的帰納法と関数方程式の線形性を用いる.).

7 x の特殊値

特殊値 $x = 0$ のときを考える． $\cot 0$ は無限大になってしまうので， $n < 0$ ， $N = 2m + 1$ の場合を考える．このとき $\tilde{w} = N \tan(Nx) = 0$ となるから， $n = -2k$ ならば定数項のみが生き残る．したがって (3.5) と (3.6) から，

$$\begin{aligned} W_{-2}(2m+1, 0) &= 2m(2m+1), \\ W_{-4}(2m+1, 0) &= \frac{2}{3}m(2m+1)(4m^2+6m-1), \\ W_{-6}(2m+1, 0) &= \frac{2}{15}m(2m+1)(32m^4+80m^3+40m^2-20m+3), \\ W_{-8}(2m+1, 0) &= \frac{2}{315}m(2m+1)(1088m^6+3808m^5+3920m^4 \\ &\quad + 280m^3 - 868m^2 + 322m - 45) \end{aligned} \quad (7.1)$$

となる．他方， $x = 0$ のとき，(1.4) において $r = 0$ の項はゼロ， $r = m + 1$ から $r = 2m$ までの項の和は $r = 1$ から $r = m$ までの項の和に等しいことに注意すれば，

$$W_{-2k}(2m+1, 0) = 2\tilde{S}_k(m) \quad (7.2)$$

であることがわかる．ただし

$$\tilde{S}_k(m) \equiv \sum_{r=1}^m \tan^{2k} \left(\frac{r\pi}{2m+1} \right) \quad (7.3)$$

は「三角関数の冪乗の有限和」(「数学．物理通信」5-4) で用いた記号である． $\tilde{S}_k(m)$ の具体的な式は「三角関数の冪乗の有限和 2」(「数学．物理通信」5-6) の (2.5) ($k = 1, 2, 3$ の場合) と付記の第 2 式 ($k = 4$ の場合) に与えた．これらを 2 倍したものはもちろん (7.1) の右辺と完全に一致する．

同様に，特殊値 $x = \pi/(2N)$ を考えると， $\cot(\pi/2) = 0$ なので $w = 0$ となる．つまり， W_n の定数項のみが生き残る．

まず N が偶数ならば， $N = 2m$ とすると，

$$W_{2k} \left(2m, \frac{\pi}{4m} \right) = W_{2k}(2m, x) \Big|_{w=0} = 2U_k(m) \quad (7.4)$$

であることがわかる．ただし

$$U_k(m) \equiv \sum_{r=0}^{m-1} \cot^{2k} \left(\frac{(2r+1)\pi}{4m} \right) \quad (7.5)$$

とする．その具体的な式は，上記「三角関数の冪乗の有限和 2」の (3.6) ($k = 1, 2, 3$ の場合) と付記の第 3 式 ($k = 4$ の場合) に与えた．

奇数 $N = 2m + 1$ の場合， W_{2k} の定数項は W_{-2k} のそれと同じだから， $k = 1, 2, 3, 4$ では (7.1) の右辺と一

致する。じっさい、そのことは直接の変形

$$\begin{aligned}
 W_{2k}(2m+1, \frac{\pi}{2(2m+1)}) &= \sum_{r=0}^{2m} \cot^{2k} \left(\frac{(2r+1)\pi}{2(2m+1)} \right) \\
 &= \sum_{r=0}^{2m} \tan^{2k} \left(\frac{(2r+1)\pi}{2(2m+1)} - \frac{\pi}{2} \right) \\
 &= \sum_{r=0}^{2m} \tan^{2k} \left(\frac{(r-m)\pi}{2m+1} \right) \\
 &= 2 \sum_{r=1}^m \tan^{2k} \left(\frac{r\pi}{2m+1} \right) \\
 &= 2\tilde{S}_k(m) = W_{-2k}(2m+1, 0)
 \end{aligned} \tag{7.6}$$

でも確認できる。

量子力学における周期ポテンシャル問題 (5)

世戸 憲治*

A Periodic Potential Problem in Quantum Mechanics (5)

Kenji SETO*

1 はじめに

前回の「量子力学における周期ポテンシャル問題 (4)」(「数学・物理通信」7巻1号)に続いて、ここでは、2次式で表される周期ポテンシャルが負の場合を解析してみる。すなわち、1次元の Schrödinger 方程式

$$\left[-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2}{dx^2} + V(x) \right] \Psi = E\Psi \quad (1.1)$$

において、ポテンシャル $V(x)$ が周期 2ℓ の周期関数 $V(x+2\ell) = V(x)$ で、 $-\ell \leq x < \ell$ の範囲で

$$V(x) = V_0 \left(\frac{x}{\ell} \right)^2, \quad V_0 < 0 \quad (1.2)$$

と定義された場合、前回はこの V_0 が正の場合を扱ったが、今回は、これが負の場合を解析してみる。途中までは、前回のものと同じ処方箋に従うが、この方程式の実関数で表される解を求めることは、かなり煩雑な計算を余儀無くされる。

以下、数式簡素化のため、座標 x , および、ポテンシャルの大きさ V_0 , エネルギー E を無次元化し、

$$\frac{x}{\ell} \rightarrow x, \quad \frac{2m\ell^2}{\hbar^2} V_0 \rightarrow V_0, \quad \frac{2m\ell^2}{\hbar^2} E \rightarrow E \quad (1.3)$$

と改めて置き直すことにする。この置き換えで方程式は、

$$\left[\frac{d^2}{dx^2} + E - V(x) \right] \Psi = 0 \quad (1.4)$$

となり、ポテンシャル $V(x)$ は周期 2 の周期関数 $V(x+2) = V(x)$ で、 $-1 \leq x < 1$ の範囲で

$$V(x) = V_0 x^2 \quad (1.5)$$

となり、この範囲での方程式は

$$\left[\frac{d^2}{dx^2} + E - V_0 x^2 \right] \Psi = 0 \quad (1.6)$$

となる。

* 北海学園大学名誉教授

E-mail: seto@pony.ocn.ne.jp

2 方程式の解法

初めは、この方程式の解法として、前回のものをそのまま踏襲した形で書いておく。すなわち、定数 μ を

$$\mu = (4V_0)^{1/4} \quad (2.1)$$

と導入し、これを用いて、変数 x から z に、また、エネルギー E から κ に、

$$z = \mu x, \quad \kappa = \frac{E}{\mu^2} - \frac{1}{2} \quad (2.2)$$

と変換すると、 $-1 \leq x < 1$ での方程式 (1.6) は、

$$\left[\frac{d^2}{dz^2} + \kappa + \frac{1}{2} - \frac{z^2}{4} \right] \Psi = 0 \quad (2.3)$$

となる。これは、Weber の微分方程式と呼ばれるもので、その解は、放物柱関数 (Weber 関数) $D_\kappa(z)$ であり、これは合流型超幾何関数 ${}_1F_1$ を用いて、

$$D_\kappa(z) = 2^{\kappa/2} \sqrt{\pi} e^{-z^2/4} \left[\frac{1}{\Gamma((1-\kappa)/2)} {}_1F_1\left(-\frac{\kappa}{2}, \frac{1}{2}; \frac{z^2}{2}\right) - \frac{\sqrt{2}z}{\Gamma(-\kappa/2)} {}_1F_1\left(\frac{1-\kappa}{2}, \frac{3}{2}; \frac{z^2}{2}\right) \right] \quad (2.4)$$

と定義される*¹。ここまでは、前回のものと同じであるが、今回の $V_0 < 0$ の場合は、(2.1) 式で定義された μ は、

$$\mu = e^{\pi i/4} \nu, \quad \nu \equiv \sqrt[4]{4|V_0|} \quad (2.5)$$

と複素数になる*²。ここで、 ν はこの第2式で定義する。これから、(2.2) 式で定義された z 、および、 κ は、

$$z = e^{\pi i/4} \nu x, \quad \kappa = -i\lambda - \frac{1}{2}, \quad \lambda \equiv \frac{E}{\nu^2} \quad (2.6)$$

となる。ただし、 λ はこの第3式で定義する。以下、関数定義の利便性を考慮して、 z に替わる実変数として、

$$\zeta = \nu x \quad (2.7)$$

を定義しておく。

ここで、Weber 関数 (2.4) 式について、元の方程式 (2.3) が z の符号反転に対し不変、したがって、 ζ の符号反転にも不変であることから、この大括弧をはずしたときの第1項目、第2項目の定数係数を除いたものを、

$$\begin{aligned} S_1(\zeta) &= e^{-i\zeta^2/4} {}_1F_1\left(\frac{i\lambda}{2} + \frac{1}{4}, \frac{1}{2}; \frac{i}{2}\zeta^2\right) \\ S_2(\zeta) &= \zeta e^{-i\zeta^2/4} {}_1F_1\left(\frac{i\lambda}{2} + \frac{3}{4}, \frac{3}{2}; \frac{i}{2}\zeta^2\right) \end{aligned} \quad (2.8)$$

と定義したとき、これらも、また、元の方程式 (2.3) の解となることに注意する。ここで、 $S_1(\zeta)$ 、 $S_2(\zeta)$ は、それぞれ、偶関数、奇関数である。さらに、元の方程式 (2.3) は実係数の方程式なので、これらの式の複素共役を

*¹ 「数学公式3」(岩波全書) p.75-78

*² より一般には、 $\mu = e^{\pm\pi i/4} \nu$, or $e^{\pm 3\pi i/4} \nu$ も候補となり得るが、ここでは、1つの候補を求めるだけで十分である。

とったものも解になるので、これらの実部、あるいは、虚部をとったものも解である。ここでは、実部をとることとし、

$$\begin{aligned} T_1(\zeta) &= \Re \left[e^{-i\zeta^2/4} {}_1F_1 \left(\frac{i\lambda}{2} + \frac{1}{4}, \frac{1}{2}; \frac{i}{2}\zeta^2 \right) \right] \\ T_2(\zeta) &= \Re \left[\zeta e^{-i\zeta^2/4} {}_1F_1 \left(\frac{i\lambda}{2} + \frac{3}{4}, \frac{3}{2}; \frac{i}{2}\zeta^2 \right) \right] \end{aligned} \quad (2.9)$$

を方程式 (1.6) の $-1 \leq x < 1$ における 2 個の独立解とする^{*3}。なお、 S_1, S_2 と同じく、 $T_1(\zeta), T_2(\zeta)$ も、それぞれ、 ζ の偶関数、奇関数となる。これらの解を、合流型超幾何関数の部分で、 ζ の低次の項に展開すると、

$$\begin{aligned} T_1(\zeta) &= \cos\left(\frac{\zeta^2}{4}\right) \left(1 - \frac{\lambda}{2}\zeta^2\right) + \sin\left(\frac{\zeta^2}{4}\right) \frac{\zeta^2}{4} + \dots \\ T_2(\zeta) &= \cos\left(\frac{\zeta^2}{4}\right) \left(\zeta - \frac{\lambda}{6}\zeta^3\right) + \sin\left(\frac{\zeta^2}{4}\right) \frac{\zeta^3}{4} + \dots \end{aligned} \quad (2.10)$$

となる。ここで、これら関数の Wronskian

$$W(\zeta) = T_1(\zeta)T_2'(\zeta) - T_1'(\zeta)T_2(\zeta) \quad (2.11)$$

を求める。ここで、プライムは ζ での微分を表す。 T_1, T_2 が方程式 (1.6) を満たすことから、 $dW/d\zeta = 0$ となるので、この Wronskian は定数である。そこで、(2.10) 式を利用して、 $\zeta = 0$ でこの値を見積もると、

$$W(\zeta) \equiv 1 \quad (2.12)$$

となる。

この関数 T_1, T_2 を用いて、方程式 (1.6) の一般解を、任意定数 A, B を用いて、

$$\Psi(x) = AT_1(\nu x) + BT_2(\nu x) \quad (2.13)$$

とおく。これは、あくまでも、範囲 $-1 \leq x < 1$ での解であって、ポテンシャルが周期的であっても、この解が周期的に続くわけではない。Floquet の定理によると、波動関数は、周期が 1 つ増えるごとに元の波動関数に、伝播数と呼ばれる定数 K ($0 \leq K \leq \pi$) を用いた位相 e^{iK} あるいは e^{-iK} を付けたものが次の周期の波動関数になることが知られている。したがって、範囲 $1 \leq x < 3$ での波動関数は

$$\Psi(x) = e^{iK} [AT_1(\nu(x-2)) + BT_2(\nu(x-2))], \quad \text{or} \quad \Psi(x) = e^{-iK} [AT_1(\nu(x-2)) + BT_2(\nu(x-2))] \quad (2.14)$$

となる。この K の前に付く符号は縮退した 2 個の波動関数が存在することを意味するが、ここでは当分のあいだこの第 1 式の方で議論を進める。また、 $K = 0, \pi$ のときは、これら 2 つの波動関数は同じものになってしまうが、そのときは K で微分したものがもう 1 つの解を与えるはずである。ただし、この種の計算は面倒になるので、ここではその場合を例外として扱わない。したがって、以後、 K の範囲は $0 < K < \pi$ とする。

つぎに成すべきことは、この (2.13) (2.14) 式を、 $x = 1$ で、関数自身とその微係数が連続となるように繋ぐことである。結果は、

$$AT_1(\nu) + BT_2(\nu) = e^{iK} [AT_1(\nu) - BT_2(\nu)], \quad AT_1'(\nu) + BT_2'(\nu) = e^{iK} [-AT_1'(\nu) + BT_2'(\nu)] \quad (2.15)$$

^{*3} 仮に、 T_1, T_2 のいずれか一方でも虚部を取ってしまうと、以下で述べる Wronskian がゼロとなるので、2 個の独立解としては不適格である。また、「付録 1」に解そのものとしても不適格な理由を示す。

となる．ここで，関数 T_1, T_2 の偶奇性を用いた．あるいは，これらをまとめて，

$$\begin{pmatrix} (1 - e^{iK})T_1(\nu) & (1 + e^{iK})T_2(\nu) \\ (1 + e^{iK})T_1'(\nu) & (1 - e^{iK})T_2'(\nu) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (2.16)$$

となる．ここで， A, B が両方ともゼロとならないためには，この係数行列式の値がゼロでなければならず，

$$\cos(K) = T_1(\nu)T_2'(\nu) + T_1'(\nu)T_2(\nu) \quad (2.17)$$

を得る．ここで，Wronskian の式 (2.11) (2.12) を用いた．この式から，伝播数 K が求まるためには，右辺の絶対値が 1 以下でなければならず，これから，関数 T_1, T_2 に含まれる λ ，あるいは，(2.6) 式からエネルギー E の取り得る値の範囲が決まり，いわゆるエネルギーのバンド構造が決まることになる．この意味で，この式を固有値方程式と呼ぶことにする．

ここで， A, B の値を (2.15) の第 1 式が成り立つように，

$$A = (1 + e^{iK})T_2(\nu), \quad B = -(1 - e^{iK})T_1(\nu) \quad (2.18)$$

と選ぶことにする．これを用いて，一般の x に対する波動関数は， n を整数として， $2n - 1 \leq x < 2n + 1$ の範囲で，

$$\Psi(x) = e^{iKn} [(1 + e^{iK})T_2(\nu)T_1(\nu(x - 2n)) - (1 - e^{iK})T_1(\nu)T_2(\nu(x - 2n))] \quad (2.19)$$

と表される．もちろん，これは，まだ，規格化されたものではない．

3 波動関数の規格化

以下では，エネルギー依存性を明示するため，波動関数 $\Psi(x)$ ，および，関数 $T_1(\zeta), T_2(\zeta)$ を，それぞれ， $\Psi(x, E), T_1(\zeta, \lambda), T_2(\zeta, \lambda)$ と記すことにする．ここで，波動関数の規格化のため，一般に異なる 2 個のエネルギー E, E' を考え，これに属する (2.6) 式の λ を λ, λ' ，また，これに対応して，(2.17) 式から決まる伝播数 K を K, K' とする．波動関数の規格化の式は，(2.19) 式を考慮すると，

$$\int_{-\infty}^{\infty} \overline{\Psi(x, E)} \Psi(x, E') dx = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int_{2n-1}^{2n+1} \overline{\Psi(x, E)} \Psi(x, E') dx = \left(\sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{-i(K-K')n} \right) \int_{-1}^1 \overline{\Psi(x, E)} \Psi(x, E') dx \quad (3.1)$$

となる．ここで，上付傍線は複素共役をとることを意味する．この和の部分は，超関数公式

$$\lim_{M \rightarrow \infty} \sum_{n=-M}^M e^{-i(K-K')n} = 2\pi \delta(K - K'), \quad 0 < K, K' < \pi \quad (3.2)$$

が使える，デルタ関数を用いた直交性がでる．つぎに，積分の部分を実行するには， E, E' に対応する (1.6) 式を，

$$\left[\frac{d^2}{dx^2} + E - V_0 x^2 \right] \overline{\Psi(x, E)} = 0, \quad \left[\frac{d^2}{dx^2} + E' - V_0 x^2 \right] \Psi(x, E') = 0 \quad (3.3)$$

と書いておく．ただし， E に対応する方は複素共役を取ったものにしておく．この第 1 式に $\Psi(x, E')$ を，また，第 2 式には $\overline{\Psi(x, E)}$ を掛けてから，辺々を引き算すると，

$$\frac{d}{dx} \left[\overline{\Psi(x, E)} \frac{d\Psi(x, E')}{dx} - \frac{d\overline{\Psi(x, E)}}{dx} \Psi(x, E') \right] - (E - E') \overline{\Psi(x, E)} \Psi(x, E') = 0 \quad (3.4)$$

となり、これを、 -1 から 1 まで積分すると、

$$\int_{-1}^1 \overline{\Psi(x, E)} \Psi(x, E') dx = \frac{1}{E - E'} \left[\overline{\Psi(x, E)} \frac{d\Psi(x, E')}{dx} - \frac{d\overline{\Psi(x, E)}}{dx} \Psi(x, E') \right]_{-1}^1 \quad (3.5)$$

となる。ここで、この右辺に $n = 0$ とした (2.19) 式を代入すると、16 項がでてくるが、関数 T_1, T_2 の偶奇性を用いると半分は消え、さらに、Wronskian の (2.11) (2.12) 式、固有値方程式 (2.17) 式を用いると、うまくまとめることができ、

$$\int_{-1}^1 \overline{\Psi(x, E)} \Psi(x, E') dx = \frac{2\nu}{E - E'} \left[T_1(\nu, \lambda) T_2(\nu, \lambda) [(1 + e^{-i(K-K')}) \cos(K') - (e^{-iK} + e^{iK'})] \right. \\ \left. - T_1(\nu, \lambda') T_2(\nu, \lambda') [(1 + e^{-i(K-K')}) \cos(K) - (e^{-iK} + e^{iK'})] \right] \quad (3.6)$$

となる。これを (3.1) 式に代入し、分母の E, E' を (2.6) の第 3 式を用いて、 λ, λ' で表すと、

$$\int_{-\infty}^{\infty} \overline{\Psi(x, E)} \Psi(x, E') dx = \frac{4\pi}{\nu(\lambda - \lambda')} \left[T_1(\nu, \lambda) T_2(\nu, \lambda) [(1 + e^{-i(K-K')}) \cos(K') - (e^{-iK} + e^{iK'})] \right. \\ \left. - T_1(\nu, \lambda') T_2(\nu, \lambda') [(1 + e^{-i(K-K')}) \cos(K) - (e^{-iK} + e^{iK'})] \right] \delta(K - K') \quad (3.7)$$

という結果になる。ここで、1 つ注意が必要である。 λ を決めると固有値方程式 (2.17) から伝播数 K が一意に決まるが、逆に K を決めるときには、 λ は一意に決まるわけではなく、各バンドごとの λ が決まるということである。したがって、 λ と λ' が異なるバンドに属するときは、例え、 $K = K'$ であっても $\lambda \neq \lambda'$ なので、この式の値はゼロとなり、異なるバンド間の直交性がでる。また、 λ と λ' が同じバンドに属するときは、この式は $0/0$ の不定形となるので、極限值をとることにする。すなわち、l'Hôpital の定理にしたがって、分母、分子をそれぞれ λ で偏微分してから、 $\lambda' \rightarrow \lambda$ とおく。結果は、

$$\int_{-\infty}^{\infty} \overline{\Psi(x, E)} \Psi(x, E') dx = \frac{8\pi}{\nu} T_1(\nu, \lambda) T_2(\nu, \lambda) \sin(K) \frac{dK}{d\lambda} \delta(K - K') \quad (3.8)$$

となる。この式のデルタ関数を除いた部分は正定値になるべき量であり、 $0 < K < \pi$ で $\sin(K)$ は正なので、積 $T_1(\nu, \lambda) T_2(\nu, \lambda)$ と $dK/d\lambda$ は必ず同符号でなければならない。このことの直接証明はここではしないが、次節の数値計算例では確かに満たされている。さらに、この式のデルタ関数の部分をエネルギー E で表すようにすると、

$$\int_{-\infty}^{\infty} \overline{\Psi(x, E)} \Psi(x, E') dx = N^2(E) \delta(E - E'), \quad N^2(E) = 8\pi\nu |T_1(\nu, \lambda) T_2(\nu, \lambda)| \sin(K) \quad (3.9)$$

となる。ここに、 $N(E)$ は規格化定数で、 $\Psi(x, E)/N(E)$ が規格化された波動関数となる。なお、 K の符号を変えた (2.14) の第 2 式を採用した場合は、 $\sin(K)$ 、 $dK/d\lambda$ の符号が両方共に反転するので、ここでの規格化の式はそのまま変更なしに使えることを注意する。

4 数値計算例

(2.9) 式で定義された関数 $T_1(\zeta, \lambda)$ 、 $T_2(\zeta, \lambda)$ の $\lambda = 0$ の場合については、Bessel 関数で表すことができることを「付録 1」に示すが、一般の λ についてはどのような関数なのかは、この式からは想像できない。そこで、数値的にグラフ化したものを以下の図 1-1、および、図 1-2 に示す。この図は、水平右向きに ζ 軸、右斜め上方

向に λ 軸, 上方向に T_1 (図 1-1), または, T_2 (図 1-2) をとって, $0 \leq \zeta \leq 5$, $0 \leq \lambda \leq 10$ の範囲で立体的に図示したものである. 前回で用いた関数, $S_1(z, \kappa)$, $S_2(z, \kappa)$ に比べると, 今回のものはかなりおとなしい関数で, T_1 , T_2 共に ζ 方向にゆっくり振動しているのがわかる. ただし, 今回のものは, $E < 0$ したがって, $\lambda < 0$ の領域もあり得るが, この領域では T_1 , T_2 共に振幅はかなり大きくなるが, 図の見易さからこの領域を図示していない.

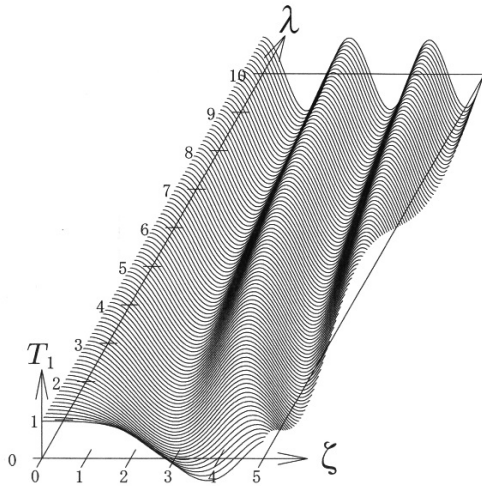


図 1-1 関数 $T_1(\zeta, \lambda)$ のグラフ

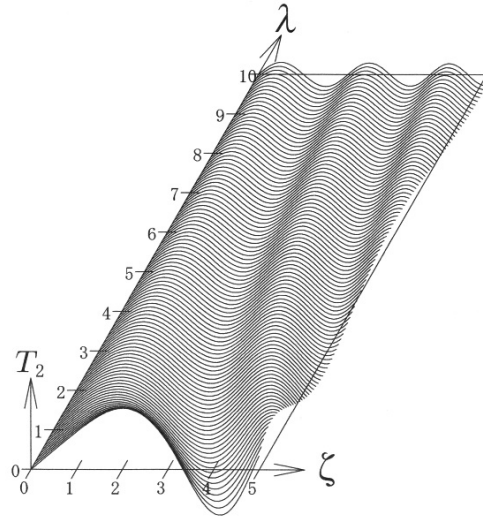


図 1-2 関数 $T_2(\zeta, \lambda)$ のグラフ

つぎに, 固有値方程式 (2.17) を用いて, ポテンシャルの大きさ V_0 を一定値に固定したとき, エネルギー E の値に対し, 伝播数 K がどのように決まるかを数値的に求めてみた. $V_0 = -50$ とした場合を, $-50 < E < 250$ の範囲で, 以下の図 2 に示す. エネルギーが小さいときは K の値が一定の幅を持ちながら飛び飛びに決まり, いわゆるエネルギーのバンド構造が現れる. エネルギーが大きくなるにつれ, これらのバンドは癒着してしまい完全なバンドではなくなるが, これらも含めて, バンドということにする. この図で, 曲線に付いている色は, (3.8) 式のところで述べたように, 積 $T_1(\nu, \lambda)T_2(\nu, \lambda)$ が正のときは赤, 負のときは青となるように付けたものである. この $T_1(\nu, \lambda)T_2(\nu, \lambda)$ の正負は, これら曲線の傾き $dK/dE = dK/\nu^2 d\lambda$ の正負と一致していることがわかる.

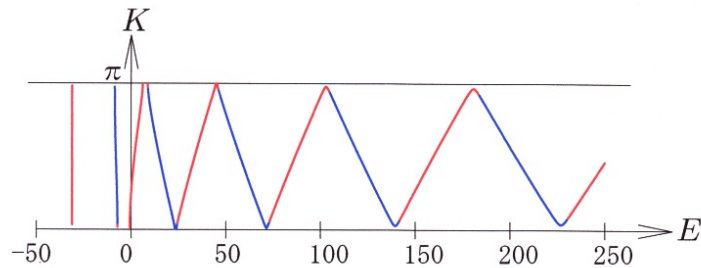


図 2 K と E の関係 ($V_0 = -50$)

図 3 は, V_0 の値を固定することなく, $|V_0|$ - E 平面を細かなメッシュに分割し, 各メッシュ間をスキャンさせながら固有値方程式 (2.17) の右辺の値を求めていき, その絶対値が 1 以上のときは何も印さず, 1 のときは赤

点で、また、1より小さくなるにつれ色を連続的に変化させ、-1のときに青点になるように印したものである。この図から、全体のバンド構造がどのようにになっているかが良く理解できる。

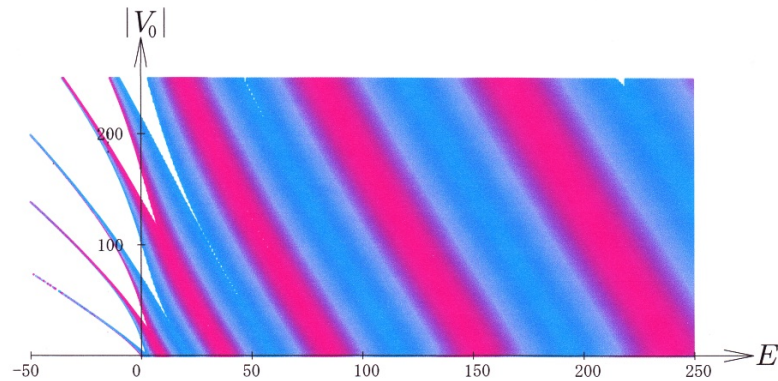


図3 $|V_0|$ - E 平面におけるバンド構造

5 おわりに

手を替え品を替え、ではなく、手も替えずに、品だけちよっぴり替えた同じレシピで、周期ポテンシャルの問題を5編も書いてしまった。しかも、今回のものは、前回のものと解析的にはほとんど同じである。しかし、前回のものは、実数の範囲での計算だったのに対し、今回のものは、複素数の数値計算が入ってくるので、これにかなり手間取ってしまった。この数値計算は、Visual Basic を使ってやっているが、これには、複素演算のルーチンが備わっていないため、自分でプログラムを組むしか方法がなかったためである。

話は変わるが、最初に、この周期ポテンシャル問題に興味を持ったのは、バンド間の直交性とバンド内におけるエネルギーの直交性がどのように導かれるか、ということが、漠然としていてよく理解できなかったことである。本によっては、 i, j をバンド番号とし、その直交性 $\delta_{i,j}$ と、バンド内におけるエネルギーの直交性 $\delta(E - E')$ の積、 $\delta_{i,j}\delta(E - E')$ が出るように書かれたものがある。しかし、1本の式から、この Kronecker と Dirac の2個のデルタ関数が出ること自体、おかしいことである。実際はここで示したように、エネルギーの直交性だけ導出できれば、それで十分であり、これは当然のことながら、異なるバンド間の直交性も意味している。しかも、バンドととっても、完全に離れたものばかりではなく、癒着してしまった不完全バンドもあり得るので、バンド間の直交性ということ自体、無意味ではないかと考えられる。これまでに書いた5編の論文でこのことを明らかにしてきたつもりである。

6 付録1: エネルギーがゼロの場合の関数 T_1, T_2

「数学公式3」(岩波全書) P.57 に載っている合流型超幾何関数と Bessel 関数を結び付ける公式

$$J_\nu(z) = \frac{(z/2)^\nu e^{-iz}}{\Gamma(\nu+1)} {}_1F_1\left(\nu + \frac{1}{2}, 2\nu + 1; 2iz\right) \quad (6.1)$$

において、 $\nu = -1/4$, または、 $\nu = 1/4$ とおき、 $z = \zeta^2/4$ とすると、

$$\begin{aligned} e^{-i\zeta^2/4} {}_1F_1\left(\frac{1}{4}, \frac{1}{2}; \frac{i}{2}\zeta^2\right) &= \Gamma\left(\frac{3}{4}\right) \left(\frac{\zeta^2}{8}\right)^{1/4} J_{-1/4}\left(\frac{\zeta^2}{4}\right) \\ e^{-i\zeta^2/4} {}_1F_1\left(\frac{3}{4}, \frac{3}{2}; \frac{i}{2}\zeta^2\right) &= \Gamma\left(\frac{5}{4}\right) \left(\frac{\zeta^2}{8}\right)^{-1/4} J_{1/4}\left(\frac{\zeta^2}{4}\right) \end{aligned} \quad (6.2)$$

という式が得られる。これは、(2.9) 式で定義された関数 $T_1(\zeta, \lambda)$, $T_2(\zeta, \lambda)$ で、 $\lambda = 0$, したがって、エネルギーを $E = 0$ としたときの関数が、Bessel 関数を用いて、

$$\begin{aligned} T_1(\zeta, 0) &= \Gamma\left(\frac{3}{4}\right) \left(\frac{\zeta^2}{8}\right)^{1/4} J_{-1/4}\left(\frac{\zeta^2}{4}\right) \\ T_2(\zeta, 0) &= \Gamma\left(\frac{5}{4}\right) \zeta \left(\frac{\zeta^2}{8}\right)^{-1/4} J_{1/4}\left(\frac{\zeta^2}{4}\right) \end{aligned} \quad (6.3)$$

と表されることになる。しかも、(6.2) 式の左辺には、虚数の i が含まれるが、右辺は虚数が消えて実数のみとなっている。したがって、(2.9) 式のところで、仮に、虚部を採用したとすると、 $E = 0$ でこれら関数は恒等的にゼロとなり、Wronskian がゼロとなるばかりでなく、解そのものとしても不適格なものになってしまう。

[謝辞]

今回もこの原稿を書くにあたって、京都大学名誉教授の中西襄先生にご精読いただき、たくさんコメントをいただきました。ここに、謹んで感謝いたします。

超弦理論と Dirac のハサミ

Superstring Theory and Dirac's Scissors

伊藤仁之
Hitoshi Ito

1 はじめに

「数学・物理通信」のあまり熱心でない、読者です。近畿大学を退職して、木版画の制作に没入するようになり、時間のゆとりがなくなったからだが、数式を追いかけるのが煩わしくなってきたと言うこともある。この度(7巻1号)、数式がひとつしかない中西先生の「超弦理論はなぜつづれたのか」を見つけ、これなら読めるかもしれないと、読み始めたが、こんどは、数学ばかりか、物理的概念もひとつの単語か、数行の説明で登場し、未知のものもたくさんあるし、以前勉強したはずだがなかなか思い出せないというのも多く、正確に理解するのは不可能だった。しかし、超弦理論展開の過程で数々の論理的不整合があるにもかかわらず、希望的観測でそれらの無視を続け、迷路に迷い込んでいったことを先生が指摘していることを読み取ることができたのは幸いだった。というのは、私が超弦理論に関心を持ち始めたのは今年になってからだが、当初からこの理論に疑いを抱いていたからだ。

超弦の超が怪しいと言うことである。中西先生の解説にあるように、超はボゾンとフェルミオンが対になって現れることだが、これを弦理論に当てはめると、弦はスピノルとしても振る舞うと言うことだ。ボゾンは古典力学とのつながりが強い Schrödinger 方程式を相対論化した場の方程式を量子化すると出現するから、点に変わって1次元的に広がった弦を素子とした場を考えるというアイデアもあり得るかもしれないが、フェルミオンはそういうわけにはいかない。フェルミオンは Dirac 方程式に従う場を量子化すると出現する。この方程式が内包する排他律が反交換関係による量子化を要求するわけだ。

弦にはスピノル性が潜在している、と言ったのは他ならぬ Dirac だった。Dirac はハサミに取り付けたひも(弦)の他端をどこかに固定し、ハサミを2回転して生じるひものねじれが並進運動で解けることに気づき、弦のスピノル性を示唆した(Dirac 自身が書いたものは残ってないようで、どこまで本気だったか不明)。弦にスピノル性が潜在しているなら、弦にフェルミオンのラグランジアンを乗せて量子化すれば、スピノル性が顕在化してフェルミオンが現れ、超弦理論万々歳となったかもしれないが、弦にはスピノル性などないことを次節で示す。(なお、中西調書では”ボゾン弦理論も完全に棄却される”となっている。)

2 Dirac のハサミ

ひもの一端をどこかに固定し、他端にハサミを取り付ける。ひもを軸として右回りに2回転する。これを斜め上方から見ており、視線の方向を空間固定の回転軸とする。この2回転ねじれは、ひもの中程を持ち上げてハサミがひもの下を通るようにして、並進運動で元の位置に戻すと、ほどける。これはスピノルの(巨視的!)モデルだ。というわけだが、これは怪しい。実験幾何学の手法で謎を解いてみよう。Dirac がいう並進運動は回転運動に分解することができる。2回転状態から、ひもの上で左1回転する。この回転を元に戻すとき、ひもを持ち上げ、ひも軸を反転させて右1回転する。この右回転は、ひも軸を基準にすると左回転になる。つまり、ひも軸を基準にすると、右2回転は左2回転で元に戻ると言う当たり前のことを言ってるに過ぎない[1]。

この Dirac のハサミは、さすがに、専門誌の論文が引用することはないようだが、専門家向けの本が紹介し、スピノル性のさらなる展開が可能であるかのように扱っている[2, 3]。超弦理論が着想され、大発展する20世紀後半は、「弦にはスピノル性が潜在している」という思想が蔓延していた時代ではなかったかと推測する

が、科学啓蒙誌をあさったくらいでは、確かめようがない。そこで、それを裏付ける雰囲気のようなものに触れることにする。

3 超弦理論の現状管見

超弦理論の現状を見極めるには、専門家と批判者を集めた国際会議を開くのが最良の策であろうが、私のようなアマチュアはどうも参加できない。横目で眺めていようと思っていたら、「超ひも理論でひらく時空のトビラ」という講演会が目飛び込んできた。大阪大学で開催された物理学会一般聴衆に向けた啓蒙講演会だった。聴講してみた。講演者は漫画チックであることを標榜する面白い先生だったが、超弦の超の説明をスルーしていた。そこで、「Dirac のハサミを枕に、超の意味を説明すれば、よりいっそう漫画チックになって面白いではないか」と質問してみたが、取り合ってもらえなかった。講演後、2,3 言葉を交わしたが、「The only game in town」の人かどうか見極めかねた。

このすこし前に、超弦理論を大まかにでも把握しておこうと、大学院向けの参考書を購入してみた [4]。まえがきの冒頭に、ここで議論する超弦理論の描像を一口に言ってしまうと、「かつて超弦理論と呼ばれていた」広がった物体の理論というものに近いと書いてあった。

参考文献

- [1] 伊藤仁之, Dirac のハサミと Feynman のワインダンス 物理教育 49 卷 (4),2001 訂正記事投稿中
- [2] C.W. Misner, K.S. Thorne and J.A. Wheeler, *GRAVITATION*, Chapter 41, Freeman and company, NY, 1973.
- [3] R.Penrose and W.Rindler, *Spinors and Space-Time Vol.1, pp 42-44*, Cambridge U.P., 1984
- [4] 太田信義, 超弦理論・ブレイン・M 理論, 丸善出版,2012

n 次元の球の体積 1

矢野 忠¹

The Volume of n -dimensional Hypersphere 1

Tadashi YANO²

1 はじめに

すでに3回のシリーズとして球の体積を求める一連のエッセイを愛数協（愛媛県数学教育協議会）の機関誌『研究と実践』に掲載した [1][2][3]. その後、いくつかの文献を見る機会があった [4][5][6][7][8]. そのことから前のエッセイを改訂するのが適当と思われた. これが [1] を改訂して「数学・物理通信」に投稿する第一の理由である. 第二の理由として、これがより重要な理由だが、以前の記事の読者は小学校、中学校や高校の先生に限られていたが、「数学・物理通信」に掲載すれば、もっと広い読者層が期待できる³.

[1] の改訂にあたって、文章を大幅に書き換えることも考えたが、それを断念した. その代わりにその後を読んだ文献から生じた私の疑問等を示すためにその該当箇所の近くに（問）をつけた. その（問）に対する解答例は6節に述べた. はじめて読むときはこの（問）の箇所は無視して読んでほしい. （問）の部分はかなり細かな事項になるからである. もっとも問に対する答で示された知識はこのシリーズの後のエッセイで詳しく述べられることも多い.

さて、まえおきはそのくらいにして、何回かに分けて n 次元の球の体積についてその求め方を述べてみたい. 数学には縁のない普通の人にとって n 次元の球について考える必要は一生に一度もないだろう. ましてや、その体積を求めようなんて気になることはないかもしれない.

まあ、でも半径 a の円の面積が πa^2 であることは小学校で学んだであろうし、半径 a の球の体積が $\frac{4\pi}{3}a^3$ であることは高等学校で学ぼう. それらをどうやって求めたかということは知らないにしても.

また、円は2次元の球だし、3次元の球が普通に球といわれているものであることを知れば、4次元の球とか5次元の球というのはどういう風に数学的に表されるのだろうかと少しは関心が起こってくるかもしれない. また、1次元の球だって考えられるのだ.

2 球の数学的な表現

半径 a の n 次元の球を数式で表すことはそんなに難しいことではない. いま、 n 次元の直交座標系を考えよう. 変数として n 個の変数を考える必要があるから、それらを (x_1, x_2, \dots, x_n) としよう.

なんだか、はじめから難しそうだが、これは普通の平面上の直交座標なら、 (x_1, x_2) となる. 添字を使わない表し方だと (x, y) と表される. すなわち、 $x_1 = x, x_2 = y$ である. 変数の数が多いときには使う文字の数が足らなくなるので、数学では変数に添字をつけて表すのが普通である.

さて、本筋にもどって、 n 次元の球は

$$x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2 = a^2, \quad a > 0 \tag{2.1}$$

¹元愛媛大学工学部

²yanotad@earth.ocn.ne.jp

³ n 次元の球の体積の求め方を調べてみたいと思った動機はカオスの話題と関係している. 2次の写像 $x_{n+1} = ax_n(1-x_n)$ で、コントロール・パラメータ a はその値が $a = 3.5699456\dots$ をこえるとカオス的となる [9]. そのことを山口昌哉先生の愛媛大学での集中講義で聞いて数年してから、このカオス的な写像を乱数として使うことができないかと考えた（同じ着想の研究として [10][11] を参照）. この2次の写像で発生させた数が乱数として使えるのかどうかに関心があったので、卒論ゼミに来た学生にそれをテーマに与えた. それはうまくいかなかったのだが、それを試す一つの手段としてカオス的に発生した数でモンテカルロ法で多重積分を評価してみたらどうかということを考えた. 答えのわかっている多重積分の一つとして n 次元の球の体積に関心をもった [12]

と表される。3次元空間での球と区別するために n 次元の「超球 (hypersphere)」というのが正しいのかもしれないが、今後簡単のために「超」という字を省いて単に球という。 a は球の半径である。

低次元の場合を考えてみよう。いま、 $n = 1, 2, 3$ のとき

$$x_1^2 = a^2 \quad (2.2)$$

$$x_1^2 + x_2^2 = a^2 \quad (2.3)$$

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = a^2 \quad (2.4)$$

である。もちろん (2.3) は平面上の円の方程式であり、(2.4) は3次元の球の方程式である。

3 低次元の球の体積

低次元の球を表す式を (2.2)-(2.4) で与えたので、これらの球の体積を求めてみよう。まず、1次元の球の体積 ℓ は $-a \leq x_1 \leq a$ をみたす線分の長さで

$$\ell = \int_{-a}^a dx_1 = 2a \quad (3.1)$$

で与えられる。つぎに2次元の球の“体積” S とは実は円の面積のことであるから、

$$S = \pi a^2 \quad (3.2)$$

で与えられる。これは2重積分を用いて

$$S = \iint_D dx_1 dx_2, \quad D: x_1^2 + x_2^2 \leq a^2 \quad (3.3)$$

で求められる。直交座標 (x_1, x_2) は2次元の極座標 (r, θ) に

$$x_1 = r \cos \theta$$

$$x_2 = r \sin \theta$$

で変換すれば、微小面積要素 $dS = dx_1 dx_2$ は2次元の極座標では

$$dx_1 dx_2 = r dr d\theta$$

となるから、

$$\begin{aligned} S &= \iint_D r dr d\theta \\ &= \int_0^a r dr \int_0^{2\pi} d\theta \\ &= 2\pi \left(\frac{1}{2} a^2 \right) \\ &= \pi a^2 \end{aligned} \quad (3.4)$$

確かに円の面積 $S = \pi a^2$ が得られる⁴。

3次元の球の体積 V は

$$V = \frac{4\pi}{3} a^3 \quad (3.5)$$

⁴2次元以上の直交座標系から極座標系への変換ではヤコビアン⁴の計算が必要になる。これは [13] で求められる。

で与えられるのは周知のことだが，3重積分を実際に計算して，(3.5) で与えられた3次元の球の体積も導出してみよう。

そのためにまず3次元の極座標 (r, θ, ϕ) を次式で導入しよう。

$$\begin{aligned}x_1 &= r \cos \theta \\x_2 &= r \sin \theta \cos \phi \\x_3 &= r \sin \theta \sin \phi\end{aligned}$$

3次元の球の体積 V は3重積分を用いて

$$V = \iiint_D dx_1 dx_2 dx_3, \quad D: x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 \leq a^2 \quad (3.6)$$

で定義される。(3.6) の3重積分の微小体積要素 $dV = dx_1 dx_2 dx_3$ は3次元の極座標では

$$dx_1 dx_2 dx_3 = r^2 \sin \theta dr d\theta d\phi$$

であるから，

$$\begin{aligned}V &= \iiint_D r^2 \sin \theta dr d\theta d\phi \\&= \int_0^a r^2 dr \int_0^\pi \sin \theta d\theta \int_0^{2\pi} d\phi \\&= 4\pi \int_0^a r^2 dr \\&= \frac{4\pi}{3} a^3\end{aligned} \quad (3.7)$$

ここで，上から2行目の $d\Omega \equiv \sin \theta d\theta d\phi$ は微小立体角であるので全立体角 $\Omega = 4\pi$ であることを用いてもよい。

4 n 次元の球の体積

3次元の球の体積を求めた，上の方法を一般化すれば， n 次元の球の体積を求めることは原理的に可能であるが，その計算はかなり厄介である。それで，ここでは便法を考えよう [14]⁵。

そのためにつぎの事実に着目しよう。1次元の球の体積 l は球の半径 a に比例し，2次元の球の体積 S は a^2 に比例し，また3次元の球の体積 V は a^3 に比例している。したがって， n 次元の球の体積 V_n は a^n に比例することがわかる。この推論は n 次元の球の体積は長さ L の n 乗であるから次元的にもあっている。

そこで， n 次元の球の体積 V_n を

$$V_n = C_n a^n \quad (4.1)$$

と表すことにしよう。ここで， C_n は定数である。

(問 4.1) [5][6] では n 次元の球の体積 V_n とその球の表面積 S_n を考えて，それらの関係を導いている。この関係を導け。

これから定数 C_n を求めよう。そうすれば， n 次元の球の体積 V_n が求められる。そのためにまずつぎの積分を

⁵[5][6] はこの [14] にヒントを得ているのではないと思うが，[5] は文献を引用していないので，自分で考えたのかもしれない。[6] も文献の引用はないが，書かれた文からは明らかに自分の考案した計算法ではないことが察せられる。

考えよう.

$$\begin{aligned} I_n &= \int_{-\infty}^{\infty} \cdots \int_{-\infty}^{\infty} \exp[-(x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2)] dx_1 dx_2 \cdots dx_n \\ &= \left(\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx \right)^n \\ &= \pi^{n/2} \end{aligned} \tag{4.2}$$

ここで

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}$$

であることを用いた⁶.

(問 4.2) なぜ唐突に (4.2) の積分を考えたのか.

一方, $x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2 = r^2$ とおき, 上の積分 I_n を半径 r から $r + dr$ の球殻に分けて積分することを考えれば⁷,

$$\begin{aligned} dx_1 dx_2 \cdots dx_n &= dV_n \\ &= C_n dr^n \\ &= C_n n r^{n-1} dr \\ &= C_n [(r + dr)^n - r^n] \end{aligned} \tag{4.3}$$

であるから, 求める積分 I_n は

$$I_n = C_n n \int_0^{\infty} r^{n-1} e^{-r^2} dr \tag{4.4}$$

となる.

(問 4.3) n 次元の極座標を定義して, $V_n = C_n r^n$ の C_n を n 次元の極座標の角度積分として表せ. また C_n は何を意味するか.

いま, $r^2 = s$ とおけば, $2r dr = ds$ であるから

$$\begin{aligned} I_n &= C_n \frac{n}{2} \int_0^{\infty} s^{n/2-1} e^{-s} ds \\ &= C_n \frac{n}{2} \Gamma\left(\frac{n}{2}\right) \end{aligned} \tag{4.5}$$

⁶この積分の値は

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx$$

とおけば,

$$I^2 = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-(x^2+y^2)} dx dy$$

と表される. ここで, 2次元の極座標を用いれば,

$$I^2 = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\infty} r e^{-r^2} dr$$

$r^2 = s$ とおけば, $ds = 2r dr$ であるから

$$I^2 = \pi \int_0^{\infty} e^{-s} ds = \pi$$

したがって, $I = \sqrt{\pi}$ が得られる.

⁷(4.4) で球を球殻に分けて積分していることは (4.3) の最後の等式が成り立つことからわかる.

ここで、 $\Gamma(x)$ はガンマ関数である。したがって、(4.2) と (4.5) から

$$C_n = \frac{I_n}{(n/2)\Gamma(n/2)} = \frac{2I_n}{n\Gamma(n/2)} = \frac{2\pi^{n/2}}{n\Gamma(n/2)} \quad (4.6)$$

と求められる。

以上から、 n 次元の球の体積 V_n は

$$V_n = C_n a^n \quad (4.1)$$

と求められた。そこで、係数 C_n は (4.6) で与えられる。

C_n は (問 4.3) で与えられた角度積分をしても得られる。その角度積分については [17] で述べる。

ところで、この結果は次元数が低いときに前に得られた結果と一致することを確認しておこう。そのためにはガンマ関数 [15] の性質を知っている必要がある。ガンマ関数は整数 n の階乗 $n!$ を任意の実数に拡張したものであり、その定義は

$$\Gamma(x+1) = \int_0^\infty t^x e^{-t} dt \quad (4.7)$$

である。また

$$\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$$

$$\Gamma(1) = 1$$

$$\Gamma(2) = 1$$

$$\Gamma(1/2) = \sqrt{\pi} = \pi^{1/2}$$

$$\Gamma(n+1) = n!, \quad n = 0 \text{ または自然数}$$

が成り立つ。まず $n = 1$ のときには

$$C_1 = \frac{2\pi^{1/2}}{\Gamma(1/2)} = 2$$

つぎに $n = 2$ のときには

$$C_2 = \frac{\pi}{\Gamma(1)} = \pi$$

さらに、 $n = 3$ のときには

$$C_3 = \frac{2\pi^{3/2}}{3\Gamma(3/2)} = \frac{4}{3}\pi$$

が得られ、これらは 3 節で求められた値と一致している。

5 おわりに

n 次元の球の体積を正統な方法ではなく少し頭を使った便法で求めた。計算は面倒になるかもしれないが、もっと正統な方法で求めることも必要であろう。これは [17] で示すことにする。一般の n 次元の球の体積を正統な方法で求めるための準備として具体的な 4, 5 次元の球の体積を [13] で求めることにしよう。

6 問の解答例

(問 4.1) [5][6] では n 次元の球の体積 V_n とその球の表面積 S_n を考えて、それらの関係を導いている。この関係を導け。

(問 4.1) 解答例 [5][6] によれば, V_n は球の半径 a だけの関数であり,

$$V_n = \iiint \cdots \int_D dx_1 dx_2 \cdots dx_n = \int_0^a S_n dr \quad (6.1)$$

ここで領域 D は $x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2 \leq a^2$ をみたす n 次元の球の中である. これは球の表面積に微小な球殻の厚さ dr をかけて積分すれば, 球の体積 V_n が得られることを示している.

逆に (6.1) から, 球の体積 V_n を球の半径 a で微分すれば, 球の表面積

$$S_n = \frac{dV_n}{da} \quad (6.2)$$

が得られる. (4.3) の $C_n[(r+dr)^n - r^n]$ は半径 $r+dr$ の球から半径 r の球を取り去ったものである. 厚さ dr の球殻の部分の体積を表している. もちろん dr が微小なときには dr の 2 次以上の高次の項は無視していいので, $(r+dr)^n - r^n = nr^{n-1}dr$ となる. ここで $C_n nr^{n-1}$ は球の表面積を表す.

(問 4.2) なぜ唐突に (4.2) の積分を考えたのか.

(問 4.2) 解答例 どうして (4.2) の積分を考えたのかは本当のところはわからない. しかし,

$$I_1 = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi} \quad (6.3)$$

という積分はよく知られている.

[16] によれば

$$\begin{aligned} I_n &= I_1^n \\ &= \left(\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx \right)^n \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \cdots \int_{-\infty}^{\infty} \exp[-(x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2)] dx_1 dx_2 \cdots dx_n \end{aligned} \quad (6.4)$$

であることはすぐにわかるので, この I_n の積分の値がすぐにわかる. さらに それに n 次元の極座標を導入すれば, I_n が極座標系を用いて別の方法でも積分できそうである. それで C_n が求められるのではないかという予想が立つ.

(問 4.3) n 次元の極座標を定義して, $V_n = C_n a^n$ の C_n を n 次元の極座標の角度積分として表せ. また C_n は何を意味するか.

(問 4.3) の解答例 まず n 次元の極座標を定義しよう. n 次元の直交座標 $(x_1, x_2, \dots, x_{n-1})$ と極座標 $(r, \theta_1, \theta_2, \dots, \theta_{n-1})$ の関係は次の式で与えられる.

$$x_1 = r \cos \theta_1, \quad (6.5)$$

$$x_2 = r \sin \theta_1 \cos \theta_2, \quad (6.6)$$

$$x_3 = r \sin \theta_1 \sin \theta_2 \cos \theta_3, \quad (6.7)$$

$$\dots \quad (6.8)$$

$$x_{n-1} = r \sin \theta_1 \sin \theta_2 \dots \sin \theta_{n-2} \cos \theta_{n-1}, \quad (6.9)$$

$$x_n = r \sin \theta_1 \sin \theta_2 \dots \sin \theta_{n-2} \sin \theta_{n-1}. \quad (6.10)$$

$0 \leq x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2 \leq a^2$ で表される球の内部にある (x_1, x_2, \dots, x_n) に対する $(r, \theta_1, \theta_2, \dots, \theta_{n-1})$ の変域は

$$0 \leq r \leq a, \quad 0 \leq \theta_1, \theta_2, \dots, \theta_{n-2} \leq \pi, \quad 0 \leq \theta_{n-1} \leq 2\pi$$

である。

これから体積要素 (volume element) は

$$\begin{aligned} dV_n &= dx_1 dx_2 \cdots dx_{n-1} dx_n \\ &= J dr d\theta_1 d\theta_2 d\theta_3 \cdots d\theta_{n-1} \end{aligned} \quad (6.11)$$

であり、ヤコビアン J がわかると n 次元の極座標系での体積要素が求められる。

このヤコビアンの導出は [17] に譲るが、

$$J = r^{n-1} \sin^{n-2} \theta_1 \sin^{n-3} \theta_2 \cdots \sin^2 \theta_{n-3} \sin \theta_{n-2} \quad (6.12)$$

である。したがって

$$C_n = \frac{1}{n} \int_0^\pi \sin^{n-2} \theta_1 d\theta_1 \int_0^\pi \sin^{n-3} \theta_2 d\theta_2 \cdots \int_0^\pi \sin \theta_{n-2} d\theta_{n-2} \int_0^{2\pi} d\theta_{n-1} \quad (6.13)$$

と表される。

n 次元の球の体積 $V_n = C_n a^n$ で半径 a を 1 とおけば、 $V_n = C_n$ となり、 C_n は半径 1 の n 次元の球 (半径 1 の球を単位球という) の体積である [7] [16].

(2004.6.22) (2009.4.7 改訂) (2017.5.16 三訂)

参考文献

- [1] 矢野 忠, n 次元の球の体積 1, 研究と実践 (愛数協), 88 号 (2005.9) 7-12
- [2] 矢野 忠, n 次元の球の体積 2, 研究と実践 (愛数協), 90 号 (2006.5) 1-4
- [3] 矢野 忠, n 次元の球の体積 3, 研究と実践 (愛数協), 91 号 (2006.7) 1-4
- [4] スミルノフ, 『高等数学教程 II 巻 (第 1 分冊)』 (共立出版, 1958) 290-291
- [5] 芦田正巳, 『統計力学を学ぶ人のために』 (オーム社, 2006) 341-343
- [6] EMAN の物理学・統計力学・ n 次元球の体積,
http://homepage2.nifty.com/eman/statistic/sphere_vol.html
- [7] 新関章三, 岩崎正春, 多次元単位球の体積計算法, 数学・物理通信, 1 巻 9 号 (2011.9) 13-17
- [8] 山本哲朗, 『行列解析ノート』, (サイエンス社, 2013) 142-147
- [9] H. Goldstein, C. Poole, J. Safko (矢野, 江沢, 淵崎 訳), 『古典力学』 (吉岡書店, 2009) 702-711
- [10] S. C. Phatak and S. S. Rao, Logistic map: A possible random-number generator, Phys. Rev. E, Vol. 51, No. 4, 3670-3678 (1995)
- [11] 長瀬隆久, ロジスティック写像を用いた正規乱数発生法, 情報処理学会論文誌, Vol. 42, No. 6, 1727-1729 (2001) とそこに引用された論文を参照せよ。

- [12] 宮武修, 脇本和昌, 『乱数とモンテカルロ』 (森北出版, 1978) 55-58, ここには一般の n 次元の球の体積については記載がないが, 5次元の多重積分の例がある.
- [13] 矢野 忠, n 次元の球の体積 2, 数学・物理通信, 7 巻 4 号 (2017.6) 12-19
- [14] 久保亮五, 『統計力学』 (共立出版, 1952) 46
- [15] 高木貞治, 『解析概論』 改訂第三版 (岩波書店, 1961) 248-258
- [16] <http://wasan.hatenablog.com/entry/20110503/1304372922>
- [17] 矢野 忠, n 次元の球の体積 3, 数学・物理通信, 7 巻 5 号 (2017.6) 掲載予定

編集後記

伊予の国，松山は春の終りから夏にかけて，気温の高低の差が激しい日々が続き，毎日の体の調子を具合よく維持するのに少々苦勞しております．皆さん，お元気ですか．

さて，今回の投稿論文もそれぞれの分野に応じて興味深い内容を提供して下さい，編集者としてもうれしいかぎりである．そして，このような状態が今後とも続けばと神に祈りたい気持ちでいっぱいである．このような精神と，いつも頭にある言葉“継続は力なり”をモットーにして編集にこれからも携わっていききたい．

それにしても編集者の一人が数学関係であるのに数学の論文が少ないのが，気になる．私自身の身体の調子もあり，歯がゆい限りではある．しかし，このサーキュラーの発刊の趣旨に沿った健全な発展のために是も非もなく努力したい．

(新関章三)