

数学・物理通信

7卷4号 2017年6月

編集 新関章三・矢野 忠

2017年6月1日

目次 (Contents)

1. 変数を含むコタンジェントの冪乗の有限和 2		
	中西 襄	2
2. 誤解を招く弦振動の問題 (1)		
	世戸憲治	8
3. n 次元の球の体積 2 ($n = 4, 5$ の場合)		
	矢野 忠	12
4. 編集後記		
	矢野 忠	20
1. Finite Sums of Powers of the Cotangents Involving a Variable, 2		
	Noboru NAKANISHI	2
2. Misleading Problems in String Oscillations (1)		
	Kenji SETO	8
3. The Volume of n -dimensional Hypersphere 2		
	Tadashi YANO	12
4. Editorial Comments		
	Tadashi YANO	20

変数を含むコタンジェントの冪乗の有限和 2

Finite Sums of Powers of the Cotangents Involving a Variable, 2

中西 襄¹

Noboru NAKANISHI

1 はじめに

前論文(「数学・物理通信」7-3)において, コタンジェントの冪乗の有限和

$$W_n(N, x) \equiv \sum_{r=0}^{N-1} \left[\cot \left(x + \frac{r\pi}{N} \right) \right]^n \quad (1.1)$$

を, n に関する漸化式を用いて計算する方法を与えた. 具体的な計算はそれほど大変ではないが, 一般式を見出すには至らなかった.

他方, 「三角関数のパラメータを含む関数の有限級数の和 2」(「数学・物理通信」5-10) の 6 節において,

$$\begin{aligned} & \sum_{r=0}^{N-1} \frac{1}{1 + a^2 \cot^2 \left(x + \frac{r\pi}{N} \right)} \\ &= N \cdot \frac{(1+a)^{2N-1} + (1-a)^{2N-1} - 2(1-a^2)^{N-1} \cos(2Nx)}{(1+a)^{2N} + (1-a)^{2N} - 2(1-a^2)^N \cos(2Nx)} \end{aligned} \quad (1.2)$$

という結果を得ていた. これは n が偶数の場合の $W_n(N, x)$ の母関数に他ならない. すなわち, この右辺を $-a^2$ の冪級数に展開して $(-a^2)^k$ の係数を計算すれば, $W_{2k}(N, x)$ が得られる. この計算はかなり面倒であるが, 得られた結果は

$$\begin{aligned} \sum_{r=0}^{N-1} \cot^2 \left(x + \frac{r\pi}{N} \right) &= \frac{N(N - \sin^2(Nx))}{\sin^2(Nx)}, \\ \sum_{r=0}^{N-1} \cot^4 \left(x + \frac{r\pi}{N} \right) &= \frac{N[3N^3 - 2N(N^2 + 2)\sin^2(Nx) + 3\sin^4(Nx)]}{3\sin^4(Nx)} \end{aligned} \quad (1.3)$$

であった. これらを $w = N \cot(Nx)$ でもって書き直すと, もちろん前論文の (3.5) に与えた W_2 および W_4 と一致する.

本論文では, 偶数冪のみの母関数 (1.2) を, 奇数冪をも含めた母関数

$$\sum_{n=0}^{\infty} (ia)^n W_n(N, x) = \sum_{r=0}^{N-1} \frac{1}{1 - ia \cot \left(x + \frac{r\pi}{N} \right)} \quad (1.4)$$

に拡張することを考える. この級数和が求まれば, 原理的に $W_n(N, x)$ の一般形がわかったことになる.

¹ 京都大学名誉教授, nbr-nak@trio.plala.or.jp

2 母関数の推定

まず次の2つの恒等式に注意しよう：

$$\begin{aligned} & [e^{iNx}(1+a)^N - e^{-iNx}(1-a)^N][e^{-iNx}(1+a)^N - e^{iNx}(1-a)^N] \\ & = (1+a)^{2N} + (1-a)^{2N} - 2(1-a^2)^N \cos(2Nx), \end{aligned} \quad (2.1)$$

および

$$\begin{aligned} & [e^{iNx}(1+a)^{N-1} - e^{-iNx}(1-a)^{N-1}][e^{-iNx}(1+a)^N - e^{iNx}(1-a)^N] \\ & = (1+a)^{2N-1} + (1-a)^{2N-1} - 2(1-a^2)^{N-1}[\cos(2Nx) + ia \sin(2Nx)]. \end{aligned} \quad (2.2)$$

(2.1)の右辺は(2.2)の右辺の分母に等しく、(2.2)の右辺の実部は(2.1)の右辺の分子に等しい。また、(2.1)の左辺の第2因子と(2.2)の左辺の第2因子は同一である。したがって、(2.1)の右辺は、

$$\begin{aligned} & N \cdot \frac{(1+a)^{2N-1} + (1-a)^{2N-1} - 2(1-a^2)^{N-1} \cos(2Nx)}{(1+a)^{2N} + (1-a)^{2N} - 2(1-a^2)^N \cos(2Nx)} \\ & = N \Re \left[\frac{e^{iNx}(1+a)^{N-1} - e^{-iNx}(1-a)^{N-1}}{e^{iNx}(1+a)^N - e^{-iNx}(1-a)^N} \right] \end{aligned} \quad (2.3)$$

と書き換えられる。他方

$$\Re \left[\sum_{r=0}^{N-1} \frac{1}{1 - ia \cot(x + \frac{r\pi}{N})} \right] = \sum_{r=0}^{N-1} \frac{1}{1 + a^2 \cot^2(x + \frac{r\pi}{N})} \quad (2.4)$$

であるから、

$$\Phi(N, x; a) \equiv \sum_{r=0}^{N-1} \frac{1}{1 - ia \cot(x + \frac{r\pi}{N})} = N \cdot \frac{e^{iNx}(1+a)^{N-1} - e^{-iNx}(1-a)^{N-1}}{e^{iNx}(1+a)^N - e^{-iNx}(1-a)^N} \quad (2.5)$$

と推定される。この推定が正しいことは次節で証明する。

3 証明

(2.5)の証明は、「三角関数のパラメータを含む関数の有限級数の和」(「数学・物理通信」5-9)でやったように、留数定理を用いる方法でやれる。(以下では $0 < a < 1$ としておく。)

$$\begin{aligned} \Phi(N, x; a) & = \sum_{r=0}^{N-1} \frac{1}{1 - ia \cot(x + \frac{r\pi}{N})} \\ & = \sum_{r=0}^{N-1} \frac{e^{2i(x + \frac{r\pi}{N})} - 1}{e^{2i(x + \frac{r\pi}{N})} - 1 + a(e^{2i(x + \frac{r\pi}{N})} + 1)} \end{aligned} \quad (3.1)$$

において、留数定理を用いると、

$$\Phi(N, x; a) = \frac{1}{2\pi i} \oint dz \sum_{r=0}^{N-1} \frac{1}{z - e^{2i(x + \frac{r\pi}{N})}} \cdot \frac{z-1}{z-1+a(z+1)} \quad (3.2)$$

と書き直せる。ただし積分路は単位円上の N 個の極を正方向に回る。コーシーの定理により積分路を变形して、

$$\Phi(N, x; a) = \frac{1}{2\pi i} \left(\int_{|z|=R} - \int_{C(\frac{1-a}{1+a})} \right) dz F(N, x; z) \cdot \frac{z-1}{z-1+a(z+1)} \quad (3.3)$$

とする。ただし、 $R > 1$ 、 $C(\alpha)$ は $z = \alpha$ を中心とする微小円である。また

$$F(N, x; z) \equiv \sum_{r=0}^{N-1} \frac{1}{z - e^{2i(x + \frac{r\pi}{N})}} \quad (3.4)$$

とおいた。次に、 $e^{\frac{2ir\pi}{N}}$ ($r = 0, 1, \dots, N-1$) が N 次代数方程式 $X^N - 1 = 0$ の N 個の解であること、すなわち $X^N - 1 = \prod_r (X - e^{\frac{2ir\pi}{N}})$ を用いて、これを变形する：

$$\begin{aligned} F(N, x; z) &= \frac{\partial}{\partial z} \log \prod_{r=0}^{N-1} \left(z - e^{2i(x + \frac{r\pi}{N})} \right) \\ &= \frac{\partial}{\partial z} \log \left[e^{2iNx} \prod_{r=0}^{N-1} \left(e^{-2ix} z - e^{\frac{2ir\pi}{N}} \right) \right] \\ &= \frac{\partial}{\partial z} \log \left[(e^{-2ix} z)^N - 1 \right] \\ &= \frac{N e^{-2iNx} z^{N-1}}{e^{-2iNx} z^N - 1} \\ &= \frac{N z^{N-1}}{z^N - e^{2iNx}}. \end{aligned} \quad (3.5)$$

これを (3.3) に代入すれば、

$$\Phi(N, x; a) = \frac{N}{1+a} \cdot \frac{1}{2\pi i} \left(\int_{|z|=R} - \int_{C(\frac{1-a}{1+a})} \right) dz \frac{(z-1)z^{N-1}}{(z - \frac{1-a}{1+a})(z^N - e^{2iNx})} \quad (3.6)$$

となる。ここで、

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{|z|=R} dz \frac{(z-1)z^{N-1}}{(z - \frac{1-a}{1+a})(z^N - e^{2iNx})} = \frac{1}{2\pi i} \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{|z|=R} \frac{dz}{z} = 1, \quad (3.7)$$

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{C(\frac{1-a}{1+a})} dz \frac{(z-1)z^{N-1}}{(z - \frac{1-a}{1+a})(z^N - e^{2iNx})} = \frac{(\frac{1-a}{1+a} - 1)(\frac{1-a}{1+a})^{N-1}}{(\frac{1-a}{1+a})^N - e^{2iNx}} \quad (3.8)$$

であるから、(3.6) から

$$\begin{aligned} \Phi(N, x; a) &= \frac{N}{1+a} \cdot \frac{(\frac{1-a}{1+a})^N - e^{2iNx} - (\frac{1-a}{1+a} - 1)(\frac{1-a}{1+a})^{N-1}}{(\frac{1-a}{1+a})^N - e^{2iNx}} \\ &= N \cdot \frac{(1-a)^{N-1} - (1+a)^{N-1} e^{2iNx}}{(1-a)^N - (1+a)^N e^{2iNx}} \\ &= N \cdot \frac{e^{iNx} (1+a)^{N-1} - e^{-iNx} (1-a)^{N-1}}{e^{iNx} (1+a)^N - e^{-iNx} (1-a)^N} \end{aligned} \quad (3.9)$$

となって、(2.5) の右辺が得られた。□

4 冪展開

(2.5) の右辺を ia の冪級数に展開する．まず，分母を次のように書き直す：

$$\begin{aligned}
& e^{iNx}(1+a)^N - e^{-iNx}(1-a)^N \\
&= e^{iNx}[(1+a)^N - e^{-2iNx}(1-a)^N] \\
&= e^{iNx} \left[1 - e^{-2iNx} + N(1 + e^{-2iNx})a + \frac{N(N-1)}{2!}(1 - e^{-2iNx})a^2 \right. \\
&\quad \left. + \frac{N(N-1)(N-2)}{3!}(1 + e^{-2iNx})a^3 + \dots \right] \\
&= e^{iNx}(1 - e^{-2iNx}) \left[1 - w(ia) - \frac{N(N-1)}{2}(ia)^2 \right. \\
&\quad \left. + \frac{(N-1)(N-2)}{6}w(ia)^3 + \dots \right].
\end{aligned} \tag{4.1}$$

ただし，

$$iN \cdot \frac{1 + e^{-2iNx}}{1 - e^{-2iNx}} = N \cot(Nx) \equiv w \tag{4.2}$$

とおいた．同様に，因子 N を含めた分子は，

$$\begin{aligned}
& N[e^{iNx}(1+a)^{N-1} - e^{-iNx}(1-a)^{N-1}] \\
&= e^{iNx}(1 - e^{-2iNx}) \left[N - (N-1)w(ia) - \frac{N(N-1)(N-2)}{2}(ia)^2 \right. \\
&\quad \left. + \frac{(N-1)(N-2)(N-3)}{6}w(ia)^3 + \dots \right].
\end{aligned} \tag{4.3}$$

したがって，

$$\Phi(N, x; a) = \frac{N - (N-1)w(ia) - \frac{N(N-1)(N-2)}{2}(ia)^2 + \frac{(N-1)(N-2)(N-3)}{6}w(ia)^3 + \dots}{1 - w(ia) - \frac{N(N-1)}{2}(ia)^2 + \frac{(N-1)(N-2)}{6}w(ia)^3 + \dots} \tag{4.4}$$

のようになる．これを計算すれば²，

$$\Phi(N, x; a) = N + w(ia) + [w^2 + N(N-1)](ia)^2 + [w^3 + (N^2 - 1)w](ia)^3 + \dots \tag{4.5}$$

となる．これを前論文の (3.5) と比べると，

$$\Phi(N, x; a) = W_0(N, x) + W_1(N, x)(ia) + W_2(N, x)(ia)^2 + W_3(N, x)(ia)^3 + \dots \tag{4.6}$$

に一致することが確認される．

5 注意

2 節で「パラメータ $(-a^2)$ の 1 次分数式の実級数を実部とするような，パラメータ ia の 1 次分数式の有限級数の和公式は，その実部が実級数の和公式に一致するように決めれば求められるであろう」という推定を用いた．そして，(2.5) の例では，3 節で証明したように，実際に正しい結果であった．しかし，残念ながらこの推定法は，いつでもうまくいくとは限らない．

²手計算では少々面倒だが，Maxima を使えば一発で求まる．

3節のはじめに引用した論文の (5.2) に,

$$\begin{aligned} & \sum_{r=0}^{N-1} \frac{1}{\sin^2(x + \frac{r\pi}{N}) + a^2 \cos^2(x + \frac{r\pi}{N})} \\ &= \frac{N}{a} \cdot \frac{(1+a)^{2N} - (1-a)^{2N}}{(1+a)^{2N} + (1-a)^{2N} - 2(1-a^2)^N \cos(2Nx)} \end{aligned} \quad (5.1)$$

という公式を与えた. これは2節と同様な考察により,

$$\begin{aligned} & \Re \sum_{r=0}^{N-1} \frac{1}{\sin(x + \frac{r\pi}{N}) [\sin(x + \frac{r\pi}{N}) - ia \cos(x + \frac{r\pi}{N})]} \\ &= \Re \frac{N}{a} \cdot \frac{e^{iNx}(1+a)^N + e^{-iNx}(1-a)^N}{e^{iNx}(1+a)^N - e^{-iNx}(1-a)^N} \end{aligned} \quad (5.2)$$

と書き直せることがわかる. そこで (5.2) の \Re をはずした複素級数の和公式が成立するのではないかと期待されるが, しかしそれは成立しない. 正しい結果は,

$$\begin{aligned} & \sum_{r=0}^{N-1} \frac{1}{\sin(x + \frac{r\pi}{N}) [\sin(x + \frac{r\pi}{N}) - ia \cos(x + \frac{r\pi}{N})]} \\ &= \frac{N}{a} \cdot \frac{i[(1+a)^N - (1-a)^N]}{\sin(Nx)[e^{iNx}(1+a)^N - e^{-iNx}(1-a)^N]} \end{aligned} \quad (5.3)$$

である. 証明は3節と同様にやればよい [級数 (2.5) と比べて第 r 項に $1/\sin^2(x + \frac{r\pi}{N})$ がかった級数であるから, (3.2) の因子 $z-1$ を $-4z/(z-1)$ に置き換えればよい. 留数計算では, 無限遠からの寄与がない代わりに新しく極 $z=1$ からの寄与が付け加わる.].

この例は, (5.2) の右辺の \Re の中身が $a=0$ で極をもつことが致命的である. 正しい結果である (5.3) の右辺は, $a=0$ のとき $N^2/\sin^2(Nx)$ になる³. 「期待される和」の式が a の解析関数として $a=0$ で正則ならば, 上述の推定法は正しいだろうか? もちろん, 複素共役をとることと, 純虚数の定数項を付け加えることによる不定性は, 度外視するものとする.

6 公式の変形

和公式 (2.5) は複素数を用いて書いているが, もちろん実数のみを使う形に書き改めることが可能である. 展開パラメータを $ia = \lambda$ にすれば, (2.5) は

$$\sum_{r=0}^{N-1} \frac{1}{1 - \lambda \cot(x + \frac{r\pi}{N})} = N \cdot \frac{e^{iNx}(1-i\lambda)^{N-1} - e^{-iNx}(1+i\lambda)^{N-1}}{e^{iNx}(1-i\lambda)^N - e^{-iNx}(1+i\lambda)^N} \quad (6.1)$$

となる. ここで λ を実数まで解析接続する. さらに $\lambda = \tan \alpha$ ($|\alpha| < \pi/2$) とおけば,

$$\sum_{r=0}^{N-1} \frac{1}{1 - \tan \alpha \cdot \cot(x + \frac{r\pi}{N})} = \frac{N \cos \alpha \cdot \sin(Nx - (N-1)\alpha)}{\sin(Nx - N\alpha)} \quad (6.2)$$

となる.

サインの加法定理を使えば, (6.2) は次のようにも書き換えられる:

$$\sum_{r=0}^{N-1} \frac{1}{1 - \cot \alpha \cdot \tan(x + \frac{r\pi}{N})} = -\frac{N \sin \alpha \cdot \cos(Nx - (N-1)\alpha)}{\sin(Nx - N\alpha)}, \quad (6.3)$$

³ $1/\sin^2 \theta = 1 + \cot^2 \theta$ なるゆえ, この結果はもちろん (1.3) 第1式の右辺に N を加えたものである.

$$\sum_{r=0}^{N-1} \frac{\sin(x + \frac{r\pi}{N})}{\sin(x - \alpha + \frac{r\pi}{N})} = N \cdot \frac{\sin(Nx - (N-1)\alpha)}{\sin(Nx - N\alpha)}. \quad (6.4)$$

$x - \alpha = y$ とおけば, (6.4) は

$$\sum_{r=0}^{N-1} \frac{\sin(x + \frac{r\pi}{N})}{\sin(y + \frac{r\pi}{N})} = N \cdot \frac{\sin(x + (N-1)y)}{\sin(Ny)} \quad (6.5)$$

という美しい公式になる (付録参照).

さらに, (6.5) を x について偏微分すれば (あるいは x を $x + \pi/2$ に置き換えれば),

$$\sum_{r=0}^{N-1} \frac{\cos(x + \frac{r\pi}{N})}{\sin(y + \frac{r\pi}{N})} = N \cdot \frac{\cos(x + (N-1)y)}{\sin(Ny)} \quad (6.6)$$

を得る. (6.6) で $y = x$ とおけば, $W_1(N, x) = w$ に帰着する. (6.6) を y について偏微分してから $y = x$ とおけば, $W_2(N, x) = w^2 + N(N-1)$ を得る. 一般に (6.6) を y について $n-1$ 回偏微分してから $y = x$ とおけば, $W_n(N, x)$ を求めることができるが, n が少し大きいと計算は面倒になる.

付録 : 公式 (6.5) について

(6.5) を $N = 1, 2, 3, 4$ について具体的に書いてみると,

$$\frac{\sin x}{\sin y} = 1 \cdot \frac{\sin x}{\sin y},$$

$$\frac{\sin x}{\sin y} + \frac{\cos x}{\cos y} = 2 \cdot \frac{\sin(x+y)}{\sin(2y)},$$

$$\frac{\sin x}{\sin y} + \frac{\sin x + \sqrt{3} \cos x}{\sin y + \sqrt{3} \cos y} + \frac{-\sin x + \sqrt{3} \cos x}{-\sin y + \sqrt{3} \cos y} = 3 \cdot \frac{\sin(x+2y)}{\sin(3y)},$$

$$\frac{\sin x}{\sin y} + \frac{\sin x + \cos x}{\sin y + \cos y} + \frac{\cos x}{\cos y} + \frac{-\sin x + \cos x}{-\sin y + \cos y} = 4 \cdot \frac{\sin(x+3y)}{\sin(4y)}$$

のようになる. ぜひ左辺を通分して確認していただきたい. (通分したときの分母が $\sin(Ny)$ になることは, 前論文の (2.5) 参照.)

誤解を招く弦振動の問題 (1)

世戸 憲治 *1

Misleading Problems in String Oscillations (1)

Kenji SETO*

1 はじめに

いきなり、問題から始める。有限の長さを持つ弦に張力を与えて、両端を固定しておく。この弦の真ん中を持ち上げてから手を離すと弦はどのような形で振動していくか。下の図 1, 図 2, 図 3 から選びなさい。これらの図では, (1), (2), (3), (4) の順に時間が経過していくものとする。

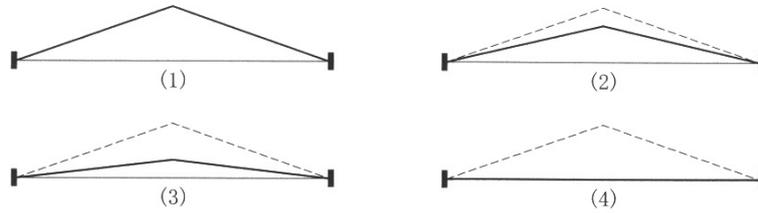


図 1

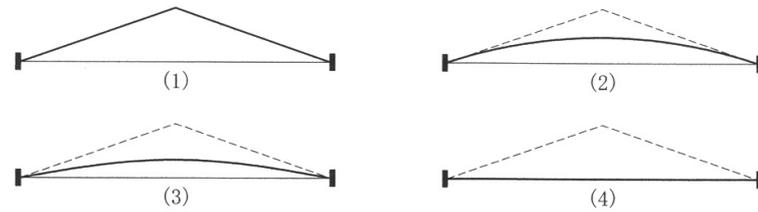


図 2

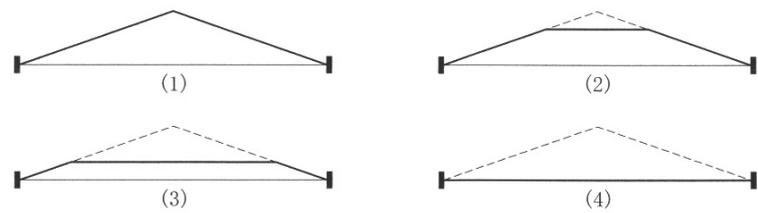


図 3

図 1 は三角形を保ちながら、その高さが時間と共に低くなっていくもの。図 2 は同じく低くなるが、曲線を描きながら低くなるもの。図 3 は上の方から平らになりながら低くなるものである。ただし、ここで言う弦とは剛性を持たないもので、実際には、紐、あるいは、鎖のようなものと考えていただきたい。これがすぐに分かる人は物理的センスに非常に優れた人であろう。正解は図 3 である。しかし、私がこれまで何人かに聞いた結果

*1 北海学園大学名誉教授

E-mail: seto@pony.ocn.ne.jp

は、ほとんどの人が、図1か図2という答えで、図3という人は皆無であった。図1、図2が間違いであることは、つぎのように考えると理解しやすい。すなわち、弦を手で持ち上げたとき、直線になっている部分は、張力が相殺しているので、弦に対し横方向の加速度が発生しない、あるいは、言い換えると、勾配があっても2階微分はゼロなので、波動方程式から考えると加速度もゼロになっている。したがって、初め静止していたとすると、手を離したときもこの直線部分は直ちには動き出さない。初めに動き出すのは、手を離したその部分のみで、この動きが時間とともに徐々に他の部分に伝播し、全体として動くようになる。

私がこのことに気付いたのは、大学で物理を教えるようになってから、学生に見せるために、いろいろな物理現象のシミュレータを作ったときで、この図3になるという結果は私にとっても意外なものであった。

もう一つ、前述したように、物理学で言う弦とは、剛性を持たないものを言うので、ヴァイオリン、ハーブ、ピアノ等の弦の場合は、ある程度の剛性を持ってしまうので、完全には図3のようにはならない。このことに関しては、後ほど別の機会に議論することにする。

2 方程式を解いてみると

この問題を、波動方程式を解くことで考えてみよう。よく知られているように、弦振動の方程式は、座標 x 、時刻 t における弦の垂直方向変位を $U(x, t)$ としたとき、

$$\frac{\partial^2 U(x, t)}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 U(x, t)}{\partial x^2}, \quad c = \sqrt{T/\rho} \quad (2.1)$$

と書かれる。ここに、 c は波動伝播速度で、弦の線密度を ρ 、張力を T としたとき、この第2式で与えられる。ここでは、弦の中央を座標原点 O として、弦に沿って右向きに x 軸をとるものとする。また、弦の長さを 2ℓ 、したがって、 x は $[-\ell, \ell]$ の範囲内にあるものとする。この変位 $U(x, t)$ を、 x と t に関し変数分離形で解くことにし、いったん、

$$U(x, t) = X(x)P(t) \quad (2.2)$$

とおいてみる。この問題の場合は、明らかに、 x 依存部分 $X(x)$ は偶関数となり、境界条件 $X(\pm\ell) = 0$ を満たさなければならないので、その候補となり得る関数は、 k を非負整数として、 $\cos((k + \frac{1}{2})\pi x/\ell)$ である。これを方程式に代入すると、時間依存部分 $P(t)$ は $\cos((k + \frac{1}{2})\pi ct/\ell)$ の形となる。このとき、sine の方は、初速度がゼロとなることから排除される。実際の変位 $U(x, t)$ の形は、これら関数の重ね合わせで表されることになり、

$$U(x, t) = \sum_{k=0}^{\infty} C_k \cos((k + \frac{1}{2})\pi x/\ell) \cos((k + \frac{1}{2})\pi ct/\ell) \quad (2.3)$$

となる。係数 C_k は弦の初期値の形から決められる。その前に、この式の各項の振動周期を t_k 、また、その逆数である振動数を ν_k とすると、

$$t_k = \frac{2\ell}{(k + \frac{1}{2})c}, \quad \nu_k = \frac{(k + \frac{1}{2})c}{2\ell} \quad (2.4)$$

となる。特に、 $k = 0$ の振動を基本振動と言い、そのときの、周期 t_0 、振動数 ν_0 は、

$$t_0 = 4\ell/c, \quad \nu_0 = c/(4\ell) \quad (2.5)$$

である。 k が1以上の振動を、一般に、倍振動と言うが、そのときの振動数は、

$$\nu_1 = 3\nu_0, \quad \nu_2 = 5\nu_0, \quad \nu_3 = 7\nu_0, \quad \dots \quad (2.6)$$

と基本振動数の奇数倍となる．偶数倍の倍振動が存在しないのは， $X(x)$ が偶関数に制限されているためである．

つぎに，係数 C_k を決めよう．初めに，弦の真ん中を距離 U_0 だけ持ち上げたときは，

$$U(x, 0) = U_0 \frac{\ell - |x|}{\ell} \quad (2.7)$$

となるので，(2.3) 式から，

$$U_0 \frac{\ell - |x|}{\ell} = \sum_{k=0}^{\infty} C_k \cos \left(\left(k + \frac{1}{2} \right) \pi x / \ell \right) \quad (2.8)$$

でなければならない．この式の両辺に $\cos \left(\left(k' + \frac{1}{2} \right) \pi x / \ell \right)$ を掛け， x で $-\ell$ から ℓ まで積分すると，cosine の直交式

$$\int_{-\ell}^{\ell} \cos \left(\left(k + \frac{1}{2} \right) \pi x / \ell \right) \cos \left(\left(k' + \frac{1}{2} \right) \pi x / \ell \right) dx = \ell \delta_{k,k'} \quad (2.9)$$

を用いて，係数 C_k が，

$$C_k = \frac{U_0}{\ell^2} \int_{-\ell}^{\ell} (\ell - |x|) \cos \left(\left(k + \frac{1}{2} \right) \pi x / \ell \right) dx = \frac{2U_0}{\pi^2 \left(k + \frac{1}{2} \right)^2} \quad (2.10)$$

と求められる．これを (2.3) 式に戻して，方程式の解は，

$$U(x, t) = \frac{2U_0}{\pi^2} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\cos \left(\left(k + \frac{1}{2} \right) \pi x / \ell \right) \cos \left(\left(k + \frac{1}{2} \right) \pi c t / \ell \right)}{\left(k + \frac{1}{2} \right)^2} \quad (2.11)$$

となる．しかし，この式を見ても，実際に弦がどのような形で動いていくのかは想像もできない．ここで，三角関数の積和公式を用いて，

$$U(x, t) = \frac{U_0}{\pi^2} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\cos \left(\left(k + \frac{1}{2} \right) \pi (x - ct) / \ell \right) + \cos \left(\left(k + \frac{1}{2} \right) \pi (x + ct) / \ell \right)}{\left(k + \frac{1}{2} \right)^2} \quad (2.12)$$

と変形すると，これは，右進行波と左進行波に分離したことになる．ここで，(2.10) 式の C_k を (2.8) 式に代入し，変数 x を $y = x \pm ct$ と置き換えると，

$$U_0 \frac{\ell - |y|}{\ell} = \frac{2U_0}{\pi^2} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\cos \left(\left(k + \frac{1}{2} \right) \pi y / \ell \right)}{\left(k + \frac{1}{2} \right)^2} \quad (2.13)$$

となるので，この式を利用すると，(2.12) 式の $U(x, t)$ は，

$$U(x, t) = U_0 \left(\frac{\ell - |x - ct|}{2\ell} + \frac{\ell - |x + ct|}{2\ell} \right) \quad (2.14)$$

と書き直される．これは，初期値である (2.7) 式と比べると，初期変位の半分が右進行波となり，あとの半分が左進行波となることを示す．もっとも，この式は，ここまで述べた Fourier 級数を用いた解法を使わなくても，波動方程式の一般解から直接導くことが可能である．ここで，一つ注意が必要である．この式のままで， $t \rightarrow \infty$ のとき， $U(x, t) \rightarrow -\infty$ となって実情と合わないおかしなことが起こる．(2.13) 式はその成立過程から， y の範囲 $[-\ell, \ell]$ で成立する式であるが，この式の右辺は y に関し周期 4ℓ の周期関数であり， y の範囲 $[-2\ell, 2\ell]$ で正しい式と認められる．実際，この式を数値的に確かめた結果では，この範囲内で両辺は一致している．しかし，この範囲を超えた領域では成立しない式である．したがって，(2.14) 式の $x - ct$ ，あるいは，

$x + ct$ が範囲 $[-2\ell, 2\ell]$ を超えるときは、この式もこのままでは使えない。この (2.13) 式が y のすべての領域で使えるようにするには、 $[]$ を Gauss 記号として、

$$\langle y \rangle = [y/(2\ell)] \quad (2.15)$$

と y に依存する整数 $\langle y \rangle$ を定義しておき、これを用いて、(2.13) 式の左辺を周期型の関数に変形し、

$$\frac{U_0}{\ell} (-1)^{\langle y \rangle + 1} (y - 2\ell \langle y \rangle - \ell) = \frac{2U_0}{\pi^2} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\cos((k + \frac{1}{2})\pi y/\ell)}{(k + \frac{1}{2})^2} \quad (2.16)$$

とする。これはギザギザの鋸歯のような形が周期 4ℓ で連続的に並んだ形で、 y のすべての領域 $(-\infty, \infty)$ で使うことができる。この式を用いると、(2.14) 式は、

$$U(x, t) = \frac{U_0}{2\ell} \left[(-1)^{\langle x-ct \rangle + 1} (x - ct - 2\ell \langle x - ct \rangle - \ell) + (-1)^{\langle x+ct \rangle + 1} (x + ct - 2\ell \langle x + ct \rangle - \ell) \right] \quad (2.17)$$

と修正される。このように、Gauss 記号を用いて 1 本の式で書いてしまうと、式としてはきれいであるが、これから、場合分けしていくのが大変になる。ここでは、この式に従って、プログラムを組み、数値計算を試みた。これから、先に示した図 3 の形が再現される。また、図 3 の続きを図 4 に示す。この図の水平な部分が下がっていく速度は $U_0 c/\ell$ で一定値である。ここまでの、1 周期の半分で、このあと向きを変え同じ速度で、元の状態に戻っていく。

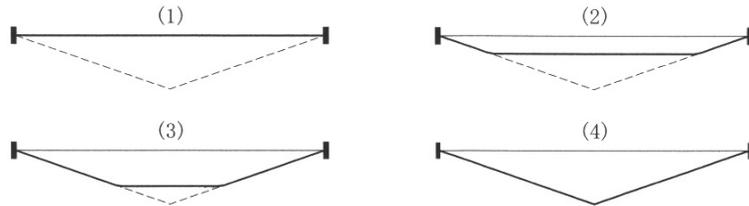


図 4

3 おわりに

大学で物理学を習得した人ならば誰でも、弦振動の問題は、Fourier 級数を用いて解けるということを知っているはず。しかし、実際に、初期値問題を解いて、弦がどのような形で振動するかまでを解いてみる人はほとんどいないし、教科書にも載っていない。ここではそれを敢えてやってみたにすぎないが、意外にもわかっていないことが多い。

ここでは、弦の真ん中を持ち上げるというきわめて対称性の良い場合だけを実行してみたので、比較的簡単な計算ですますことができました。しかし、弦の真ん中から外れたところを持ち上げた場合は、こんな簡単な計算ではすむはずがない。折を見てそのような場合もやってみたいと考えている。

[謝辞]

今回も、京都大学名誉教授の中西襄先生にこの原稿を見ていただき、たくさんコメントをいただきました。先生に心から感謝いたします。

n 次元の球の体積 2 ($n = 4, 5$ の場合)

矢野 忠¹

The Volume of n -dimensional Hypersphere 2

Tadashi YANO²

1 はじめに

このエッセイは [1] を改訂したものである。改訂の主な部分は 5 次元の球の体積を求める 3 節を書き加えたこと、および $n = 5$ 次元までの直交座標系から極座標系への変換 (4 節) とそのヤコビアンを求める計算 (5 節) を書き加えたこと、である。またそれに伴って 7 節の付録に直交行列式を追加した。

[2] ではまず球を表す方程式からはじめて 1 次元, 2 次元といった低次元の球の体積を求め、最後に一般の n 次元の球の体積を求めた。この n 次元の球の体積の求め方は 3 次元までの場合とは違って、多重積分を行うという正統な (orthodox) 方法ではなく、ある便法を用いていた。今回は正統に多重積分を行う方法で 4, 5 次元の球の体積を求めてみよう。

一般の n 次元の球の体積の計算を直ちに説明してもいいのだが、この一般の場合は力づくの計算となるのでかなり複雑である。だからまだ比較的計算がやさしい 4, 5 次元の球の体積を求めることを一度経験することによって、一般の n 次元の球の体積を求めるヒントが得られるように配慮した。とはいってもこの 4, 5 次元の場合でもかなり力まかせの計算であって、一般の人には退屈であるかもしれない。

しかし、正統な方法で n 次元の球の体積を求めたいと考える人にとっては今回の 4, 5 次元の球の計算は示唆に富むであろう。それと [2] では天下一的に用いたヤコビアンの計算を $n = 2$ の場合からはじめて $n = 5$ の場合まで求めた。これによって一般の n の場合のヤコビアンが帰納的に推測される。

2 節では 4 次元の球の体積を求め、3 節では 5 次元の球の体積を求める。4 節では極座標系への変換を 5 次元まで与える。5 節では 5 次元までのヤコビアンを求める。6 節はまとめである。付録として 7 節ではヤコビアンを求めるときに現れた 5 次までの行列式が直交行列式であることを示す。

2 4次元の球の体積

まずは 4 次元の球の体積からはじめよう。

4 次元の球の体積 $V_4(a)$ は領域 $\{B_4(a) : 0 \leq x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 \leq a^2\}$ でのつぎの積分で与えられる。

$$V_4(a) = \iiint\limits_{B_4(a)} dx_1 dx_2 dx_3 dx_4 \quad (2.1)$$

上の積分をするために 4 次元の極座標 $(r, \theta_1, \theta_2, \theta_3)$ を導入しよう。このとき、4 次元の極座標と直交座標 (x_1, x_2, x_3, x_4) の関係は次の式で与えられる。

$$x_1 = r \cos \theta_1 \quad (2.2)$$

$$x_2 = r \sin \theta_1 \cos \theta_2 \quad (2.3)$$

$$x_3 = r \sin \theta_1 \sin \theta_2 \cos \theta_3 \quad (2.4)$$

$$x_4 = r \sin \theta_1 \sin \theta_2 \sin \theta_3 \quad (2.5)$$

¹元愛媛大学工学部

²yanotad@earth.ocn.ne.jp

$0 \leq x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 \leq a^2$ で表される球の内部にある (x_1, x_2, x_3, x_4) に対する $(r, \theta_1, \theta_2, \theta_3)$ の変域は

$$0 \leq r \leq a, \quad 0 \leq \theta_1, \theta_2 \leq \pi, \quad 0 \leq \theta_3 \leq 2\pi$$

である.

4次元の直交座標 (x_1, x_2, x_3, x_4) で表された微小体積 (volume element) $dV = dx_1 dx_2 dx_3 dx_4$ は4次元の極座標では $dV = J_4 dr d\theta_1 d\theta_2 d\theta_3$ である. ここで J_4 は4次元のヤコビアン (Jacobian) である. ヤコビアンの計算は面倒なので5節で述べるが, 計算して得られるヤコビアンは

$$J_4 = r^3 \sin^2 \theta_1 \sin \theta_2 \quad (2.6)$$

となる. これを使えば, 半径 a の4次元の球の体積 $V_4(a)$ は

$$\begin{aligned} V_4(a) &= \iiint\limits_{B_4(a)} J_4 dr d\theta_1 d\theta_2 d\theta_3 \\ &= \iiint\limits_{B_4(a)} r^3 \sin^2 \theta_1 \sin \theta_2 dr d\theta_1 d\theta_2 d\theta_3 \\ &= \int_0^a r^3 dr \int_0^{2\pi} d\theta_3 \int_0^\pi \sin \theta_2 d\theta_2 \int_0^\pi \sin^2 \theta_1 d\theta_1 \\ &= 2\pi \left[\frac{r^4}{4} \right]_0^a \int_{-1}^1 d(\cos \theta_2) \int_0^\pi \sin^2 \theta_1 d\theta_1 \\ &= 2\pi \cdot \frac{a^4}{4} \cdot 2 \cdot \frac{\pi}{2} \\ &= \frac{\pi^2}{2} a^4 \end{aligned} \quad (2.7)$$

したがって

$$V_4(a) = \frac{\pi^2}{2} a^4 \quad (2.8)$$

が求められた. ここで,

$$\int_0^\pi \sin^2 \theta_1 d\theta_1 = \frac{1}{2} \int_0^\pi (1 - \cos 2\theta_1) d\theta_1 = \frac{\pi}{2} \quad (2.9)$$

であることを用いた.

ここで, [1] で求めた n 次元の球の体積の式で $n = 4$ とおけば,

$$C_4 = \frac{2\pi^{4/2}}{4\Gamma(4/2)} = \frac{2\pi^2}{4\Gamma(2)} = \frac{\pi^2}{2} \quad (2.10)$$

である. これは (2.8) の a^4 の前の係数と一致している. ただし, (2.10) で $\Gamma(2) = 1$ であることを用いた.

3 5次元の球の体積

つづいて5次元の球の体積を求めよう.

5次元の球の体積 $V_5(a)$ は領域 $\{B_5(a) : 0 \leq x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 + x_5^2 \leq a^2\}$ でのつぎの積分で与えられる.

$$V_5(a) = \int \cdots \int\limits_{B_5(a)} dx_1 dx_2 dx_3 dx_4 dx_5 \quad (3.1)$$

(3.1) の積分をするために 5 次元の極座標 $(r, \theta_1, \theta_2, \theta_3, \theta_4)$ を導入しよう. このとき, 5 次元の極座標と直交座標 $(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5)$ の関係は次の式で与えられる.

$$x_1 = r \cos \theta_1 \quad (3.2)$$

$$x_2 = r \sin \theta_1 \cos \theta_2 \quad (3.3)$$

$$x_3 = r \sin \theta_1 \sin \theta_2 \cos \theta_3 \quad (3.4)$$

$$x_4 = r \sin \theta_1 \sin \theta_2 \sin \theta_3 \cos \theta_4 \quad (3.5)$$

$$x_5 = r \sin \theta_1 \sin \theta_2 \sin \theta_3 \sin \theta_4 \quad (3.6)$$

$0 \leq x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 + x_5^2 \leq a^2$ で表される球の内部にある $(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5)$ に対する $(r, \theta_1, \theta_2, \theta_3, \theta_4)$ の変域は

$$0 \leq r \leq a, \quad 0 \leq \theta_1, \theta_2, \theta_3 \leq \pi, \quad 0 \leq \theta_4 \leq 2\pi$$

である.

5 次元の直交座標 $(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5)$ での微小体積 (volume element) $dV = dx_1 dx_2 dx_3 dx_4 dx_5$ は 5 次元の極座標では $dV = J_5 dr d\theta_1 d\theta_2 d\theta_3 d\theta_4$ である. ここで J_5 は 5 次元のヤコビアンである. ヤコビアンの計算は 5 節で述べるが, 得られるヤコビアンは

$$J_5 = r^4 \sin^3 \theta_1 \sin^2 \theta_2 \sin \theta_3 \quad (3.7)$$

となる. これを使えば, 半径 a の 4 次元の球の体積 $V_5(a)$ は

$$\begin{aligned} V_5(a) &= \int \cdots \int_{B_5(a)} J_5 dr d\theta_1 d\theta_2 d\theta_3 d\theta_4 \\ &= \int \cdots \int r^4 \sin^3 \theta_1 \sin^2 \theta_2 \sin \theta_3 dr d\theta_1 d\theta_2 d\theta_3 d\theta_4 \\ &= \int_0^a r^4 dr \int_0^{2\pi} d\theta_4 \int_0^\pi \sin \theta_3 d\theta_3 \int_0^\pi \sin^2 \theta_2 d\theta_2 \int_0^\pi \sin^3 \theta_1 d\theta_1 \\ &= 2\pi \left[\frac{r^5}{5} \right]_0^a \int_{-1}^1 d(\cos \theta_3) \int_0^\pi \sin^2 \theta_2 d\theta_2 \int_0^\pi \sin^3 \theta_1 d\theta_1 \\ &= 2\pi \cdot \frac{a^5}{5} \cdot 2 \cdot \frac{\pi}{2} \cdot \frac{4}{3} \\ &= \frac{8\pi^2}{15} a^5 \end{aligned} \quad (3.8)$$

したがって

$$V_5(a) = \frac{8\pi^2}{15} a^5 \quad (3.9)$$

が求められた. ここで,

$$\int_0^\pi \sin^2 \theta_2 d\theta_2 = \frac{1}{2} \int_0^\pi (1 - \cos 2\theta_2) d\theta_2 = \frac{\pi}{2} \quad (3.10)$$

$$\int_0^\pi \sin^3 \theta_1 d\theta_1 = \int_{-1}^1 (1 - \cos^2 \theta_1) d(\cos \theta_1) = \frac{4}{3} \quad (3.11)$$

であることを用いた.

ここで, [1] で求めた n 次元の球の体積の式で $n = 5$ とおけば,

$$C_5 = \frac{2\pi^{5/2}}{5\Gamma(5/2)} = \frac{8\pi^{5/2}}{15\Gamma(1/2)} = \frac{8\pi^2}{15} \quad (3.12)$$

である. これは (3.8) の a^5 の前の係数と一致している. ただし, (3.12) で $\Gamma(1/2) = (\pi)^{1/2}$ であることを用いた. 4 節では直交座標系から極座標系への変換を $n = 5$ まで与えよう.

4 極座標系への変換

まず2次元の直交座標系 (x, y) と極座標系 (r, θ) との関係は

$$x = r \cos \theta, \quad y = r \sin \theta \quad (4.1)$$

である.

つぎに3次元の直交座標系 (x, y, z) と極座標系 (r, θ, ϕ) との関係は

$$x = r \sin \theta \cos \phi, \quad y = r \sin \theta \sin \phi, \quad z = r \cos \theta \quad (4.2)$$

である. しかし, 2次元の場合の拡張となるように (x, y, z) を (y, z, x) と置き換えた方がよい. そうすると

$$x = r \cos \theta, \quad y = r \sin \theta \cos \phi, \quad z = r \sin \theta \sin \phi \quad (4.3)$$

となる.

4次元以上の場合には文字数が多くなるので, 文字に添字をつけた変数で表すことにする.

さらに, 4次元の直交座標系 (x_1, x_2, x_3, x_4) と極座標系 $(r, \theta_1, \theta_2, \theta_3)$ との関係は

$$x_1 = r \cos \theta_1, \quad x_2 = r \sin \theta_1 \cos \theta_2, \quad x_3 = r \sin \theta_1 \sin \theta_2 \cos \theta_3, \quad x_4 = r \sin \theta_1 \sin \theta_2 \sin \theta_3 \quad (4.4)$$

5次元の直交座標系 $(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5)$ と極座標系 $(r, \theta_1, \theta_2, \theta_3, \theta_4)$ との関係はさらに長くなるので, つぎのような略記号を導入すれば

$$c_i = \cos \theta_i, \quad s_i = \sin \theta_i \quad (4.5)$$

つぎのように

$$x_1 = r c_1, \quad x_2 = r s_1 c_2, \quad x_3 = r s_1 s_2 c_3, \quad x_4 = r s_1 s_2 s_3 c_4, \quad x_5 = r s_1 s_2 s_3 s_4 \quad (4.6)$$

表される. ここで, x_1, x_2, x_3 は (4.4) の4次元の変換と同一である.

5 ヤコビアン

4, 5次元の球の体積を求めるために必要なヤコビアンの計算をここで示そう. もちろん $n=4$ とか $n=5$ の場合を直接計算することもできるが, ここでは $n=2$ の場合から順に計算をしていこう. この計算にはヤコビアンの漸化式的な性質をえる [3].

ヤコビアンの記法を簡単にするために前に導入した記号

$$c_i = \cos \theta_i, \quad s_i = \sin \theta_i \quad (5.1)$$

を用いる.

またヤコビアンの次元数を明示するために i 次元のヤコビアンを

$$J_i = i \text{次元のヤコビアン} \quad (5.2)$$

と添字をつけて表す.

まず最初に2次元のヤコビアン J_2 から求めていこう. そのためには直交座標 $(x, y) = (x_1, x_2)$ と極座標 (r, θ_1) との関係は

$$x_1 = r \cos \theta_1, \quad x_2 = r \sin \theta_1 \quad (5.3)$$

である.

$$\begin{aligned}
J_2 &= \begin{vmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial r} & \frac{\partial x_1}{\partial \theta_1} \\ \frac{\partial x_2}{\partial r} & \frac{\partial x_2}{\partial \theta_1} \end{vmatrix} \\
&= \begin{vmatrix} c_1 & -(r)s_1 \\ s_1 & (r)c_1 \end{vmatrix} \\
&= r \begin{vmatrix} c_1 & -s_1 \\ s_1 & c_1 \end{vmatrix} \\
&= r
\end{aligned} \tag{5.4}$$

上の計算で行列式の第2列から共通因子 r をくくりだしている。そのことが分かりやすいように (5.4) の2行目の行列式の第2列の r をわざと (r) とかっこではさんでいる。以下でも同様に行列式からくくりだす共通因子を $()$ ではさんで示す。この $()$ は共通因子を強調するという以外に特別の意味はない。

ここで

$$\begin{vmatrix} c_1 & -s_1 \\ s_1 & c_1 \end{vmatrix} = 1 \tag{5.5}$$

であることを用いた。

3次元の直交座標と極座標の関係は文字に添字をつけた記号では

$$x_1 = r \cos \theta_1, \quad x_2 = r \sin \theta_1 \cos \theta_2, \quad x_3 = r \sin \theta_1 \sin \theta_2 \tag{5.6}$$

と表せるので、3次のヤコビアン J_3 は

$$\begin{aligned}
J_3 &= \begin{vmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial r} & \frac{\partial x_1}{\partial \theta_1} & \frac{\partial x_1}{\partial \theta_2} \\ \frac{\partial x_2}{\partial r} & \frac{\partial x_2}{\partial \theta_1} & \frac{\partial x_2}{\partial \theta_2} \\ \frac{\partial x_3}{\partial r} & \frac{\partial x_3}{\partial \theta_1} & \frac{\partial x_3}{\partial \theta_2} \end{vmatrix} \\
&= \begin{vmatrix} c_1 & -(r)s_1 & 0 \\ s_1 c_2 & (r)c_1 c_2 & -(r s_1) s_2 \\ s_1 s_2 & (r)c_1 s_2 & (r s_1) c_2 \end{vmatrix} \\
&= r^2 s_1 \begin{vmatrix} c_1 & -s_1 & 0 \\ s_1 c_2 & c_1 c_2 & -s_2 \\ s_1 s_2 & c_1 s_2 & c_2 \end{vmatrix} \\
&= r^2 s_1
\end{aligned} \tag{5.7}$$

上の2行目の行列式の第2列から共通因子 r を第3列から共通因子 $r s_1$ をくくりだしている。その共通因子の積が $r^2 s_1$ である。ここで

$$\begin{vmatrix} c_1 & -s_1 & 0 \\ s_1 c_2 & c_1 c_2 & -s_2 \\ s_1 s_2 & c_1 s_2 & c_2 \end{vmatrix} = 1 \tag{5.8}$$

であることを用いた。このことは第1行で展開して (5.5) を用いれば証明できる。計算の詳細は7節の付録で述べよう。

4次元のヤコビアン J_4 は

$$\begin{aligned}
J_4 &= \begin{vmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial r} & \frac{\partial x_1}{\partial \theta_1} & \frac{\partial x_1}{\partial \theta_2} & \frac{\partial x_1}{\partial \theta_3} \\ \frac{\partial x_2}{\partial r} & \frac{\partial x_2}{\partial \theta_1} & \frac{\partial x_2}{\partial \theta_2} & \frac{\partial x_2}{\partial \theta_3} \\ \frac{\partial x_3}{\partial r} & \frac{\partial x_3}{\partial \theta_1} & \frac{\partial x_3}{\partial \theta_2} & \frac{\partial x_3}{\partial \theta_3} \\ \frac{\partial x_4}{\partial r} & \frac{\partial x_4}{\partial \theta_1} & \frac{\partial x_4}{\partial \theta_2} & \frac{\partial x_4}{\partial \theta_3} \end{vmatrix} \\
&= \begin{vmatrix} c_1 & -(r)s_1 & 0 & 0 \\ s_1 c_2 & (r)c_1 c_2 & -(rs_1)s_2 & 0 \\ s_1 s_2 c_3 & (r)c_1 s_2 c_3 & (rs_1)c_2 c_3 & -(rs_1 s_2)s_3 \\ s_1 s_2 s_3 & (r)c_1 s_2 s_3 & (rs_1)c_2 s_3 & (rs_1 s_2)c_3 \end{vmatrix} \\
&= r^3 s_1^2 s_2 \begin{vmatrix} c_1 & -s_1 & 0 & 0 \\ s_1 c_2 & c_1 c_2 & -s_2 & 0 \\ s_1 s_2 c_3 & c_1 s_2 c_3 & c_2 c_3 & -s_3 \\ s_1 s_2 s_3 & c_1 s_2 s_3 & c_2 s_3 & c_3 \end{vmatrix} \\
&= r^3 s_1^2 s_2 \tag{5.9}
\end{aligned}$$

上の2行目の行列式の第2列から因子 r を, 第3列から因子 rs_1 を, 第4列から因子 $rs_1 s_2$ くりだしている. それらの共通因子の積が $r^3 s_1^2 s_2$ である. ここで

$$\begin{vmatrix} c_1 & -s_1 & 0 & 0 \\ s_1 c_2 & c_1 c_2 & -s_2 & 0 \\ s_1 s_2 c_3 & c_1 s_2 c_3 & c_2 c_3 & -s_3 \\ s_1 s_2 s_3 & c_1 s_2 s_3 & c_2 s_3 & c_3 \end{vmatrix} = 1 \tag{5.10}$$

であることを用いた. このことは行列式を第1行目で展開して得られた二つの行列式からまた共通因子をくりだし, (5.8) を用いれば証明できる. 計算の詳細は7節で述べる.

5次元のヤコビアン J_5 は

$$\begin{aligned}
J_5 &= \begin{vmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial r} & \frac{\partial x_1}{\partial \theta_1} & \frac{\partial x_1}{\partial \theta_2} & \frac{\partial x_1}{\partial \theta_3} & \frac{\partial x_1}{\partial \theta_4} \\ \frac{\partial x_2}{\partial r} & \frac{\partial x_2}{\partial \theta_1} & \frac{\partial x_2}{\partial \theta_2} & \frac{\partial x_2}{\partial \theta_3} & \frac{\partial x_2}{\partial \theta_4} \\ \frac{\partial x_3}{\partial r} & \frac{\partial x_3}{\partial \theta_1} & \frac{\partial x_3}{\partial \theta_2} & \frac{\partial x_3}{\partial \theta_3} & \frac{\partial x_3}{\partial \theta_4} \\ \frac{\partial x_4}{\partial r} & \frac{\partial x_4}{\partial \theta_1} & \frac{\partial x_4}{\partial \theta_2} & \frac{\partial x_4}{\partial \theta_3} & \frac{\partial x_4}{\partial \theta_4} \\ \frac{\partial x_5}{\partial r} & \frac{\partial x_5}{\partial \theta_1} & \frac{\partial x_5}{\partial \theta_2} & \frac{\partial x_5}{\partial \theta_3} & \frac{\partial x_5}{\partial \theta_4} \end{vmatrix} \\
&= \begin{vmatrix} c_1 & -(r)s_1 & 0 & 0 & 0 \\ s_1 c_2 & (r)c_1 c_2 & -(rs_1)s_2 & 0 & 0 \\ s_1 s_2 c_3 & (r)c_1 s_2 c_3 & (rs_1)c_2 c_3 & -(rs_1 s_2)s_3 & 0 \\ s_1 s_2 s_3 c_4 & (r)c_1 s_2 s_3 c_4 & (rs_1)c_2 s_3 c_4 & (rs_1 s_2)c_3 c_4 & -(rs_1 s_2 s_3)s_4 \\ s_1 s_2 s_3 s_4 & (r)c_1 s_2 s_3 s_4 & (rs_1)c_2 s_3 s_4 & (rs_1 s_2)c_3 s_4 & (rs_1 s_2 s_3)c_4 \end{vmatrix} \\
&= r^4 s_1^3 s_2^2 s_3 \begin{vmatrix} c_1 & -s_1 & 0 & 0 & 0 \\ s_1 c_2 & c_1 c_2 & -s_2 & 0 & 0 \\ s_1 s_2 c_3 & c_1 s_2 c_3 & c_2 c_3 & -s_3 & 0 \\ s_1 s_2 s_3 c_4 & c_1 s_2 s_3 c_4 & c_2 s_3 c_4 & c_3 c_4 & -s_4 \\ s_1 s_2 s_3 s_4 & c_1 s_2 s_3 s_4 & c_2 s_3 s_4 & c_3 s_4 & c_4 \end{vmatrix} \\
&= r^4 s_1^3 s_2^2 s_3 \tag{5.11}
\end{aligned}$$

である. (5.11) の上から2番目の行列式で第2列から共通因子 r をくりだし, 第3列から rs_1 をくりだし, 第4列から $rs_1 s_2$ をくりだし, 第5列から $rs_1 s_2 s_3$ をくりだす. それらの共通因数の積が $r^4 s_1^3 s_2^2 s_3$ である.

ここで

$$\begin{vmatrix} c_1 & -s_1 & 0 & 0 & 0 \\ s_1 c_2 & c_1 c_2 & -s_2 & 0 & 0 \\ s_1 s_2 c_3 & c_1 s_2 c_3 & c_2 c_3 & -s_3 & 0 \\ s_1 s_2 s_3 c_4 & c_1 s_2 s_3 c_4 & c_2 s_3 c_4 & c_3 c_4 & -s_4 \\ s_1 s_2 s_3 s_4 & c_1 s_2 s_3 s_4 & c_2 s_3 s_4 & c_3 s_4 & c_4 \end{vmatrix} = 1 \quad (5.12)$$

であることを用いた。計算は7節を参照せよ。

これで4次元と5次元の球の体積を求めるに必要なヤコビアンを求めることができた。一般の n 次元の球の体積を求めるヤコビアンの形を推測するため、いままで求めたヤコビアンを2次元から4次元までまとめてみれば

$$\begin{aligned} J_2 &= r \\ J_3 &= r^2 \sin \theta_1 \\ J_4 &= r^3 \sin^2 \theta_1 \sin \theta_2 \\ J_5 &= r^4 \sin^3 \theta_1 \sin^2 \theta_2 \sin \theta_3 \end{aligned}$$

となる。

これらのヤコビアンから n 次のヤコビアンは

$$J_n = r^{n-1} \sin^{n-2} \theta_1 \sin^{n-3} \theta_2 \sin^{n-4} \theta_3 \cdots \sin \theta_{n-2} \quad (5.13)$$

であることが推測される。

6 おわりに

4, 5次元の球の体積は確かに半径 a の4乗, 5乗にそれぞれ比例している。この事実を前回の計算では用いたが, 愚直な計算の結果から確かめられた。

4, 5次元の球の体積を求めることがそんなに重要だとは思わないが, n 次元の球の体積を求めるためには n 次元のヤコビアン J_n が必要であるのでそのステップとしては重要と考えられる。

n 次元の球の体積をこの方法で求めることは [4] で述べることにしよう。

7 付録 直交行列式の計算

この直交行列式と5節のヤコビアンの計算法は [3] から学んだ。よく似た計算法だが, ちょっと異なる計算法としては [5] がある。

まず2次の行列式は

$$\begin{vmatrix} c_1 & -s_1 \\ s_1 & c_1 \end{vmatrix} = 1 \quad (7.1)$$

となることはすぐにわかる。

3次の行列式は

$$\begin{vmatrix} c_1 & -s_1 & 0 \\ s_1 c_2 & c_1 c_2 & -s_2 \\ s_1 s_2 & c_1 s_2 & c_2 \end{vmatrix} = c_1 \begin{vmatrix} c_1 c_2 & -s_2 \\ c_1 s_2 & c_2 \end{vmatrix} + s_1 \begin{vmatrix} s_1 c_2 & -s_2 \\ s_1 s_2 & c_2 \end{vmatrix} = (c_1^2 + s_1^2) \begin{vmatrix} c_2 & -s_2 \\ s_2 & c_2 \end{vmatrix} = 1 \quad (7.2)$$

となる。このときに (7.1) の行列式で添字を $1 \rightarrow 2$ とおきかえた式を用いている。

同様に計算すれば、4次の行列式は

$$\begin{vmatrix} c_1 & -s_1 & 0 & 0 \\ s_1 c_2 & c_1 c_2 & -s_2 & 0 \\ s_1 s_2 c_3 & c_1 s_2 c_3 & c_2 c_3 & -s_3 \\ s_1 s_2 s_3 & c_1 s_2 s_3 & c_2 s_3 & c_3 \end{vmatrix} = (c_1^2 + s_1^2) \begin{vmatrix} c_2 & -s_2 & 0 \\ s_2 c_3 & c_2 c_3 & -s_3 \\ s_2 s_3 & c_2 s_3 & c_3 \end{vmatrix} = 1 \quad (7.3)$$

となる。このときに(7.2)の行列式で添字を $1 \rightarrow 2, 2 \rightarrow 3$ とおきかえた式を用いている。
5次の行列式も同様に

$$\begin{vmatrix} c_1 & -s_1 & 0 & 0 & 0 \\ s_1 c_2 & c_1 c_2 & -s_2 & 0 & 0 \\ s_1 s_2 c_3 & c_1 s_2 c_3 & c_2 c_3 & -s_3 & 0 \\ s_1 s_2 s_3 c_4 & c_1 s_2 s_3 c_4 & c_2 s_3 c_4 & c_3 c_4 & -s_4 \\ s_1 s_2 s_3 s_4 & c_1 s_2 s_3 s_4 & c_2 s_3 s_4 & c_3 s_4 & c_4 \end{vmatrix} = (c_1^2 + s_1^2) \begin{vmatrix} c_2 & -s_2 & 0 & 0 \\ s_2 c_3 & c_2 c_3 & -s_3 & 0 \\ s_2 s_3 c_4 & c_2 s_3 c_4 & c_3 c_4 & -s_4 \\ s_2 s_3 s_4 & c_2 s_3 s_4 & c_3 s_4 & c_4 \end{vmatrix} = 1 \quad (7.4)$$

となる。このときに(7.3)の行列式で添字を $1 \rightarrow 2, 2 \rightarrow 3, 3 \rightarrow 4$ とおきかえた式を用いている。

これらの行列式は**直交行列式**と呼ばれているらしい。ただ文献では[6]に3次の直交行列式の名前があるくらいでありあまりよくはわからなかった。ただ、共通因数をとり出した残りの因子である行列式が直交性をもち、その値が1となることはよく知られているのではないかと思われる[3]。

(2005.12.22) (2017.5.30 改訂)

参考文献

- [1] 矢野 忠, n 次元の球の体積 2, 研究と実践 (愛数協), 90号 (2006.5) 1-4
- [2] 矢野 忠, n 次元の球の体積 1, 数学・物理通信, 7巻3号 (2017.6) 22-29
- [3] 上野孝司, N 次元超球の体積はヤコビアン, 曲面積は平行四辺形,
hooktail.sub.jp/contributions/sum2.pdf
- [4] 矢野 忠, n 次元の球の体積 3, 数学・物理通信, 7巻5号 (2017.6) 掲載予定
- [5] 山本哲朗, 『行列解析ノート』, (サイエンス社, 2013) 142-147
- [6] 高木貞治, 「解析概論」改訂第三版 (岩波書店, 1961) 356-357

編集後記

7巻3号, 4号を続けて発行する.

できたら, さらに5号を今月中に発行したいと考えている. しかし, あくまでできたらであるから, ここで予告をしても発行できないかもしれないことを予めお断りしておく.

そろそろ暑くなってきて, 梅雨のシーズンが近づいて来た. 北海道に居住する方にはおわかりいただけない梅雨の時期の湿度のために夜の寝苦しくなる時期が近づいている. エアコンの普及で私たちの子どものころから考えるとずいぶんしのぎやすくなっているが, それでも日本人を何年やってもこの時期の湿度と暑さにはまいてしまう.

これからの数か月をバカンスをとるつもりで皆様のお体を休める時期だと思うといいのではないでしょうか. 投稿者と読者の皆様にはお体をご自愛ください.

(矢野 忠)