

数学・物理通信

7卷6号 2017年9月

編集 新関章三・矢野 忠

2017年9月2日

目次 (Contents)

| | | |
|--------------------------------------------------------------|----------------------------------------------|----|
| 1. 非整数階微分の新しい定義 | 中西 襄 | 2 |
| 2. 誤解を招く弦振動の問題 (2) | 世戸憲治 | 8 |
| 3. n 次元の球の体積 4 | 矢野 忠 | 16 |
| 4. 読者の声 | 浅田 明, 青山泰雄, 編集人 | 22 |
| 5. 編集後記 | 新関章三 | 24 |
| | | |
| 1. A New Definition of the Non-Integer-Order Differentiation | Noboru NAKANISHI | 2 |
| 2. Misleading Problems in String Oscillations (2) | Kenji SETO | 8 |
| 3. The Volume of n -dimensional Hypersphere 4 | Tadashi YANO | 16 |
| 4. Mails from Readers | Akira ASADA, Yasuo AOYAMA and Editor (T. Y.) | 22 |
| 4. Editorial Comments | Shozo NIIZEKI | 24 |

非整数階微分の新しい定義

A New Definition of the Non-Integer-Order Differentiation

中西 襄¹

Noboru NAKANISHI

1 はじめに

微分演算子 d/dx を D と略記する. n が正の整数ならば, D^n は n 階微分演算子, D^{-n} は n 階積分演算子である. しかし, 不定積分には任意定数がつくため, D^{-n} を確定した線形演算子であるとする, 線形演算子は 0 に作用すれば 0 でなければならないから,

$$1 = (D^{-n}D^n)1 = D^{-n}(D^n 1) = D^{-n}0 = 0 \quad (n > 0) \quad (1.1)$$

という矛盾を引き起こす. したがって, D^{-n} を線形演算子として矛盾なく導入するためには, 積分定数の問題をどのように処理するかをきちんと決めておかねばならない.

微分の階数 n を非整数 ν に拡張したものは, 伝統的に「分数階微分」と呼ばれているが, 分数に限るわけではないので, 誤解を招かないように筆者は「非整数階微分」と呼ぶことにしている. 非整数階微分演算子では, ν の正負によってルールになるべく定性的な違いを設けたくない, 上記の問題は深刻である. じっさいその業界では, 「リーマン・リュウヴィル微分」と「カプト (\cdot リース) 微分」の 2 種類の非整数階微分演算子の定義が用いられており, 両者は一致しない. 詳しくは, 藤井一幸編「数理の玉手箱」の中の「関数を $\frac{1}{2}$ 回微分する」(浅田明執筆²) を見ていただくこととして, 要約すると次のようである.

関数 $F(x)$ を n 回積分したもの (積分の下限を 0 とする) は, 部分積分の繰り返しにより,

$$F(0) + \frac{1}{(n-1)!} \int_0^x dy (x-y)^{n-1} F(y) \quad (1.2)$$

と書かれる. ここで $F(0)$ を無視して n を非整数 μ に自然に拡張したもの, すなわち

$$\int_0^x dy \frac{(x-y)^{\mu-1}}{\Gamma(\mu)} F(y) \quad (1.3)$$

は, リーマン・リュウヴィル積分として古くから知られているものである ($\Gamma(\mu)$ はオイラーのガンマ関数). したがって, $F(0) = 0$ とするならば, D^ν は, $\nu < 0$ のときには $\nu = -\mu$ とし, (1.3) により (積分定数の問題を除いて) 自然な定義が可能である. そこで, $\nu > 0$ の場合, $\nu = n - \eta$, $0 < \eta < 1$ (n は正の整数) と分解して,

$$D^\nu F(x) \equiv_{\text{RL}} D^n [D^{-\eta} F(x)] \quad (1.4)$$

あるいは,

$$D^\nu F(x) \equiv_{\text{CR}} D^{-\eta} [D^n F(x)] \quad (1.5)$$

¹ 京都大学名誉教授, nbr-nak@trio.plala.or.jp

² 参考文献: 浅田明「数学・物理通信」5-3, 5-6, 6-7, 6-8, 7-2.

と定義する. 前者がリーマン・リューヴィル微分, 後者がカプト(・リース)微分である. $F(x) \equiv 1$ のとき³, 後者はつねに 0 になるが, 前者では $D^{-n}1$ が x^n に比例するノンゼロな量となるので, D^n を作用させても 0 にはならない. つまり微分の階数 ν の正負を気にしないで計算しようとしたら, 交換則 (あるいは結合則) が破れているわけだ. これを我慢しておくのも一つの立場かもしれないが, そういう厄介な理論は敬遠したいと思うのは筆者のみではないであろう.

なお, $\{D^\nu\}$ を 1 パラメータ群とみたときの生成子「 D の対数」は,

$$\log D \equiv \lim_{\nu \rightarrow 0} \frac{\partial D^\nu}{\partial \nu} \quad (1.6)$$

によって定義される. 具体的には,

$$(\log D)F(x) = -\gamma F(x) - \int_0^x dy \log(x-y)F'(y) \quad (1.7)$$

で与えられることが知られている⁴ (γ はオイラー定数).

2 期待される性質をもつ非整数階微分

非整数階微分演算子 D^ν を, 無限次元線形空間 \mathcal{F} に作用する線形演算子として定義したい. そのとき筆者が D^ν の性質として期待する事柄は次の通りである (x は実数に限定).

1. $F(x) \in \mathcal{F}$ ならば $D^\nu F(x) \in \mathcal{F}$.
2. ν が非負の整数 n に等しいとき, $D^\nu F(x)$ は $F(x)$ の n 階導関数になる.
3. ν が負の整数 $-n$ に等しいとき, $D^\nu F(x)$ は $F(x)$ を n 回積分したものになる.
4. ν も $F(x)$ も実数ならば, $D^\nu F(x)$ も実数である.
5. 冪指数の可換性 $D^\mu D^\nu F(x) = D^\nu D^\mu F(x) = D^{\mu+\nu} F(x)$ は無条件に成立する.
6. $D^\nu F(x)$ は, ν について複素平面上に一意的に解析接続ができる.

これらの要請をすべて満足する \mathcal{F} を構成することは可能である. それは本質的に関数のサポートを $x \geq 0$ に限定することであった. すなわち $F(x) \in \mathcal{F}$ ならば, $F(x) = 0$ ($x < 0$) とするのである. $x \geq 0$ では通常の方のよい関数としたいところだが, 少なくとも $x = 0$ に特異性があるので, 何回も微分したら超関数にならざるをえない. 詳しくは拙著「微分方程式～物理的発想の解析学」の第 1 章 10 節と第 3 章 2 節を見ていただくことにして, 要点だけをかいつまんで述べておこう.

ヘヴィサイドの段差関数を $\theta(x)$ と書く⁵. $\theta(x) = 1$ ($x > 0$), $\theta(x) = 0$ ($x < 0$) である (超関数と考えて $x = 0$ のときの値は定義しない.). シュヴァルツによって導入された超関数 (「Y 超関数」と呼ぶことにする)

$$\begin{aligned} Y_\mu(x) &= \frac{x^{\mu-1}}{\Gamma(\mu)} \theta(x) \quad (\mu \neq 0, -1, -2, \dots), \\ &= \delta^{(n)}(x) \quad (\mu = -n = 0, -1, -2, \dots) \end{aligned} \quad (2.1)$$

³積分定数を取り除く条件 $F(0) = 0$ を課せば, $F(x) \equiv 1$ という関数は排除できるように思えるかもしれないが, $F(x) \equiv x^m/m!$ ($m > 0$) の m 階導関数が $D^m F(x) \equiv 1$ なので, それを禁止するというわけにはいかない.

⁴素朴に計算すると発散項の差が現れるので, その極限として $F'(y)$ がでるのである.

⁵数学では $Y(x)$ という記号を用いる.

は極めて重要である．ただし $\delta^{(n)}(x)$ はディラックのデルタ関数の n 階導関数を表す．定義から明らかに， $Y_0(x) \equiv \delta(x)$ ， $Y_1(x) \equiv \theta(x)$ である． $\phi(x)$ が無限回微分可能で遠方で急減少な関数⁶（すなわちシュヴァルツの記号で $\phi(x) \in (\mathcal{S})$ ）ならば， $\int dx Y_\mu(x) \phi(x)$ は μ の整関数になる．

μ についての解析性から明らかなように，任意の ν ， μ に対し，

$$D^\nu Y_\mu(x) = Y_{\mu-\nu}(x) \quad (2.2)$$

とコンシステントに定義できる．したがって， $f(\mu)$ を遠方で急増加しない実超関数とするととき，

$$F(x) \equiv \int_{-\infty}^{+\infty} d\mu f(\mu) Y_\mu(x) \quad (2.3)$$

のように書き表される超関数の全体を \mathcal{F} とすれば，

$$D^\nu F(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} d\mu f(\mu) Y_{\mu-\nu}(x) \quad (2.4)$$

となって，上記の6つの要請はすべて満たされる．

(2.3) で定義される超関数の空間 \mathcal{F} は， $x < 0$ で0である限り，十分多くの超関数を含んでいる．たとえば $f(\mu) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \delta(\mu - n - 1)$ とすれば，

$$F(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n!} x^n \theta(x) \quad (2.5)$$

となるから，整関数に $\theta(x)$ を乗じて得られる超関数は \mathcal{F} に含まれる．

(2.2) を ν で微分すれば，

$$\frac{\partial D^\nu}{\partial \nu} Y_\mu(x) = \frac{\partial}{\partial \nu} Y_{\mu-\nu}(x) = -\frac{\partial}{\partial \mu} Y_{\mu-\nu}(x) \quad (2.6)$$

となる．したがって， D の対数の定義 (1.6) から，

$$(\log D) Y_\mu(x) = -\frac{\partial}{\partial \mu} Y_\mu(x) \quad (2.7)$$

である⁷．ゆえに (2.3) の $F(x)$ に対し，部分積分により，

$$(\log D) F(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} d\mu \frac{\partial f(\mu)}{\partial \mu} Y_\mu(x) \quad (2.8)$$

を得る．

3 新しい非整数階微分の定義

Y 超関数を用いた非整数階微分演算子は非常に満足すべきものであるが， $x < 0$ のところが全くトリヴィアルな超関数にしか使えない．この制限がなくて，かつ冪指数の可換性を満たすような非整数階微分演算子は作れないものか考えよう．

Y 超関数の代わりとしてどのような(超)関数を基礎にとればよいであろうか．要請4から必須な条件は， D^ν を作用させたときに負数の ν 乗が現れないことである．それゆえ，ラプラス変換のように，指数関数を基礎にとるのはまずいようだ．そこで三角関数の代表であるサインを使うことを考える．

⁶漸近的振舞いについてはその任意階導関数についても要請する．以下ではいちいち明記しない．

⁷以前はこの式を (1.7) から導いたが，ここでやったように (2.6) を利用するのが簡単である．

$D \sin x = \cos x = \sin(x + \pi/2)$ であるから, $D^n \sin x = \sin(x + n\pi/2)$ となる. そこで

$$D^\nu \sin x = \sin\left(x + \frac{\nu\pi}{2}\right) \quad (3.1)$$

に拡張することが可能である. それゆえ

$$H(x) = \int_0^{2\pi} d\theta h(\theta) \sin(x + \theta) \quad (3.2)$$

のような関数で構成される関数空間を考えてみる. しかし残念ながらこれはうまくない. じっさい, サインの加法定理により

$$H(x) = \sin x \int_0^{2\pi} d\theta \cos \theta h(\theta) + \cos x \int_0^{2\pi} d\theta \sin \theta h(\theta) \quad (3.3)$$

だから, 結局 $H(x)$ の全体は 2 次元の関数空間になってしまう.

そこでもっと一般的な関数に拡張するため, $\sin(rx + \theta)$ を基礎にとることにする. 重要な点は, θ を π だけずらせば \sin の符号が変わるので, $r < 0$ は考えなくてもよいということである. そこで関数空間 \mathcal{G} に属する関数として,

$$G(x) \equiv \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^\infty dr g(r, \theta) \sin(rx + \theta) \quad (3.4)$$

を考える. ただし $g(r, \theta)$ は実超関数で, $r = 0$ 近傍と r の無限遠で r のいかなる冪乗よりも速く 0 に近づくものとする. また, $r = 0$ ではデルタ関数型の項も含まないとする, つまり, $G(x)$ として定数や多項式は許さないとする. $G(x)$ は無限回微分可能な関数である.

このとき非整数階微分演算子 D^ν は, \mathcal{G} に属する任意の関数 $G(x)$ を \mathcal{G} に属する関数

$$D^\nu G(x) \equiv \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^\infty dr g(r, \theta) r^\nu \sin\left(rx + \theta + \frac{\nu\pi}{2}\right) \quad (3.5)$$

に移す変換として定義することができる. この非整数階微分演算子の定義が, 前節に掲げた 6 つの要請を満たすことは明らかであろう. $x = 0$ は特別な点になっていないし, 積分定数に起因するトラブルも引き起こさない.

(3.5) を ν について微分すれば,

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \nu} D^\nu G(x) = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^\infty dr g(r, \theta) r^\nu & \left[\frac{\pi}{2} \sin\left(rx + \theta + \frac{(\nu+1)\pi}{2}\right) \right. \\ & \left. + \log r \cdot \sin\left(rx + \theta + \frac{\nu\pi}{2}\right) \right] \end{aligned} \quad (3.6)$$

である. $\nu = 0$ とおけば

$$(\log D)G(x) = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^\infty dr g(r, \theta) \left[\frac{\pi}{2} \sin\left(tx + \theta + \frac{\pi}{2}\right) + \log r \cdot \sin(rx + \theta) \right] \quad (3.7)$$

となる. (3.7) は, 角括弧内の第 1 項で積分変数 θ を $\pi/2$ だけずらすと,

$$(\log D)G(x) = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^\infty dr g^{\log}(r, \theta) \sin(rx + \theta) \quad (3.8)$$

と書き換えられる. ここに

$$g^{\log}(r, \theta) \equiv \frac{\pi}{2} g\left(r, \theta - \frac{\pi}{2}\right) + \log r \cdot g(r, \theta) \quad (3.9)$$

である. ただし右辺第 1 項の第 2 変数が負のときは, それを $\theta + 3\pi/2$ に置き換えるものとする.

4 変数 θ の消去

$G(x)$ の積分表示 (3.4) は 1 変数の関数の表示に 2 重積分を使っているという点で、レダンドな表式である。そこで、

$$\begin{aligned} g_s(r) &\equiv \int_0^{2\pi} d\theta \sin \theta \cdot g(r, \theta), \\ g_c(r) &\equiv \int_0^{2\pi} d\theta \cos \theta \cdot g(r, \theta) \end{aligned} \quad (4.1)$$

とおけば、

$$G(x) = \int_0^\infty dr (g_c(r) \sin(rx) + g_s(r) \cos(rx)) \quad (4.2)$$

というフーリエ変換の式に帰着する。逆に $G(x)$ が (4.2) の形で与えられた場合、(4.1) を満たす $g(r, \theta)$ は、もちろん一意には決まらないが、たとえば

$$g(r, \theta) = \frac{1}{\pi} (\sin \theta \cdot g_s(r) + \cos \theta \cdot g_c(r)) \quad (4.3)$$

とすればよい。しかしこの表式では、一般に非整数階微分すると 2 つの項は混ざりあってしまう。たとえば (4.3) を (3.9) に代入すれば、

$$g^{\log}(r, \theta) = \frac{1}{\pi} \left[\sin \theta \cdot \left(\log r \cdot g_s(r) + \frac{\pi}{2} g_c(r) \right) + \cos \theta \cdot \left(\log r \cdot g_c(r) - \frac{\pi}{2} g_s(r) \right) \right] \quad (4.4)$$

となる。

非整数階微分しても混ざらないようにするためには、回転の行列表現を対角化すればよい。すなわち、

$$g(r) \equiv g_c(r) - i g_s(r) = \int_0^{2\pi} d\theta e^{-i\theta} g(r, \theta) \quad (4.5)$$

とおき、三角関数のオイラー表示式を使えば、(4.2) は

$$G(x) = \frac{1}{2} \int_0^\infty dr (g(r) e^{irx} + g^*(r) e^{-irx}) = \Re \left(\int_0^\infty dr g(r) e^{irx} \right) \quad (4.6)$$

となる (*は複素共役, \Re は実部) ⁸。(3.5) についても同様の考察を行えば、

$$\begin{aligned} D^\nu G(x) &= \frac{1}{2} \int_0^\infty dr r^\nu (g(r) e^{irx+i\nu(\pi/2)} + g^*(r) e^{-irx-i\nu(\pi/2)}) \\ &= \Re \left(\int_0^\infty dr r^\nu g(r) e^{irx+i\nu(\pi/2)} \right) \end{aligned} \quad (4.7)$$

となる。つまり、非整数階微分は指数フーリエ変換表示において、

$$D^\nu : g(r) \mapsto r^\nu g(r) e^{i\nu(\pi/2)} \quad (4.8)$$

という変換によって表現されることになる。ただし、指数フーリエ変換といっても、通常のように積分区間が $(-\infty, +\infty)$ ではなく $[0, +\infty)$ であって、 $r = 0$ のところの振る舞いが収束性のよいものでなくてはならない。

(4.7) を ν で微分して $\nu = 0$ とおけば、

$$\begin{aligned} (\log D)G(x) &= \frac{1}{2} \int_0^\infty dr \left[\left(\log r + \frac{i\pi}{2} \right) g(r) e^{irx} + \left(\log r - \frac{i\pi}{2} \right) g^*(r) e^{-irx} \right] \\ &= \Re \left(\int_0^\infty dr \text{Log}(ir) g(r) e^{irx} \right) \end{aligned} \quad (4.9)$$

⁸もし r が負の値をとるのを容認すれば、 $g^*(r) = g(-r)$ なので、 $g(r)$ は $G(x)$ の指数フーリエの逆変換で書ける。しかしこれはもちろん禁止。

を得る (Log は対数の主値) .

このように定義した非整数階微分が応用上役に立つかどうかは、これからの問題である.

誤解を招く弦振動の問題 (2)

世戸 憲治^{*1}

Misleading Problems in String Oscillations (2)

Kenji SETO*

1 はじめに

前回の「誤解を招く弦振動の問題」(「数学・物理通信」7巻4号)では、有限長の弦の中央部を持ち上げて離したとき、弦がどのように振動するかを扱った。ここでは、より一般に、弦の中央部以外の点を持ち上げてから離したときの弦の振動を扱うことにする。

初めに、つぎの問題を考えていただく。有限の長さを持つ弦に張力を与えて、両端を固定しておく。この弦の左端から $1/4$ の長さのところを持ち上げてから、静かに初速度なしに、手を離すと弦はどのように振動するだろうか。下の図1の(1)を初期状態、(2), (3), (4)をその途中経過の図として、弦は時間的に、

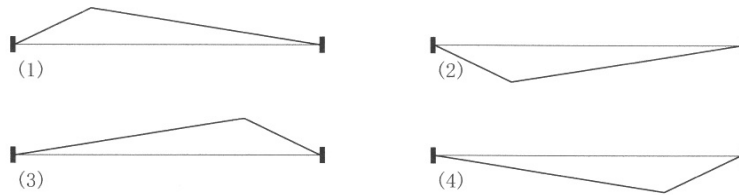


図 1

- A: (1) (2), (1) (2) の繰り返しで振動する。
B: (1) (2) (3) (4), (1) (2) (3) (4) の繰り返しで振動する。
C: (1) (2) (4) (3), (1) (2) (4) (3) の繰り返しで振動する。
D: (1) (4), (1) (4) の繰り返しで振動する。

この A, B, C, D のうちどれが正しい振動様式かという問題である。大学で物理学を修めた人でもこれには戸惑うかもしれないが、D の (1) (4), (1) (4) の繰り返しで振動するというのが正解である。

2 方程式を解いてみると

この問題を、波動方程式を解くことで考えてみよう。よく知られているように、弦振動の方程式は、座標 x 、時刻 t において、弦に対し垂直方向の変位を $U(x, t)$ としたとき、

$$\frac{\partial^2 U(x, t)}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 U(x, t)}{\partial x^2}, \quad c = \sqrt{T/\rho} \quad (2.1)$$

と書かれる。ここに、 c は波動伝播速度で、弦の線密度を ρ 、張力を T としたとき、この第2式で与えられる。ここでは、弦の左端を座標原点 O として、弦に沿って右向きに x 軸をとるものとする。弦の長さは、前回は $2l$

^{*1} 北海学園大学名誉教授

E-mail: seto@pony.ocn.ne.jp

としたが、今回は ℓ とする。したがて、 x は $[0, \ell]$ の範囲内にあるものとする。この横方向変位 $U(x, t)$ を、 x と t に関し変数分離形で解くことにし、いったん、

$$U(x, t) = X(x)P(t) \quad (2.2)$$

とおくことにする。

2.1 弦の両端を固定した場合

初めに、境界条件として、弦の両端を固定し、 x 依存部分 $X(x)$ が

$$X(0) = 0, \quad X(\ell) = 0 \quad (2.3)$$

という場合を考える。このとき、候補となり得る関数は、 k を自然数として、 $\sin(k\pi x/\ell)$ である。これを方程式に代入すると、時間依存部分 $P(t)$ は $\cos(k\pi ct/\ell)$ の形となる。このとき、sine の方は、初速度がゼロとなることから排除される。実際の変位 $U(x, t)$ の形は、これら関数の積の重ね合わせで表されることになり、

$$U(x, t) = \sum_{k=1}^{\infty} C_k \sin(k\pi x/\ell) \cos(k\pi ct/\ell) \quad (2.4)$$

となる。係数 C_k は弦の初期値の形から決められる。その前に、この式の第 k 項の振動周期を t_k 、また、その逆数である振動数を ν_k とすると、

$$t_k = \frac{2\ell}{kc}, \quad \nu_k = \frac{kc}{2\ell} \quad (2.5)$$

となる。特に、 $k=1$ の振動を基本振動と言い、そのときの、周期 t_1 、振動数 ν_1 は、

$$t_1 = 2\ell/c, \quad \nu_1 = c/(2\ell) \quad (2.6)$$

である。 k が 2 以上の振動を、一般に、倍振動と言うが、そのときの振動数は、

$$\nu_k = k\nu_1, \quad k = 2, 3, \dots \quad (2.7)$$

と基本振動数の整数倍となる。

つぎに、係数 C_k を決めよう。初めに、弦の座標 x_0 のところを距離 U_0 だけ持ち上げたときの弦の形を関数

$$F(x) = \begin{cases} \frac{U_0}{x_0}x, & 0 \leq x \leq x_0 \\ \frac{U_0}{\ell - x_0}(\ell - x), & x_0 \leq x \leq \ell \end{cases} \quad (2.8)$$

で定義しておこう。これが変位 U の初期値 $U(x, 0) = F(x)$ を与えるので、(2.4) 式から

$$F(x) = \sum_{k=1}^{\infty} C_k \sin(k\pi x/\ell) \quad (2.9)$$

でなければならない。両辺に $\sin(k'\pi x/\ell)$ を掛け x で積分し、sine 関数の直交性

$$\int_0^{\ell} \sin(k\pi x/\ell) \sin(k'\pi x/\ell) dx = \frac{\ell}{2} \delta_{k,k'} \quad (2.10)$$

を用いて、係数 C_k が、

$$C_k = \frac{2}{\ell} \int_0^\ell F(x) \sin(k\pi x/\ell) dx = \frac{2\ell^2 U_0}{\pi^2 x_0(\ell - x_0)} \frac{\sin(k\pi x_0/\ell)}{k^2} \quad (2.11)$$

と求められる。これを (2.4) 式に戻して、方程式の解は、

$$U(x, t) = \frac{2\ell^2 U_0}{\pi^2 x_0(\ell - x_0)} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin(k\pi x_0/\ell)}{k^2} \sin(k\pi x/\ell) \cos(k\pi ct/\ell) \quad (2.12)$$

となる。しかし、この式を見ても、実際に弦がどのような形で動いていくのかは想像もできない。ここで、三角関数の積和公式を用いて、

$$U(x, t) = \frac{\ell^2 U_0}{\pi^2 x_0(\ell - x_0)} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin(k\pi x_0/\ell)}{k^2} [\sin(k\pi(x - ct)/\ell) + \sin(k\pi(x + ct)/\ell)] \quad (2.13)$$

と変形すると、これは、右進行波と左進行波に分離したことになる。ここで、(2.11) 式の C_k を (2.9) 式に代入し、変数 x を $y = x \pm ct$ と置き換えると、

$$F(y) = \frac{2\ell^2 U_0}{\pi^2 x_0(\ell - x_0)} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin(k\pi x_0/\ell)}{k^2} \sin(k\pi y/\ell) \quad (2.14)$$

となるので、この式を利用すると、(2.13) 式の $U(x, t)$ は、

$$U(x, t) = \frac{1}{2} [F(x - ct) + F(x + ct)] \quad (2.15)$$

と書き直される。これは、初期値である (2.8) 式と比べると、初期変位の半分が右進行波となり、あとの半分が左進行波となることを示す。もっとも、この式は、ここまで述べた Fourier 級数を用いた解法を使わなくても、波動方程式の一般解から直接導かれるものである。ただし、ここで一つ注意が必要である。(2.8) 式で定義される元の $F(x)$ は x の範囲 $[0, \ell]$ で定義されたものなので、(2.15) 式のように変数を $x \pm ct$ としたときは t の値によっては元の定義域を逸脱してしまう。これを解決するには、(2.14) 式の右辺は y について奇関数であり、周期 2ℓ の周期関数であることを利用して、左辺の関数 $F(y)$ の定義域を拡張してしまう。すなわち、 $-\ell \leq y \leq 0$ の y に対し、

$$F(y) = -F(-y) \quad (2.16)$$

として、まず、定義域を $[-\ell, \ell]$ とし、さらに、この関数に周期性を持たせるべく任意整数を n として、 $2n\ell - \ell \leq y \leq 2n\ell + \ell$ の y に対し、

$$F(y) = F(y - 2n\ell) \quad (2.17)$$

が成り立つものとする。これですべての領域にわたる y に対し、(2.15) 式が使えるようになる。あるいは同じことであるが、奇関数 $F(y)$ の定義域を $[-\ell, \ell]$ のままにしておき、変数の方を強制的に、

$$y \rightarrow y - 2\ell \left[\frac{y + \ell}{2\ell} \right] \stackrel{\text{def}}{=} \langle y \rangle \quad (2.18)$$

で置き換える。ここに、 $\langle \rangle$ は Gauss 記号である。この定義で (2.15) 式は、

$$U(x, t) = \frac{1}{2} [F(\langle x - ct \rangle) + F(\langle x + ct \rangle)] \quad (2.19)$$

と書き直される。

この (2.19) 式にしたがって、変位 $U(x, t)$ を数値的に求めたものを図 2, 図 3 に示す. これらの図では, 水平右方向に座標 x 軸, 斜め上方向に時間 t 軸, 上方向に変位 U 軸をとり立体的に示したものである. また, 図 2 は $x_0 = \ell/2$ の場合, 図 3 は $x_0 = \ell/4$ の場合を描いた. 図 2 の方は, 時間的にどのように変化していくかが分かりやすいが, 図 3 の方は少しその変化が分かりにくい. しかし, 図 2 と図 3 をよく比較してみると, 変化の様子が理解される.

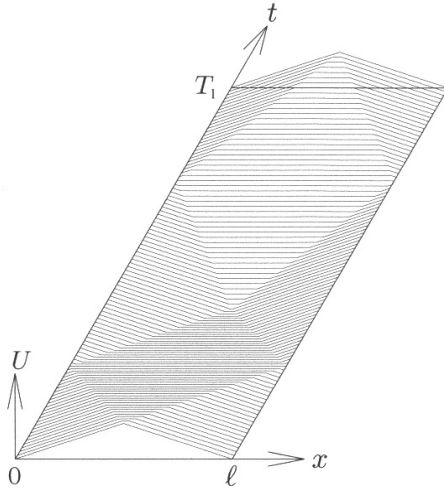


図 2 $x_0 = \ell/2$ の場合

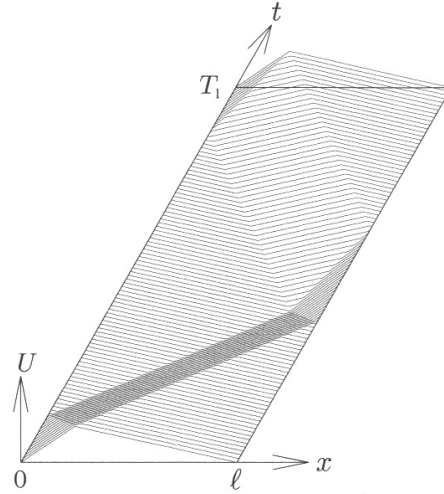


図 3 $x_0 = \ell/4$ の場合

2.2 弦の左端を自由端とした場合

ここでは, 境界条件として, 弦の左端 $x = 0$ を自由端, 右端 $x = \ell$ を固定端とした場合を考える. このときの条件式は, x 依存部分 $X(x)$ が

$$\left. \frac{dX(x)}{dx} \right|_{x=0} = 0, \quad X(\ell) = 0 \quad (2.20)$$

を満たすことである *2. このとき, $X(x)$ の候補となる関数は, k を非負整数として $\cos((k + \frac{1}{2})\pi x/\ell)$ である. これを方程式 (2.1) に代入すると, 時間依存部分 $P(t)$ は $\cos((k + \frac{1}{2})\pi ct/\ell)$ となり, 変位 $U(x, t)$ は, これら関数の積の重ね合わせ,

$$U(x, t) = \sum_{k=0}^{\infty} D_k \cos((k + \frac{1}{2})\pi x/\ell) \cos((k + \frac{1}{2})\pi ct/\ell) \quad (2.21)$$

で表せる. このときの第 k 項の周期 t_k , 振動数 ν_k は

$$t_k = \frac{2\ell}{(k + \frac{1}{2})c}, \quad \nu_k = \frac{(k + \frac{1}{2})c}{2\ell} \quad (2.22)$$

となり, $k = 0$ の基本周期 t_0 , 基本振動数 ν_0 は

$$t_0 = 4\ell/c, \quad \nu_0 = c/(4\ell) \quad (2.23)$$

*2 弦の一端を自由端にする物理的方法としては, 弦の長さ方向に対し垂直な方向に棒を立てておき, この棒に質量が無視できるリングを通し, 弦の端をこのリングに繋ぐ. ただし, このリングは棒に沿って摩擦なしに動き得るものとする. これで弦には張力を与えることができるが, その垂直成分はゼロとなる. この結果として変位の微係数はこの点でゼロとなる.

となる。また、 k が 1 以上の倍振動数は、

$$\nu_1 = 3\nu_0, \quad \nu_2 = 5\nu_0, \quad \nu_3 = 7\nu_0, \quad \dots \quad (2.24)$$

と基本振動数の奇数倍となる。

(2.21) 式における係数 D_k は、弦の初期値で決まる。ここでは、 $x = x_0$ の点を U_0 だけ持ち上げることにし、初期値 $U(x, 0)$ を、

$$G(x) = \begin{cases} U_0, & 0 \leq x \leq x_0 \\ \frac{U_0}{(\ell - x_0)}(\ell - x), & x_0 \leq x \leq \ell \end{cases} \quad (2.25)$$

という関数で定義しておく。以下、方法としては前節と同じであるが、式の形は変わってくるので繰り返しておく。これを (2.21) 式に適用して、

$$G(x) = \sum_{k=0}^{\infty} D_k \cos\left(\left(k + \frac{1}{2}\right)\pi x / \ell\right) \quad (2.26)$$

となる。両辺に $\cos\left(\left(k' + \frac{1}{2}\right)\pi x / \ell\right)$ を掛けてから x で積分し、cosine の直交式

$$\int_0^{\ell} \cos\left(\left(k + \frac{1}{2}\right)\pi x / \ell\right) \cos\left(\left(k' + \frac{1}{2}\right)\pi x / \ell\right) dx = \frac{\ell}{2} \delta_{k,k'} \quad (2.27)$$

を用いて、係数 D_k が、

$$D_k = \frac{2}{\ell} \int_0^{\ell} G(x) \cos\left(\left(k + \frac{1}{2}\right)\pi x / \ell\right) dx = \frac{2\ell U_0}{\pi^2(\ell - x_0)} \frac{\cos\left(\left(k + \frac{1}{2}\right)\pi x_0 / \ell\right)}{\left(k + \frac{1}{2}\right)^2} \quad (2.28)$$

と求められる。これを (2.21) 式に代入して、変位 $U(x, t)$ は

$$U(x, t) = \frac{2\ell U_0}{\pi^2(\ell - x_0)} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\cos\left(\left(k + \frac{1}{2}\right)\pi x_0 / \ell\right)}{\left(k + \frac{1}{2}\right)^2} \cos\left(\left(k + \frac{1}{2}\right)\pi x / \ell\right) \cos\left(\left(k + \frac{1}{2}\right)\pi c t / \ell\right) \quad (2.29)$$

となる。ここで前と同じく、三角関数の積和公式を用いると、

$$U(x, t) = \frac{\ell U_0}{\pi^2(\ell - x_0)} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\cos\left(\left(k + \frac{1}{2}\right)\pi x_0 / \ell\right)}{\left(k + \frac{1}{2}\right)^2} \left[\cos\left(\left(k + \frac{1}{2}\right)\pi(x - ct) / \ell\right) + \cos\left(\left(k + \frac{1}{2}\right)\pi(x + ct) / \ell\right) \right] \quad (2.30)$$

と書き換えられ、これは右進行波と左進行波に分解された形となる。さらに、(2.28) 式の D_k を (2.26) 式に代入し、変数を x から $y = x \pm ct$ と置き換えると、

$$G(y) = \frac{2\ell U_0}{\pi^2(\ell - x_0)} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\cos\left(\left(k + \frac{1}{2}\right)\pi x_0 / \ell\right)}{\left(k + \frac{1}{2}\right)^2} \cos\left(\left(k + \frac{1}{2}\right)\pi y / \ell\right) \quad (2.31)$$

となるので、(2.30) 式はさらに

$$U(x, t) = \frac{1}{2} [G(x - ct) + G(x + ct)] \quad (2.32)$$

と置き換えられる。ここで前と同じように関数 G の定義域を拡張するが、こんど場合は、(2.31) 式の右辺が、 $y = \ell$ の点を対称点として反対称になっていることに着目し、 $\ell \leq y \leq 2\ell$ の y に対し、

$$G(y) = -G(2\ell - y) \quad (2.33)$$

として、関数 G の定義域を $[0, 2\ell]$ に拡張する．その上で、(2.31) 式右辺が偶関数であることを用いて、 $-2\ell \leq y \leq 0$ の y に対し、

$$G(y) = G(-y) \quad (2.34)$$

として、 G の定義域を $[-2\ell, 2\ell]$ まで広げる．最後に、(2.31) 式右辺が周期 4ℓ の周期関数であることから、任意整数を n として、 $4n\ell - 2\ell \leq y \leq 4n\ell + 2\ell$ の y に対し、

$$G(y) = G(y - 4n\ell) \quad (2.35)$$

として、 y の全領域に定義域を拡張する．これで、(2.32) 式がすべての時間 t に対し使えるようになる．

あるいは、前の (2.18) 式のところでやったように、関数 G の定義域を $[-2\ell, 2\ell]$ のままにしておき、変数の方を Gauss 記号 $\llbracket \]$ を用いて、

$$y \rightarrow y - 4\ell \left\lceil \frac{y + 2\ell}{4\ell} \right\rceil \stackrel{\text{def}}{=} \llbracket y \rrbracket \quad (2.36)$$

で置き換える．このとき、(2.32) 式は

$$U(x, t) = \frac{1}{2} [G(\llbracket x - ct \rrbracket) + G(\llbracket x + ct \rrbracket)] \quad (2.37)$$

となって、これはすべての時間 t に対し使える式となる．この式に基づいて数値的に求めたものをつぎの図 4、図 5 に示す．これらの図は、それぞれ、 $x_0 = \ell/2$ の場合、 $x_0 = \ell/4$ の場合に対応する．多少、モアレが出ていて見にくいところもあるので、詳しく見るには拡大表示をした方がよいと思われる．

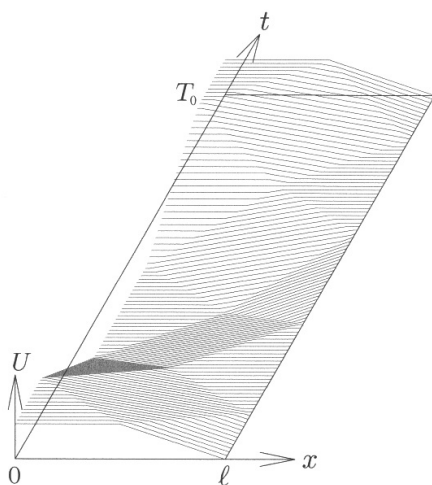


図 4 $x_0 = \ell/2$ の場合

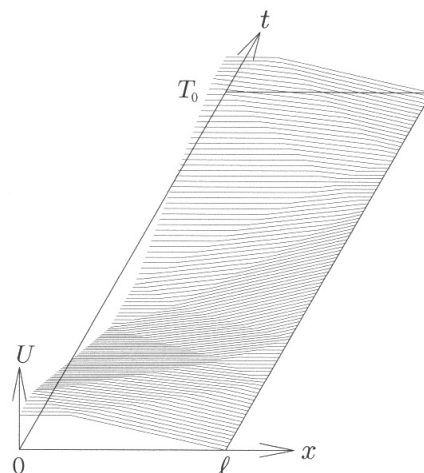


図 5 $x_0 = \ell/4$ の場合

3 おわりに

弦振動の問題が Fourier 解析で解けることは分かりきったことである．しかし、教科書で初期値問題までをきちんと扱ったものはほとんど見当たらないので、ここではそれを敢えてやってみた．

以下、余計なことではあるが、(2.7) (2.24) 式を見ているうちに思い出してしまったことを書いておく．私は、退職を機に、サクスを習いだした．それまで、楽譜などというものはほとんど勉強したことはないので、まっ

たく新しい気持ちで、楽譜の読み方から勉強してみた。私のサックスの先生は、サックスとクラリネットの両方を教えていて、私がサックスを吹いているときに、クラリネットと一緒に合わせてくれる。実は、サックスとクラリネットでは同じ楽譜で吹いてしまうと出てくる音の高さ(振動数)はまったく異なってしまう。そこで、先生の方は頭の中で楽譜を移調しながら吹かなくてはならない。これは非常に難しいことであり、さすがプロといつも感心してしまう。

このサックスとクラリネットであるが、吹き口にリードと呼ばれる竹の「へら」のようなものを付け、それを振動させることで、管の中の空気を共鳴させて音をだす。両方とも、いわゆるリード楽器であるが、その発音機構はまったく異なるものである。サックスもクラリネットも吹き口に付いているリードは振動しているときもほとんどの時間は閉じた状態にあり、その意味で、吹き口は閉端(弦で言う固定端)になっている。しかし、これら2つの楽器は、サックスが吹き口から管の反対側に向かって円錐状に広がるのに対し、クラリネットの方はほぼ直線状の管であるために違いが生じる。すなわち、サックスでは、管の開いた方は空気振動の節になり、管は開いているのにもかかわらず効果としては閉端と同じになる。一方、クラリネットでは、管の反対側は空気振動の腹になっているので、文字どおり開端(弦で言う自由端)になる。まとめると、管の中の空気振動に対し、サックスは閉端、閉端になり、クラリネットは閉端、開端となる^{*3}。

一般に音楽では、ある振動数を持つ音とその2倍の振動数を持つ音の間隔を1オクターブという。サックスにはオクターブ・キーというのがあって、例えば、[ド]の音を出しているときにオクターブ・キーを押すと元の2倍の振動数を持つ1オクターブ高い[ド]の音になる。その意味で、このときの倍音は(2.7)式にしたがっている。ところが、クラリネットの場合は、閉端と開端になっているのでそうはいかない。クラリネットにはオクターブ・キーはなく、そのかわりレジスター・キーなるものがあるを押すことで倍音になるが、このときの倍音は(2.24)式で示す振動数が3倍になった音がでる。例えば、[ド]の音を出しているときにレジスター・キーを押すと振動数が3倍の1オクターブ高い[ソ]の音になる^{*4}。

そのほかにも、サックスとクラリネットの違いとして、サックスの方は基本振動数が、(2.6)式で示すように $c/(2l)$ となるが、クラリネットの方は(2.23)式で示す $c/(4l)$ となる。これはもし、同じ長さの管長を持つサックスとクラリネットでは、クラリネットの方が、サックスより2倍も低い音がでるということである。実際、ソプラノ・サックスとクラリネットはほとんど同じ長さを持つが、クラリネットの方が、2倍低い音がでる。

ついでながらももう少し余計なことを書かせてもらう。音楽における音階、いわゆる[ドレミファソラシド]は、これまで、一様に振動数が上がっていくものと勝手に思っていたが、そうではなかった。[ド]の振動数を ν として、これを[ド] = ν と書くことにすると、各音の振動数は、現在使われている平均律において、

$$\begin{aligned}
 [\text{ド}] &= \nu, & [\text{レ}] &= 2^{2/12}\nu, & [\text{ミ}] &= 2^{4/12}\nu, & [\text{ファ}] &= 2^{5/12}\nu, \\
 & & [\text{ソ}] &= 2^{7/12}\nu, & [\text{ラ}] &= 2^{9/12}\nu, & [\text{シ}] &= 2^{11/12}\nu, & [\text{ド}] &= 2^{12/12}\nu = 2\nu \quad (3.1)
 \end{aligned}$$

となっている。[ドレミ]までは、等比 $2^{2/12}$ で等比級数的に上がるが、つぎの[ミ]から[ファ]は $2^{1/12}$ しか上がらない。また、つぎの[ファソラシ]までは $2^{2/12}$ づつ上がり、つぎの[シ]から[ド]は $2^{1/12}$ しか上がらない。このように比で $2^{2/12}$ 上がることを1(全)音上がるといい、 $2^{1/12}$ 上がることを半音上がるという^{*5}。このよう

^{*3} サックスは閉端、開端であるが、これは他のトランペットやトロンボーンなどの開端、開端と倍音の出方が同じになるので、「開管楽器」に分類される。それに対し、クラリネットは「閉管楽器」といわれる。西洋音楽で使われる管楽器のうち、閉管楽器に分類されるのはクラリネットだけである。

^{*4} ここで述べたクラリネットの3倍音というのは、 $3 = 2^{\log 3 / \log 2}$ であるから、この指数 $\log 3 / \log 2 = 1.5849\dots$ の値は1オクターブ上の[ソ]の音に付く2の指数 $1 + 7/12 = 1.5833\dots$ にほぼ等しいことによる。(3.1)式参照

^{*5} $2^{1/12} = 1.059463\dots$, $2^{2/12} = 1.122462\dots$

に音階には1音上がるところと半音上がるところがある。しかし、それにもかかわらず、楽譜に表すときは、あたかも一様に上がっていくように書いてしまう。初めに楽譜を勉強したときは何と不合理な書き方だろうと思ひ、いったい誰がこんな不便な楽譜を書くように仕向けたのだろうかと考えてしまった。これにはそれなりの歴史的理由があるのかもしれないが、こんなことをするからハ長調だのト長調だの12種類もの調ができてしまう。

これで最も困るのは、一般に管楽器の場合、同じ[D]の音でもその楽器によって音の高さは異なり、もちろんピアノの[D]の音ともその高さは合っていない。それ故、サクスの演奏をピアノで伴奏してもらうときは、サクスカピアノかどちらかが、移調した楽譜を使って音の高さを合わせる必要がでてくる。もちろん、私の場合は、先生の方が頭の中で楽譜を移調して、ピアノの伴奏をしてくれる。もう一つ、移調が必要になるのは、ピアノは7オクターブもの音域を持ちどんな楽譜にも対応しているが、それに比べると、サクスは標準的には2オクターブ半の音域しか持っていない*6。そのため、楽譜によっては、そのままでは演奏不可能になってしまうので、楽譜全体、あるいは、部分的に移調してしまうことが多い。しかし、この移調が途中で半音が存在するため単なる平行移動では済まなくなり、半音上げたり下げたりするためのシャープ#やフラットbがでてきてそれがどこにどう付くのか悩むことになってしまう。もっとも、プロの音楽家にとっては、これが慣れっこになっていて不便とは感じていないのかもしれないが、素人にとっては戸惑いの種となる。初めのうちは、すべての半音を取り入れた12音階をそのまま表すまったく新しい楽譜を自分で作ってやろうかなとも考えた*7。しかし、現行方式の楽譜を何年か見ているうちに、頑固な私も、少しずつこの移調という作業に慣れてきつつある。いつの間にか、話が逸れてしまったが、物理屋から見た音楽ということで書いてみた。

[謝辞]

今回も、京都大学名誉教授の中西襄先生にこの原稿を見ていただき、たくさんのコメントをいただきました。先生に心から感謝いたします。

*6 プロの上手な人はフラジオ奏法というのを使い4オクターブくらい出すことができるが、私のような素人には無理である。

*7 後になって、この考えに基づいた記譜法「クロマティック・ノーテーション」(ムトウ譜, 3線譜)というのがすでにあることを知った。

n 次元の球の体積 4

矢野 忠¹

The Volume of n -dimensional Hypersphere 4

Tadashi YANO²

1 はじめに

これは n 次元の球の体積について述べるシリーズの第 4 報である。基本的に [1] にもとづいて書かれている。ただ、[1] は簡潔に書かれているので、説明や計算を補ってわかりやすいように書き直している。

このエッセイの球の体積を求める要点は n 次元の球の断面が $(n-1)$ 次元の球になっていることであり、2 節の例を読んでいただければ、この球の体積の求め方の要点を理解して頂けるであろう。

2 節では 3 次元の球の断面から得られる円柱を積み上げて 3 次元の球の体積を求める方法を示す。3 節ではこの方法を n 次元の球の体積を求めるのに適用する。4 節は新関・岩崎の球の体積の式を書き出しておく [2]。5 節はまとめである。付録 1 は (3.14) の導出であり、付録 2 は (3.15),(3.16) の導出である。

2 3次元の球の体積

この節では [3] にしたがって 3 次元の球の体積の求め方を述べておこう。これは [4][5][6] では述べなかった方法である。

半径 a の 3 次元の球の体積は $\frac{4\pi}{3}a^3$ であることは前にも述べた。この原点を中心とした 3 次元の球の方程式は

$$x^2 + y^2 + z^2 = a^2 \quad (2.1)$$

である。いま z の値を一定として、 $z = u$ 、($u = \text{一定}$) としよう。そうすると $z = u$ の断面は、 xy 平面に平行な面で

$$x^2 + y^2 = a^2 - u^2 \quad (2.2)$$

となる。これは $z = u$ 面での円であるが、その半径は $\sqrt{a^2 - u^2}$ である。 z が $z = u$ から $z = u + du$ と変わると

$$x^2 + y^2 = a^2 - (u + du)^2 \quad (2.3)$$

とその円の半径が $\sqrt{a^2 - (u + du)^2}$ と変化する。もちろん、 $du > 0$ のときには円の半径が $\sqrt{a^2 - u^2}$ よりも減少しているし、 $du < 0$ のときには増加する。3 次元の球の体積 V_3 を半径が $\sqrt{a^2 - u^2}$ で厚さが du の円柱の積み重ねとして考える。このとき、球の体積 V_3 は

$$V_3 = \int_{-a}^a \pi(a^2 - u^2) du \quad (2.4)$$

と表される。被積分関数 $a^2 - u^2$ は u についての偶関数であるから

$$\begin{aligned} V_3 &= 2\pi \int_0^a (a^2 - u^2) du \\ &= \frac{4\pi}{3} a^3 \end{aligned} \quad (2.5)$$

と求められる。

¹元愛媛大学工学部

²yanotad@earth.ocn.ne.jp

3 n 次元の球の体積

2節で求めた、3次元の球の体積の求め方をヒントにして同じような方法で n 次元の球の体積を求めてみよう。
原点 O を中心とした半径 a の n 次元の球の方程式は

$$x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2 = a^2 \quad (3.1)$$

と表される。球の体積 V_n は

$$V_n = \int_D dx_1 dx_2 \cdots dx_n, \quad D: x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2 \leq a^2 \quad (3.2)$$

で表される。

もし、相似比 k で $x'_i = kx_i$ と相似変換すれば、球の体積は

$$\begin{aligned} V'_n &= \int_{D'} dx'_1 dx'_2 \cdots dx'_n, \quad D': x_1'^2 + x_2'^2 + \cdots + x_n'^2 \leq k^2 a^2 \\ &= k^n \int_D dx_1 dx_2 \cdots dx_n \end{aligned} \quad (3.3)$$

と V_n の k^n 倍となる。また球の半径は ka となる。

したがって、求める n 次元の球の体積 V_n は

$$V_n = C_n a^n \quad (3.4)$$

と表される。 c_n は次元 n が決まれば、一定であるが、次元 n が変われば、その次元に応じて変わる。

球の方程式 (3.1) で、いま x_1 を一定の値にとれば、このときこれは $(n-1)$ 次元の球の方程式となる。

$$x_2^2 + \cdots + x_n^2 = a^2 - x_1^2 \quad (3.5)$$

このとき、その半径の2乗は $a^2 - x_1^2$ となる。すなわち、(3.4) によって $(n-1)$ 次元の体積は

$$C_{n-1} (a^2 - x_1^2)^{\frac{n-1}{2}} \quad (3.6)$$

である。また、平面 x_1 と $x_1 + dx_1$ との間にある、 n 次元の球の体積は

$$C_{n-1} (a^2 - x_1^2)^{\frac{n-1}{2}} dx_1 \quad (3.7)$$

となる。

これから V_n は

$$\begin{aligned} V_n &= C_n a^n \\ &= C_{n-1} \int_{-a}^a (a^2 - x_1^2)^{\frac{n-1}{2}} dx_1 \end{aligned} \quad (3.8)$$

あとはひたすら (3.8) の定積分をすればよい。

$x_1 = a \cos \phi$ とおけば

$$\begin{aligned} (a^2 - x_1^2)^{\frac{n-1}{2}} &= a^{n-1} \sin^{n-1} \phi, \\ dx_1 &= -a \sin \phi d\phi \end{aligned}$$

であるから

$$\begin{aligned}
V_n &= C_{n-1} a^n \int_{\pi}^0 (-\sin^n \phi) d\phi \\
&= C_{n-1} a^n \int_0^{\pi} \sin^n \phi d\phi \\
&= 2C_{n-1} a^n \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n \phi d\phi
\end{aligned} \tag{3.9}$$

が得られる. したがって, (3.8) と (3.9) から

$$C_n = 2C_{n-1} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n \phi d\phi \tag{3.10}$$

が得られる.

(3.10) で $n \rightarrow n-1$ とおきかえれば,

$$C_{n-1} = 2C_{n-2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{n-1} \phi d\phi \tag{3.11}$$

を得る.

ところで

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n \phi d\phi = \frac{(n-1)(n-3)\cdots 1}{n(n-2)\cdots 2} \cdot \frac{\pi}{2}, \quad (n = \text{偶数}) \tag{3.12}$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n \phi d\phi = \frac{(n-1)(n-3)\cdots 2}{n(n-2)\cdots 3}, \quad (n = \text{奇数}) \tag{3.13}$$

が成り立つ. これを用いれば (3.10) と (3.11) から

$$C_n = C_{n-2} \frac{2\pi}{n} \tag{3.14}$$

が成り立つ³.

2次元の球 (すなわち平面上の円) と 3次元の球の式から $C_2 = \pi, C_3 = \frac{4}{3}\pi$ であることがわかっているから, (3.14) を用いて

$$C_n = \frac{(2\pi)^{\frac{n}{2}}}{n(n-2)\cdots 2}, \quad (n = \text{偶数}) \tag{3.15}$$

$$C_n = \frac{2^{\frac{n+1}{2}} \pi^{\frac{n-1}{2}}}{n(n-2)\cdots 1}, \quad (n = \text{奇数}) \tag{3.16}$$

が求められる⁴.

4 新関・岩崎の方法

この第4節では新関・岩崎の球の体積の式を述べて, この球の体積を求めるシリーズのエッセイの終りとしてたい. 詳しい説明はすでに [2] に出ているので, 式だけを書き出しておく.

$i = 1, 2, \dots, n-1$ に対し

$$\rho_i := \sqrt{a^2 - x_1^2 - x_2^2 - \cdots - x_i^2} : x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2 \leq a^2, \tag{4.1}$$

$$\delta_i := \sqrt{1 - y_1^2 - y_2^2 - \cdots - y_i^2} : y_1^2 + y_2^2 + \cdots + y_n^2 \leq 1 \tag{4.2}$$

³この (3.14) の導出は付録1で行う.

⁴(3.15),(3.16) の導出もそれほど難しいものではないが, 付録2に述べる.

と定義する。ただし、 $x_i = ay_i$ である。このとき半径 a の n 次元の球の体積は

$$V_n(a) := \int_{-a}^a dx_1 \int_{-\rho_1}^{\rho_1} dx_2 \cdots \int_{-\rho_{n-1}}^{\rho_{n-1}} dx_n \quad (4.3)$$

で定義される。

または

$$V_n(a) := \int_{-1}^1 a dy_1 \int_{-\delta_1}^{\delta_1} a dy_2 \cdots \int_{-\delta_{n-1}}^{\delta_{n-1}} a dy_n = a^n V_n(1) \quad (4.4)$$

と表される。ここで

$$V_n(1) := \int_{-1}^1 dy_1 \int_{-\delta_1}^{\delta_1} dy_2 \cdots \int_{-\delta_{n-1}}^{\delta_{n-1}} dy_n \quad (4.5)$$

と定義される。

このとき

$$V_n(1) := V_{n-1}(1) S_n \quad (4.6)$$

の関係が成り立つ。

ここで、 S_n は

$$S_n := \int_0^\pi \sin^n x dx \quad (4.7)$$

で定義される。

この $V_n(1)$ は [4] で求めた C_n である。[4] ではこの C_n に n 次元の単位球の体積という意味を与えてはなかった。

最後に新関・岩崎論文では $V_n(1)$ の二つの数学的な表現を与えている。それはガンマ関数を用いた表現とガウス記号を用いた表現である。証明はすべて [2] にあるので、ここでは結果だけを与えておく⁵。

$$V_n(1) = \frac{\pi^{\frac{n}{2}}}{\Gamma(\frac{n}{2} + 1)} \quad (4.8)$$

$$V_n(1) = \frac{2^{[\frac{n+1}{2}]} \pi^{[\frac{n}{2}]}}{n!!} \quad (4.9)$$

5 おわりに

長々と続いた n 次元の球の体積を求めるシリーズのエッセイもこれで終わりである。他にもここで紹介しなかった方法もあるのかもしれないが、ほぼ普通に知られている方法は紹介をした。最近ではインターネットでもいろいろな方法を紹介している。それらをごく一部を除いて引用や紹介することができなかった。お詫びを申し上げたい。

6 付録 1 (3.14) の導出

(3.10) と (3.11) から

$$C_n = 2 \cdot 2C_{n-2} \left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{n-1} \phi d\phi \right) \left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n \phi d\phi \right) \quad (6.1)$$

⁵[2] から記号をすこしだけ変更している。すなわち、新関・岩崎の V^n はすべてこのエッセイでは V_n と下付きの添字に変えられている。また、球の半径を r から a におきかえている。

1. n が偶数のとき

(3.12) から

$$\begin{aligned}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n \phi d\phi &= \frac{(n-1)(n-3)\cdots 1}{n(n-2)\cdots 2} \cdot \frac{\pi}{2} \\ &= \frac{B}{A} \cdot \frac{\pi}{2}\end{aligned}\tag{6.2}$$

ここで

$$A = n(n-2)\cdots 2 = nD,\tag{6.3}$$

$$B = (n-1)(n-3)\cdots 1 = C\tag{6.4}$$

である. ここで, C, D は (6.6), (6.7) で定義される.

このとき $(n-1)$ は奇数で, (3.13) から

$$\begin{aligned}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{n-1} \phi d\phi &= \frac{n(n-2)\cdots 2}{(n-1)(n-3)\cdots 1} \\ &= \frac{D}{C}\end{aligned}\tag{6.5}$$

ここで

$$C = (n-1)(n-3)\cdots 1,\tag{6.6}$$

$$D = (n-2)\cdots 2\tag{6.7}$$

である.

したがって, (6.1) から

$$C_n = 2 \cdot 2C_{n-2} \cdot \frac{D}{C} \cdot \frac{B}{A} \cdot \frac{\pi}{2} = \frac{2\pi}{n} C_{n-2}\tag{3.14}$$

が求められる. ここで (6.3), (6.4) が用いられた.

2. n が奇数のとき

(3.13) から

$$\begin{aligned}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n \phi d\phi &= \frac{(n-1)(n-3)\cdots 2}{n(n-2)\cdots 3} \\ &= \frac{B}{A}\end{aligned}\tag{6.8}$$

ここで

$$A = n(n-2)\cdots 3 = nD,\tag{6.9}$$

$$B = (n-1)(n-3)\cdots 2 = C\tag{6.10}$$

である. ここで, C, D は (6.12), (6.13) で定義される.

このとき $(n-1)$ は偶数で, (3.12) から

$$\begin{aligned}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{n-1} \phi d\phi &= \frac{(n-2)\cdots 3}{(n-1)(n-3)\cdots 2} \cdot \frac{\pi}{2} \\ &= \frac{D}{C} \cdot \frac{\pi}{2}\end{aligned}\tag{6.11}$$

ここで

$$C = (n-1)(n-3)\cdots 2, \quad (6.12)$$

$$D = (n-2)\cdots 3 \quad (6.13)$$

である.

したがって, (6.1) から

$$C_n = 2 \cdot 2C_{n-2} \cdot \frac{D}{C} \cdot \frac{\pi}{2} \cdot \frac{B}{A} = \frac{2\pi}{n} C_{n-2} \quad (3.14)$$

が求められる. ここでも (6.9),(6.10) が用いられた.

したがって n が偶数のときにも奇数のときにも (3.14) は正しく成り立つ.

7 付録 2 (3.15),(3.16) の導出

1. n が偶数のとき

(3.14) から, $C_2 = \pi$ であることを用いれば

$$\begin{aligned} C_n &= C_2(2\pi)^{\frac{n-2}{2}} \frac{1}{n(n-2)(n-4)\cdots 4} \\ &= (2\pi)^{\frac{n}{2}} \frac{1}{n(n-2)(n-4)\cdots 4 \cdot 2} \end{aligned} \quad (3.15)$$

2. n が奇数のとき

(3.14) から, $C_3 = \frac{4\pi}{3}$ であることを用いれば

$$\begin{aligned} C_n &= C_3(2\pi)^{\frac{(n-2)-1}{2}} \frac{1}{n(n-2)(n-4)\cdots 7 \cdot 5} \\ &= 2(2\pi)^{\frac{n-1}{2}} \frac{1}{n(n-2)(n-4)\cdots 7 \cdot 5 \cdot 3} \\ &= 2^{\frac{(n+1)}{2}} \pi^{\frac{n-1}{2}} \frac{1}{n(n-2)(n-4)\cdots 5 \cdot 3 \cdot 1} \end{aligned} \quad (3.16)$$

(72 周年の長崎原爆の記念日に, 2017.8.9)

参考文献

- [1] スミルノフ, 『高等数学教程』 II 卷 [第一分冊] (共立出版, 1958) 290-291
- [2] 新関章三, 岩崎正春, 多次元単位球の体積計算法, 『数学・物理通信』, 1 巻 9 号 (2011.9) 13-17
- [3] 上野孝司, N 次元超球の体積はヤコビアン, 曲面積は平行四辺形,
[hooktail.sub.jp//contributions/sum2.pdf](http://hooktail.sub.jp/contributions/sum2.pdf)
- [4] 矢野 忠, n 次元の球の体積 1, 『数学・物理通信』, 7 巻 3 号 (2017.6) 22-29
- [5] 矢野 忠, n 次元の球の体積 2, 『数学・物理通信』, 7 巻 4 号 (2017.6) 12-19
- [6] 矢野 忠, n 次元の球の体積 3, 『数学・物理通信』, 7 巻 5 号 (2017.6) 7-21

読者の声

Mails from Readers

1 浅田 明さんから

date: 2017.6.19

矢野様

数学・物理通信 7 巻 5 号を受け取りました。中西先生や矢野様のご活動には敬服します。

球面の体積については以前ヒルベルト空間 H の「球面」について H がコンパクト空間 X の上の L^2 などのとき X のラプラシアンなどの楕円型作用素 D を指定して D の固有値によるゼータ正則化を使って正則化体積を計算したことがあります。

1. 「スケーリング変換のヤコビアンの正則化」, 数理研講究録 1408 「力学系と微分幾何学」(2004) 20-39
2. Regularized volume of the sphere of a Hilbert space with the determinant bundle, DGA 2004 eds. Kowlski, et al. Prague 2005, 397-410.

D が指定されればそれから H の正則化次元 (正の実数) が定義され「球面」の体積はその次元の球面の体積 (整数でないときは整数のときの公式を整数でない場合に適用した形) になります。この先の応用は考えないままですが、矢野さんの寄稿をよみあらためて刺激されました。

とりあえず受け取りとお礼まで。 浅田 明 (信州大学名誉教授)

2 青山 泰雄さんから

date: 2017.6.18

矢野忠様

青山です。お久しぶりです。

特に用というわけではないのですが、ついこの間、「数学・物理通信」の 7 巻 1 号 (2017 年 3 月) を見ていたら、中西先生の「超弦理論はなぜつぶれたのか」という論文が載っていて、ほとんど理解はできなかったのですが、非常に興味深かったのでメールをさせていただきました。

というのは、2015 年 4 月に放送された NHK の E テレで「ニューヨーク白熱教室」という番組でニューヨーク州立大の Michio Kaku 氏の「最先端物理学が語る驚異の未来・アインシュタインの夢」という講義を見たのですが、超弦理論は現在の物理学の最先端の理論ということで超弦理論に興味を持ったのです。もちろんすぐには理解できるわけもないのですが、Michio Kaku 氏の「Introduction to superstrings and M-theory」をインターネットでダウンロードして、いつか読もうと思っていたのです。ところが、中西先生の「超弦理論はつぶれた」というお話で、私は無駄なことをやろうとしていたという次第です。

また、矢野様の四元数の連載も興味深く読ませていただいています。私は学生時代にはほとんど四元数について勉強したことはなかったのですが、戸山高校 (元東京府立四中) の大先輩である志村五郎先生が『数学をいかに使うか』(ちくま学芸文庫) で四元数の重要性を力説されているので、四元数をきちんと勉強しようと思っていたからです。

で、やはり原典からと思って Hamilton の “Lectures on quaternions” (1853) をダウンロードしたら、序文だけで 60 ページ、目次が 66 ページもあるという、とんでもない本でびっくりしました。ただ、四元数で宇宙全体を支配しようという Hamilton の壮大な情熱を感じることができました。これは今はじっくり読んでいる時間は

ないので、いつかひまになったら読むことにして、もっと新しい本、例えば、“Numbers” (Edited by Ewing) Springer 1991 中の Koecher, Remmert による Hamilton’s Quaternions あたりから読んでいこうかなと思っています。

貴重な情報を「数学・物理通信」から得ることができまして、ありがとうございます。これからもよろしく願います。では、失礼します。 青山 泰雄 (弁理士)

3 編集者から

date: 2017.8.31

青山さんから四元数の手ごろな文献というので、“Numbers” (Edited by Ewing) Springer 1991 の Koecher, Remmert による Hamilton’s Quaternions を紹介されましたが、これはすでに翻訳が出て、日本語でも読めることは知られていると思います。この機会に日本語で読める四元数の参考文献をつくっておきました。文献もけっこうたくさんあるものです。(編集人 矢野 忠)

参考文献

- [1] 高木貞治,『数学雑談』(共立出版, 1935)
第3章 複素数 の後半 (102-117) は超複素数について述べられている
- [2] エビングハウス 他 (成木勇夫 訳),『数』(シュプリンガー, 1991)
第7章 Hamilton の4元数 (219-259), この章は Koecher, Remmert の執筆
- [3] ポントリャーギン (宮本敏雄, 保坂秀正 訳),『数の概念の拡張』(森北出版, 1995)
第4章 4元数 (32-66)
- [4] Kantor and Solodovnikov (浅野洋 監訳),『超複素数入門』(森北出版, 1999)
第3章 4元数 (13-22)
第4章 4元数とベクトル代数 (23-33)
第5章 超複素数 (34-38)
- [5] スティルウエル (上野健爾, 浪川幸彦 監訳),『数学のあゆみ』(朝倉書店, 上 2005, 下 2008)
第20章 多元数 (174-197)
- [6] コンウエイ, スミス (山田修司 訳),『四元数と八元数』(培風館, 2006)
第II部 四元数とその3, 4次元幾何学への応用 (25-78)
- [7] 堀源一郎,『ハミルトンと四元数』(海鳴社, 2007)
- [8] 志村五郎,『数学をいかに使うか』(筑摩書房, 2010)
第4章 四元数環の重要性 (53-62)
- [9] 森田克貞,『四元数・八元数とディラック理論』(日本評論社, 2011)
- [10] 金谷健一,『幾何学と代数系』(森北出版, 2014)
第4章 ハミルトンの四元数代数 (61-76)
- [11] 矢野 忠,『四元数の発見』(海鳴社, 2014)
- [12] 今野紀雄,『四元数』(森北出版, 2016)

編集後記

伊予の国，松山はこの夏も異常ともいえる焦熱地獄の日々を体験した。しかし，近年の日本の気象からはもう異常とは言えないのかもしれない。

さて，本題に入ると，今回頂いた投稿論文もそれぞれの分野に応じて興味深い内容を提供して下さい，編集者としても喜ばしくうれしい気持ちである。そして，少なくともこのような状態が今後とも続けばと神に祈りたい気持ちでいっぱいである。このような精神と，いつも頭にある言葉「継続は力なり」をモットーとして今後も編集に携わるつもりである。

それにしても，編集者の一人として数学の論文が少ないのが気になるのはいつもの通りであるが，これは編集者の一人が数学関係者のためである。身体の調子もあり，歯がゆい限りである。しかし，このサーキュラーの趣旨に沿った健全な発展のために是も非もなく努力をしなければならない。今後ともこの方向で編集に力を注ぎたい。

(新関章三, 2017.8.29)