

数学・物理通信

7卷9号 2017年12月

編集 新関章三・矢野 忠

2017年12月1日

目次 (Contents)

1. Bessel 関数と金属円板の振動 (1)	世戸 憲治	2
2. ラプラス演算子の極座標表示, 再考	矢野 忠	10
3. 微分をして積分を求める 1	矢野 忠	21
4. 「フィボナッチ数列の拡張」へのコメント	武藤 徹	26
5. 読者からの声	斎藤宗孝, 編集人	27
5. 編集後記	矢野 忠	28
1. Bessel Function and the Oscillation of a Metal Disk (1)	Kenji SETO	2
2. The Laplacian in Polar Coordinates Revisited	Tadashi YANO	10
3. How to Differentiate Parameters under the Integral Sign 1	Tadashi YANO	21
4. A Comment on “Extension of Fibonacci’s Sequence”	Tohru MUTOH	26
5. Mails from Readers	Munetaka SAITO, The Editor (T. Y.)	27
6. Editorial Comments	Tadashi YANO	28

Bessel 関数と金属円板の振動 (1)

世戸 憲治*

Bessel Function and the Oscillation of a Metal Disk (1)

Kenji SETO*

1 はじめに

前回の「Bessel 関数と膜振動の問題 (2)」(「数学・物理通信」7 巻 8 号) では、剛性を考慮した膜の振動を扱った。しかし、牛革でできたドラムや太鼓の膜は剛性が問題になるほど硬いものではないので、いっそ、ここでは、シンバルや銅鑼(どら)のモデルとして、金属製の円板の振動を扱ってみる。ただし、シンバルは厳密には円錐形であり、銅鑼は縁の部分が裏側に曲がっているが、ここでは簡単化のため平らな円板として扱うことにする。

このうち、今回は銅鑼の方をモデルとして、円板の周辺部は完全な自由端とし、円板の中心部に初速度を与えた場合の解析をする。

2 方程式の導入とその解法

2.1 方程式の導入

前回の論文で扱ったように、剛性を持つ板の振動方程式は、面上に取った座標 (x, y) 、時刻 t における板の垂直変位を $U(x, y, t)$ とすると

$$\rho \frac{\partial^2}{\partial t^2} U(x, y, t) = -ED \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) U(x, y, t) \quad (2.1)$$

と書ける。ここに、 ρ は板の単位面積あたりの質量、すなわち、面密度であり、 E は Young 率である。また、 D は、Poisson 比を σ としたとき、板の面上の単位長さあたりの断面 2 次モーメントを $1 - \sigma^2$ で割ったものである。厚さが h の板の場合は、

$$D = \frac{1}{1 - \sigma^2} \int_{-h/2}^{h/2} x^2 dx = \frac{h^3}{12(1 - \sigma^2)} \quad (2.2)$$

と与えられる。

ここでは、半径 ℓ の円板の振動を扱うが、円の中心に関し、回転対称な現象しか扱わない。したがって、円の中心を座標原点としたとき、変位は動径成分 r と時間 t のみの関数となるので、これを $U(r, t)$ と書くことにする。このとき、2次元の Laplacian は

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \quad (2.3)$$

* 北海学園大学名誉教授

E-mail: seto@pony.ocn.ne.jp

と書かれる。この変換により、方程式 (2.1) は

$$\rho \frac{\partial^2}{\partial t^2} U(r, t) = -ED \left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \right)^2 U(r, t) \quad (2.4)$$

と書き直される。

この方程式を解くために、変位 $U(r, t)$ を変数分離形の

$$U(r, t) = R(r)P(t) \quad (2.5)$$

を仮定する。このとき、方程式は

$$\frac{1}{P} \frac{d^2 P}{dt^2} = -\frac{ED}{\rho} \frac{1}{R} \left(\frac{d^2}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \right)^2 R \quad (2.6)$$

となるので、この式の値、すなわち、分離定数を負の $-\omega^2$ とおくと、方程式は、

$$\frac{d^2 P}{dt^2} + \omega^2 P = 0, \quad ED \left(\frac{d^2}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \right)^2 R = \rho \omega^2 R \quad (2.7)$$

と、2本の方程式に分離される。この第1式から、定数係数を除いて、

$$P(t) = \cos(\omega t), \quad \text{or} \quad \sin(\omega t) \quad (2.8)$$

となる。第2式は4階の微分方程式となるので、一見、難しそうに見えるが、この解を0次の Bessel 関数として、 $R = J_0(kr)$ とおいてみると、 $J_0(kr)$ が

$$\left(\frac{d^2}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \right) J_0(kr) = -k^2 J_0(kr) \quad (2.9)$$

を満たすことから、 k は

$$EDk^4 = \rho \omega^2 \quad (2.10)$$

を満たすことになる。ここで、長さの逆数の次元を持ち、 ω に依存する正の量

$$\mu = \left(\frac{\rho}{ED} \right)^{1/4} \sqrt{\omega} \quad (2.11)$$

を定義すると、(2.10) 式の k は

$$k = \pm \mu, \quad \text{or}, \quad k = \pm i\mu \quad (2.12)$$

となる。これから、(2.7) 第2式の解 $R(r)$ は、Bessel 関数 $J_0(\mu r)$ 、あるいは、変形 Bessel 関数の $I_0(\mu r)$ となる。このとき、第2種 Bessel 関数の $N_0(\mu r)$ 、 $K_0(\mu r)$ も解となるが、これらは $r = 0$ で発散するので、ここでは含めないことにする^{*1}。したがって、(2.7) 第2式の解 $R(r)$ は、 A 、 B を任意定数として、

$$R(r) = AJ_0(\mu r) + BI_0(\mu r) \quad (2.13)$$

とおくことができる。

^{*1} 厳密に述べると、 $N_0(\mu r)$ 、 $K_0(\mu r)$ を組み合わせて $r = 0$ で発散しない形にすることはできるが、その場合でも、その組み合わせに2次元 Laplacian を作用させたときは、 $r = 0$ で発散してしまう。これは原点にデルタ関数的な力を加えたときは許されるが、まったく力を加えていない状況では許されない。詳しくは、つぎの論文で述べることにする。

2.2 固有値と固有関数

ここで、半径 ℓ の円板の周囲は完全な自由端になっていて自由境界条件を満たすとしよう。この自由境界条件であるが、これを導くのは大変長いものになってしまうので、ここでは、L. Landau, E. Lifshitz 著、佐藤常三訳「弾性理論」(東京図書) から引用することにする。この本の中の P.62 問題 5. に「重力場にある円板がその中心で吊り下げられているときの変形を求めよ。」というのがあり、この中に円板の縁が自由端になっているときの境界条件が書かれている。ここでの変位 $R(r)$ に当てはめて書くと、条件式は 2 本あって、

$$\frac{d}{dr} \left(\frac{d^2}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \right) R \Big|_{r=\ell} = 0, \quad \left(\frac{d^2}{dr^2} + \frac{\sigma}{r} \frac{d}{dr} \right) R \Big|_{r=\ell} = 0 \quad (2.14)$$

となる。この第 2 式に表れる σ は、(2.2) 式で用いた Poisson 比である。ここで、Bessel 関数に関する微分公式

$$\begin{aligned} \frac{d}{dr} J_0(\mu r) &= -\mu J_1(\mu r), & \frac{d}{dr} I_0(\mu r) &= \mu I_1(\mu r) \\ \left(\frac{d^2}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \right) J_0(\mu r) &= -\mu^2 J_0(\mu r), & \left(\frac{d^2}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \right) I_0(\mu r) &= \mu^2 I_0(\mu r) \end{aligned} \quad (2.15)$$

を用いて、(2.13) 式の $R(r)$ に (2.14) の条件式を当てはめると、

$$A J_1(\mu \ell) + B I_1(\mu \ell) = 0, \quad A [J_0(\mu \ell) - \alpha J_1(\mu \ell)] - B [I_0(\mu \ell) - \alpha I_1(\mu \ell)] = 0 \quad (2.16)$$

となる。ここで、 α を

$$\alpha = \frac{1 - \sigma}{\mu \ell} \quad (2.17)$$

と定義した。係数 A, B はこれら 2 本の式を満たさなければならないので、それらが両方ともゼロとならないためには、その係数行列式の値がゼロでなければならない。したがって、

$$J_0(\mu \ell) I_1(\mu \ell) + J_1(\mu \ell) I_0(\mu \ell) - 2\alpha J_1(\mu \ell) I_1(\mu \ell) = 0 \quad (2.18)$$

という式を得る。この式によって μ および α の中に含まれる ω の値が固有値として決定される。この意味で、この式は、固有値方程式となる。このとき、固有値 ω は飛び飛びに決定されるであろう。それらを正の小さい方から、 $\omega_k, (k = 1, 2, 3, \dots)$ とし、対応する μ の値を $\mu_k, (k = 1, 2, 3, \dots)$ とする。

このときの固有関数については、(2.16) の第 1 式が成り立つように、

$$A_k = 1, \quad B_k = -\frac{J_1(\mu_k \ell)}{I_1(\mu_k \ell)} \quad (2.19)$$

と選んでおき、これを (2.13) 式に代入し、

$$F_k(r) = J_0(\mu_k r) - \frac{J_1(\mu_k \ell)}{I_1(\mu_k \ell)} I_0(\mu_k r) \quad (2.20)$$

と定義する。これは、もちろん、規格化されたものではない。

2.3 固有関数の直交性と規格化

固有関数 $F_k(r)$ が満たす式は (2.7) の第 2 式から

$$\rho\omega_k^2 F_k(r) = ED \left(\frac{d^2}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \right)^2 F_k(r) \quad (2.21)$$

となる. この式, および, 添え字 k を l とした

$$\rho\omega_l^2 F_l(r) = ED \left(\frac{d^2}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \right)^2 F_l(r) \quad (2.22)$$

の 2 本の式を考え, 第 1 式に $F_l(r)r$ を掛け, 第 2 式に $F_k(r)r$ を掛けて, 辺々を引き算すると,

$$\begin{aligned} & \rho(\omega_k^2 - \omega_l^2) F_k(r) F_l(r) r \\ &= ED \frac{d}{dr} \left[r F_l \frac{d}{dr} \left(F_k'' + \frac{1}{r} F_k' \right) - r F_k \frac{d}{dr} \left(F_l'' + \frac{1}{r} F_l' \right) + r F_k' \left(F_l'' + \frac{\sigma}{r} F_l' \right) - r F_l' \left(F_k'' + \frac{\sigma}{r} F_k' \right) \right] \end{aligned} \quad (2.23)$$

という式を得る. ここで, プライムは r 微分を表す. この式を r について 0 から ℓ まで積分すると,

$$\begin{aligned} & \rho(\omega_k^2 - \omega_l^2) \int_0^\ell F_k(r) F_l(r) r dr \\ &= ED \left[r F_l \frac{d}{dr} \left(F_k'' + \frac{1}{r} F_k' \right) - r F_k \frac{d}{dr} \left(F_l'' + \frac{1}{r} F_l' \right) + r F_k' \left(F_l'' + \frac{\sigma}{r} F_l' \right) - r F_l' \left(F_k'' + \frac{\sigma}{r} F_k' \right) \right]_0^\ell \end{aligned} \quad (2.24)$$

となる. この右辺は, $r=0$ でゼロとなり, また, $r=\ell$ では, 固有関数 F_k, F_l が境界条件 (2.14) 式を満たすことからゼロとなる. したがって, 左辺で $\omega_k \neq \omega_l$ のときは,

$$\int_0^\ell F_k(r) F_l(r) r dr = 0 \quad (2.25)$$

でなければならず, 異なる固有値間での固有関数の直交性がでる.

$\omega_k = \omega_l$ のときは, 不定積分の公式*2

$$\int J_0^2(\mu r) r dr = \frac{r^2}{2} [J_0^2(\mu r) + J_1^2(\mu r)], \quad \int I_0^2(\mu r) r dr = \frac{r^2}{2} [I_0^2(\mu r) - I_1^2(\mu r)] \quad (2.26)$$

$$\int J_0(\mu r) I_0(\mu r) r dr = \frac{r}{2\mu} [J_0(\mu r) I_1(\mu r) + J_1(\mu r) I_0(\mu r)] \quad (2.27)$$

を用いて直接積分してしまう.

以上の結果をまとめると, 固有関数の直交規格化の式

$$\int_0^\ell F_k(r) F_l(r) r dr = N_k^2 \delta_{k,l} \quad (2.28)$$

を得る. ここに, 規格化定数 N_k^2 は,

$$N_k^2 = \frac{\ell^2}{2} \left[J_0^2(\mu_k \ell) + \left(\frac{I_0^2(\mu_k \ell)}{I_1^2(\mu_k \ell)} - \frac{4\alpha}{\mu_k \ell} \right) J_1^2(\mu_k \ell) \right] \quad (2.29)$$

と与えられる. ここで, 数式簡単化のため (2.18) の固有値方程式を用いた. これから $F_k(r)/N_k$ が規格化された固有関数となる.

*2 「数学公式 III」(岩波全書) P.189 上から 6 番目, P.190 上から 4 番目. 「新数学公式集 II」(丸善) P.41~P.48.

2.4 初期値問題

ここでは、初期変位をゼロとし、円板の中心部に初速度を与えた場合を考える。このとき、変位の一般解は、(2.8) 式の時間依存部分を $\sin(\omega_k t)$ とし、また、 C_k を任意定数として、

$$U(r, t) = \sum_{k=1}^{\infty} C_k F_k(r) \sin(\omega_k t) \quad (2.30)$$

と各固有モードの重ね合わせで表される。定数 C_k は初期条件から決められる。

ここでは、円板の半径 ℓ より小さい r_0 を設定し、初期条件を、 $0 \leq r \leq r_0$ の範囲に初速度 v_0 を与えるものとする。すなわち、式で表すと、

$$U(r, 0) = 0, \quad \left. \frac{\partial U(r, t)}{\partial t} \right|_{t=0} = \begin{cases} v_0, & 0 \leq r \leq r_0 \\ 0, & r_0 < r \leq \ell \end{cases} \quad (2.31)$$

となる。(2.30) 式に、この初期条件を課すると、

$$\sum_{k=1}^{\infty} C_k \omega_k F_k(r) = \begin{cases} v_0, & 0 \leq r \leq r_0 \\ 0, & r_0 < r \leq \ell \end{cases} \quad (2.32)$$

となるので、両辺に $F_l(r)r$ を掛け、 r で積分し、固有関数の直交性 (2.28) 式を利用すると、係数 C_k が、

$$C_k = \frac{v_0}{\omega_k N_k^2} \int_0^{r_0} F_k(r) r dr \quad (2.33)$$

と求まる。これを (2.30) 式に戻し、解は、

$$U(r, t) = v_0 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\omega_k N_k^2} \left(\int_0^{r_0} F_k(r') r' dr' \right) F_k(r) \sin(\omega_k t) \quad (2.34)$$

と求められるが、ここに表れる積分は、積分公式

$$\int \begin{pmatrix} J_0(\mu r) \\ I_0(\mu r) \end{pmatrix} r dr = \frac{r}{\mu} \begin{pmatrix} J_1(\mu r) \\ I_1(\mu r) \end{pmatrix} \quad (2.35)$$

を使うと実行可能で、最終的に

$$U(r, t) = v_0 r_0 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\mu_k \omega_k N_k^2} \left[\frac{J_1(\mu_k r_0)}{I_1(\mu_k \ell)} - \frac{J_1(\mu_k \ell)}{I_1(\mu_k r_0)} \right] F_k(r) \sin(\omega_k t) \quad (2.36)$$

と求められる。

3 数値計算例

銅鑼に模した金属板の数値計算をするにあたり、各種データを与えることになるが、実際の銅鑼は見たことも触ったこともないので、はっきりとした数値は分からない。ここでは、それを青銅として、円板の半径 ℓ 、厚さ h 、Young 率 E 、Poisson 比 σ を

$$\ell = 20 \text{ cm} = 0.2 \text{ m}, \quad h = 1 \text{ mm} = 0.001 \text{ m}, \quad E = 110 \text{ GPa} = 110 \times 10^9 \text{ Pa}, \quad \sigma = 0.38 \quad (3.1)$$

とする。また、青銅の体積密度は 8800 kg/m^3 なので、ここで用いる面密度 ρ は

$$\rho = 8800 \text{ kg/m}^3 \times h = 8.8 \text{ kg/m}^2 \quad (3.2)$$

とする。これらの数値を基にして、固有値方程式 (2.18) を解き、求めた固有値 ω_k を 10 個挙げると、小数点以下 3 桁の精度で、

$$\omega_k [\text{sec}^{-1}] = 253.091, 1065.095, 2425.139, 4330.324, 6780.245, 9774.782, 13313.883, \\ 17397.525, 22025.702, 27198.316 \quad (3.3)$$

となる。見て分かるように、これら数値の間隔はしだいに大きくなり、1 次元振動体のときの倍振動とはかけ離れたものである。ちなみに、最小の固有値 ω_1 に対するこれら数値の比は、

$$\frac{\omega_k}{\omega_1} = 1, 4.208, 9.582, 17.109, 26.789, 38.621, 52.604, 68.740, 87.026, 107.463 \quad (3.4)$$

と急激に大きくなっていくのが分かる。実は、この比の値は、Poisson 比 σ には依存するが、円板の半径 l , 厚さ h , Young 率 E , 面密度 ρ には依存せずに決まる量である。その理由は、(2.17) 式の α , (2.18) 式の固有値方程式からわかるように、この式からは、無次元量の μl を $\mu l = \xi$ とおいたとき、この値が ξ_k , ($k = 1, 2, 3, \dots$) と、 σ には依存するが、 l, h, E, ρ には依存しないで決まる。このときの ξ_k の値と ω_k の値は、 μ の定義式 (2.11) から、 $(\rho/ED)^{1/4} \sqrt{\omega_k} l = \xi_k$ と結びついており、これから、 $\omega_k/\omega_1 = (\xi_k/\xi_1)^2$ となるからである。また、この式から、角振動数 ω_k の値は、円板のサイズの、 h/l^2 に比例して決まることになる。

固有値が求められると、(2.20) 式より、固有関数 $F_k(r)$ が決まる。図 1 に $k = 1 \sim 5$ の 5 個の固有関数を示す。見てわかるとおり、これら固有関数は、モード番号 k と同じ個数のゼロ点を持つ。

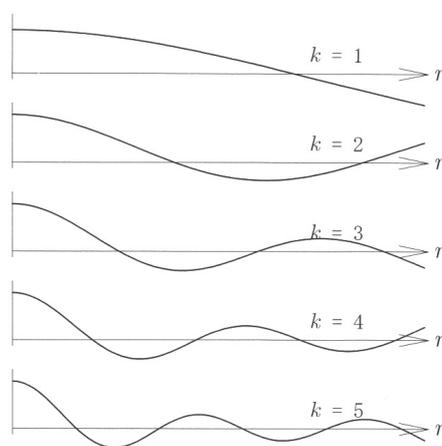


図 1 固有関数

ここでは、初速度を与える範囲の r_0 を円板の半径の $1/10$ の

$$r_0 = 0.02 \text{ m} \quad (3.5)$$

とし、(2.36) 式で与えられる変位 $U(r, t)$ を図 2 と図 3 に描いた。これらの図では、右方向に動径座標 r , 斜め上方向に時間 t , 上方向に変位 U をとって 3 次的に描いたものである。なお、この変位 U については任意スケールとする。このうち、図 2 は、時間について $t = 0$ から 0.01 sec までを描いたもので、この図からは、円板

の中心で与えられた初速度が板の縁の方に伝播していくのが見てとれるが、それが縁で反射した後は、結構複雑な動きになっているのがわかる。つぎの図3は時間間隔をつぎの時間の $t = 0.01$ から 0.02 sec としたものである。これらの図では陰になって見えない部分を描かないように陰線処理をして描いたものである。それにつけても、1次元振動に見慣れた目には、これまでに見たこともないもので、まさに、複雑怪奇、奇妙奇天烈という言葉でしか言い尽くせないものがある。これは (3.3) (3.4) 式で見るように1次元振動のときの倍振動とは程遠い高い振動が入ってくることを反映してのことと考えられる。これが1次元振動とは異なる剛性付き2次元振動の本質なのであろう。

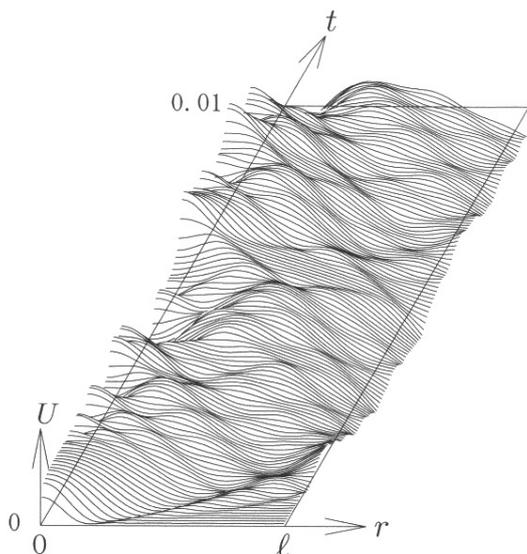


図2 変位 $U(r, t)$, $t = 0 \sim 0.01 \text{ sec}$

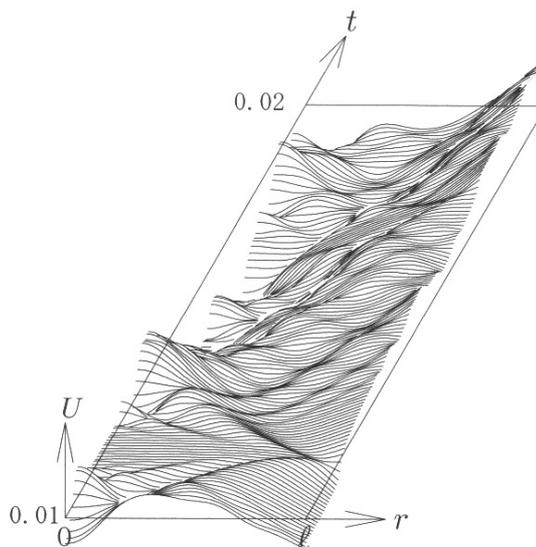


図3 変位 $U(r, t)$, $t = 0.01 \sim 0.02 \text{ sec}$

振動中の円板が、実際どのような形になるかを、つぎの図4、図5に示す。これらの図では、円板の面上にとった座標 (x, y) を、 x については水平右方向、 y については、斜め上方向にとり、変位 U を上方向にとって3次元的に描いたものである。このうち、図4は時間 $t = 0.01 \text{ sec}$ 、図5は $t = 0.02 \text{ sec}$ でのものである。

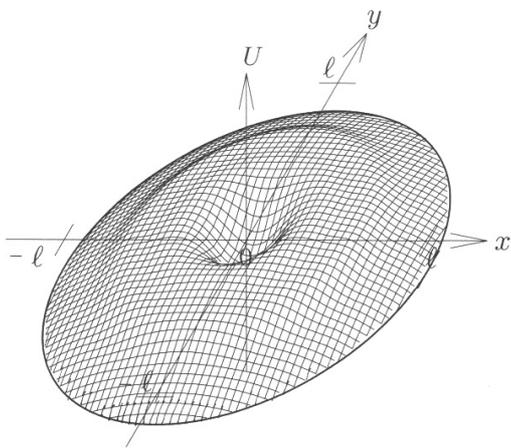


図4 振動中の円板の形 $t = 0.01 \text{ sec}$

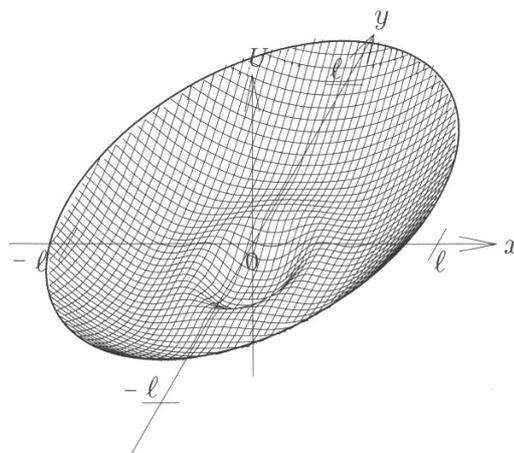


図5 振動中の円板の形 $t = 0.02 \text{ sec}$

図 4 では，円板の中心部は負方向の変位を起こしているが，周辺部にいくにしたがい，いったん正方向の変位になるが，すぐに下がり始め，周辺では負方向の変位となる．また，図 5 では円板の中心部は同じくへこんで負方向の変位となっているが，周辺にいくにしたがい正方向の変位となっている．

4 おわりに

このシリーズは，弦の振動から始めて，とうとう，金属円板の振動までできてしまった．今回の解析は，解析解を求めるところまでは比較的容易にできたが，やはり，数値計算のところでは，かなりの程度，試行錯誤を繰り返すことになってしまった．どうも私は，数値計算までやってみないと本当にものごとを理解した気になれない．また，数値計算をやってみて初めて気付くことも多い．(3.4) 式で述べた ω_k/ω_1 が Poisson 比のみに依存することは数値計算の段階で気が付いた．

今回は，金属板の振動として，シンバルをモデルとして解析してみる．この場合は，円板の中心を固定として扱うので，第 2 種の Bessel 関数 N_0, K_0 も関与し，計算はかなり煩雑なものになる．しかし，それなりの面白い成果がだせるものと考えている．

[謝辞]

今回も，京都大学名誉教授の中西襄先生にこの原稿を見ていただき，たくさんのコメントをいただきました．先生に心から感謝いたします．

ラプラス演算子の極座標表示, 再考

矢野 忠¹

The Laplacian in Polar Coordinates Revisited

Tadashi YANO²

1 はじめに

約 30 年前 (1988 年) に愛数協の『研究と実践』に「ラプラス演算子の極座標表示」というタイトルで数学エッセイを書いた [1]. このエッセイは小著『数学散歩』に収録された [2]. そしてその後, 『物理数学散歩』にも再録された [3].

『物理数学散歩』を中西先生にお送りしたときに, 先生から直交座標系の 3 次元のラプラス演算子を 3 次元の極座標にバカ正直に変換する方法に批判が寄せられた. むしろ, 一度, 円柱座標に変換しておいて, それから 3 次元の極座標に変換するのが正統なやり方だろうと示唆された. もとからの私の考えでは円柱座標系を経由するのはやはり便法で正統的な方法ではないのではないかという考えであった. ところがその一般性を首尾一貫させようとするれば, n 次元の極座標系への変換は手も下せないほど複雑になるので, 一度円柱座標系に変換して, その後に極座標系に変換するのがむしろ一般的な方法ではないかというご主張であった. この 2 段階で一度円柱座標系を経由して, 極座標系に変換するのなら, うまく数学的帰納法で証明ができるという.

それでようやく私の考えはどうもかたくなすぎるらしいことを知った. そのときに, 一般の n 次元の極座標系で表されたラプラス演算子を与えた文献を中西先生から教えてもらった [4].

ところが, その文献をコピーしてもっていたが, その n 次元の極座標系でのラプラス演算子の導出をどうしたらよいかわからずそのままになっていた. 2016 年 10 月に『微分方程式』 [5] を先生から送っていただいたときに, 3 次元のラプラス演算子の極座標系での表現のことについて再度のご注意をして下さった.

それで, 先生のこの本にしたがって 2 次元のラプラス演算子, 3 次元のラプラス演算子の極座標系表示を導いてみたい. これはすでに先生の著書『微分方程式』に載っているが, それをまとめてみた³.

さらに中西先生のお考えにしたがって n 次元のラプラス演算子の極座標表示を導出してみたい. この計算は先生にはあまりにも簡単な演習問題であって, ことさらエッセイに書くほどのことでもないとお考えだろうと思われる.

2 節では 2 次元のラプラス演算子の極座標表示を導出する. それを用いて 3 節では 3 次元のラプラス演算子の極座標表示を導出する. 4 節では [4] で与えられた n 次元のラプラス演算子の極座標表示を数学的帰納法で証明する. 5 節はまとめである. 6 節は補遺 1 で軌道角運動量演算子についてまとめた. 7 節は補遺 2 で 2 次元のラプラス演算子の極座標表示の一般的な導出である.

2 2次元のラプラス演算子の極座標表示

2次元のラプラス演算子は直交座標系では

$$\Delta_2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \quad (2.1)$$

¹元愛媛大学工学部

²yanotad@earth.ocn.ne.jp

³この方法を私が知らなかったわけではない. 学生時代に物理数学のテキストとして使われた [6] で知っていた. また大学に勤めるようになってから [7] にも載っていることを著者の佐々木先生から教わっていた. この 3 つの説明の中でもっともわかりやすいのは [5] である.

である. このエッセイでは Δ の下に添字をつけて, それが次元数を表す. 以下, 3次元のラプラス演算子でも n 次元のラプラス演算子でもこの添字で次元を区別することにしよう.

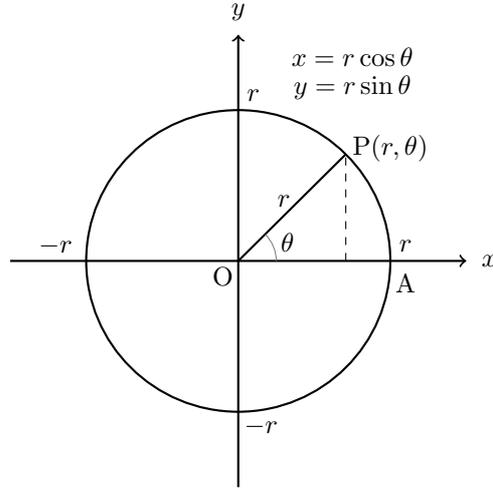


図 1: 2次元の極座標 (r, θ) の定義

さて, 2次元の極座標をつぎの (r, θ) で定義する.

$$\begin{aligned} x &= r \cos \theta, \\ y &= r \sin \theta \end{aligned} \tag{2.2}$$

ここで, もちろん (x, y) は平面上の点の直交座標である. この座標変換式を (r, θ) で解けば,

$$\begin{aligned} r &= \sqrt{x^2 + y^2}, \\ \theta &= \arctan \frac{y}{x} \end{aligned} \tag{2.3}$$

である (図 1 参照).

結果を先取りして表せば 2次元の直交座標系でのラプラス演算子は極座標系で

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \tag{2.4}$$

である.

オイラーの公式 $e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta$ があるので, これをできるだけ使うようにしたい. そのために

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} = \left(\frac{\partial}{\partial x} - i \frac{\partial}{\partial y} \right) \left(\frac{\partial}{\partial x} + i \frac{\partial}{\partial y} \right) \tag{2.5}$$

と因数分解をしておく⁴.

このとき

$$\frac{\partial}{\partial x} = \frac{\partial r}{\partial x} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{\partial \theta}{\partial x} \frac{\partial}{\partial \theta} \tag{2.6}$$

$$\frac{\partial}{\partial y} = \frac{\partial r}{\partial y} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{\partial \theta}{\partial y} \frac{\partial}{\partial \theta} \tag{2.7}$$

⁴ここで因子の順序を変えて $\left(\frac{\partial}{\partial x} + i \frac{\partial}{\partial y} \right) \left(\frac{\partial}{\partial x} - i \frac{\partial}{\partial y} \right)$ としても最終の結果は変わらないが, 途中の計算で負号が余分に出てくるので, 本文中の順序の因数分解の方がほんのちよっとだけ手間が省ける. そういう細かな配慮がされている.

ここで (2.3) より

$$\frac{\partial r}{\partial x} = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} = \frac{x}{r} = \cos \theta, \quad (2.8)$$

$$\frac{\partial r}{\partial y} = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} = \frac{y}{r} = \sin \theta, \quad (2.9)$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial x} = -\frac{y}{x^2 + y^2} = -\frac{\sin \theta}{r}, \quad (2.10)$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial y} = \frac{x}{x^2 + y^2} = \frac{\cos \theta}{r} \quad (2.11)$$

であるから

$$\frac{\partial}{\partial x} = \cos \theta \frac{\partial}{\partial r} - \frac{\sin \theta}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \quad (2.12)$$

$$\frac{\partial}{\partial y} = \sin \theta \frac{\partial}{\partial r} + \frac{\cos \theta}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \quad (2.13)$$

したがって

$$\frac{\partial}{\partial x} + i \frac{\partial}{\partial y} = e^{i\theta} \left(\frac{\partial}{\partial r} + \frac{i}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \right) \quad (2.14)$$

$$\frac{\partial}{\partial x} - i \frac{\partial}{\partial y} = e^{-i\theta} \left(\frac{\partial}{\partial r} - \frac{i}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \right) \quad (2.15)$$

となる.

これらの式を用いれば

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} &= \left(\frac{\partial}{\partial x} - i \frac{\partial}{\partial y} \right) \left(\frac{\partial}{\partial x} + i \frac{\partial}{\partial y} \right) \\ &= e^{-i\theta} \left(\frac{\partial}{\partial r} - \frac{i}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \right) \left[e^{i\theta} \left(\frac{\partial}{\partial r} + \frac{i}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \right) \right] \\ &= \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{\partial}{\partial r} + \frac{i}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r} \left(\frac{\partial}{\partial r} + \frac{i}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \right) - \frac{i}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{\partial}{\partial r} + \frac{i}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \right) \\ &= \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \\ &= \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \Lambda_2 \end{aligned} \quad (2.16)$$

ここで Λ_2 は

$$\Lambda_2 = \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \quad (2.17)$$

これで 2 次元のラプラス演算子が求められた. つぎの 3 節ではこの結果を用いて 3 次元のラプラス演算子を求めよう.

3 3次元のラプラス演算子の極座標表示

では続いて 3 次元のラプラス演算子の式を極座標で表示することを考えよう. 3 次元のラプラス演算子は直交座標系では

$$\Delta_3 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \quad (3.1)$$

である. Δ の下の添字は次元数を表している. ところで, この 3 次元のラプラス演算子を極座標で表すと

$$\begin{aligned}\Delta_3 &= \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \Lambda_3, \\ \Lambda_3 &= \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{\partial^2}{\partial \phi^2}\end{aligned}\tag{3.2}$$

と表されることはよく知られている. わざわざこの形に表したのは, この形で覚えると 3 次元のラプラス演算子の極座標表示の式が覚えやすいからである.

3 次元のラプラス演算子の極座標表示 (3.2) をこれから導出しよう. 3 次元の直交座標 (x, y, z) と極座標 (r, θ, ϕ) との関係を

$$\begin{aligned}x &= r \cos \theta, \\ y &= r \sin \theta \cos \phi, \\ z &= r \sin \theta \sin \phi\end{aligned}$$

と普通にはとるが, 後の 4 節の n 次元の極座標のとり方に合わせるために

$$\begin{aligned}x &= r \cos \theta, \\ y &= r \sin \theta \cos \phi, \\ z &= r \sin \theta \sin \phi\end{aligned}\tag{3.3}$$

ととることにしよう (図 2 参照). ここで, 円柱座標系 (ρ, ϕ, x) を思い出せば, これを用いて上の直交座標と

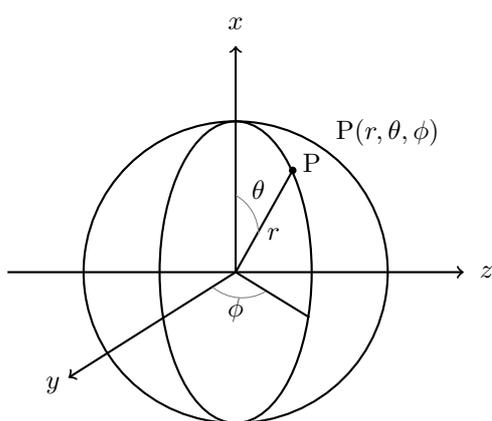


図 2: 3 次元の極座標 (r, θ, ϕ)

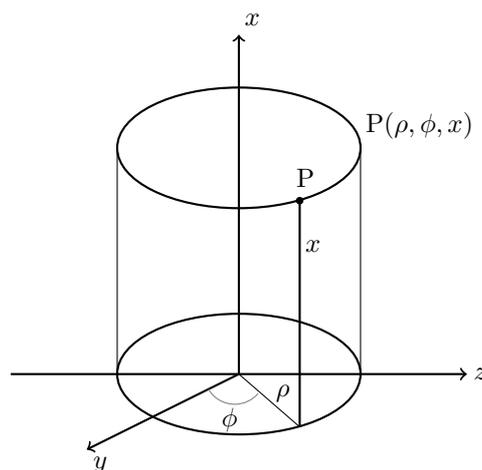


図 3: 円柱座標系 (ρ, ϕ, x)

極座標との関係 (3.3) は

$$\begin{aligned}x &= r \cos \theta, \\ y &= \rho \cos \phi, \\ z &= \rho \sin \phi, \\ \rho &= r \sin \theta\end{aligned}\tag{3.4}$$

となる (図 3 参照).

いま, $\Delta_3 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \Delta_2$ であるから, この Δ_2 の部分を

$$\begin{aligned}y &= \rho \cos \phi, \\ z &= \rho \sin \phi\end{aligned}\tag{3.5}$$

を用いて, ρ, ϕ で書き変えよう. そうするとこれは2節で求めた Δ_2 の式 (2.16) で $r \rightarrow \rho, \theta \rightarrow \phi$ とおきかえれば求められる. すなわち,

$$\Delta_2 = \frac{\partial^2}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2}{\partial \phi^2} \quad (3.6)$$

が得られる. したがって,

$$\begin{aligned} \Delta_3 &= \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \Delta_2 \\ &= \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2}{\partial \phi^2} \end{aligned} \quad (3.7)$$

この式の下線部分は2次元のラプラシアンで $y \rightarrow \rho$ とおきかえたものである. なぜなら

$$\begin{aligned} x &= r \cos \theta, \\ \rho &= r \sin \theta \end{aligned} \quad (3.8)$$

であるから.

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial \rho^2} = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2}, \quad (3.9)$$

$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} = \frac{1}{r \sin \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial}{\partial r} + \frac{\cos \theta}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \right), \quad (3.10)$$

$$\frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2}{\partial \phi^2} = \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2}{\partial \phi^2} \quad (3.11)$$

であることを用いれば

$$\begin{aligned} \Delta_3 &= \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} + \frac{1}{r \sin \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial}{\partial r} + \frac{\cos \theta}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2}{\partial \phi^2} \\ &= \left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial}{\partial r} \right) + \left(\frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\cos \theta}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2}{\partial \phi^2} \end{aligned} \quad (3.12)$$

が得られる.

さらに, ここで,

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial}{\partial r} &= \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial}{\partial r} \right), \\ \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\cos \theta}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} &= \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} \right) \end{aligned}$$

であることを用いれば

$$\begin{aligned} \Delta_3 &= \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \Lambda_3 \\ \Lambda_3 &= \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{\partial^2}{\partial \phi^2} \end{aligned}$$

が求められる. したがって, (3.2) が導かれる.

Λ_3 と軌道角運動量演算子の2乗 \mathbf{L}^2 との間には

$$\mathbf{L}^2 = -\hbar^2 \Lambda_3 \quad (3.13)$$

の関係がある. 補遺 1 「軌道角運動量演算子」を参照せよ.

4 n 次元のラプラス演算子の極座標表示

これから n 次元のラプラス演算子の極座標表示を証明する. そのためにつぎのような n 次元の極座標を導入する.

$$\begin{aligned}
 x_1 &= r \cos \theta_1 \\
 x_2 &= r \sin \theta_1 \cos \theta_2 \\
 x_3 &= r \sin \theta_1 \sin \theta_2 \cos \theta_3 \\
 &\dots \\
 x_{n-1} &= r \sin \theta_1 \sin \theta_2 \cdots \sin \theta_{n-2} \cos \theta_{n-1} \\
 x_n &= r \sin \theta_1 \sin \theta_2 \cdots \sin \theta_{n-2} \sin \theta_{n-1}
 \end{aligned} \tag{4.1}$$

つぎに, この極座標で定義される, [4] に載っている n 次元のラプラス演算子の極座標表示を与えておこう.

$$\begin{aligned}
 \Delta_n &= \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} + \cdots + \frac{\partial^2}{\partial x_n^2} \\
 &= \frac{1}{r^{n-1}} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^{n-1} \frac{\partial}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \Lambda_n(\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_{n-1})
 \end{aligned} \tag{4.2}$$

ここで, $\Lambda_n(\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_{n-1})$ は

$$\Lambda_n(\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_{n-1}) = \frac{1}{\sin^{n-2} \theta_1} \frac{\partial}{\partial \theta_1} \left(\sin^{n-2} \theta_1 \frac{\partial}{\partial \theta_1} \right) + \frac{1}{\sin^2 \theta_1} \Lambda_{n-1}(\theta_2, \theta_3, \dots, \theta_{n-1}) \tag{4.3}$$

である. そこで

$$\Lambda_{n-1}(\theta_2, \theta_3, \dots, \theta_{n-1}) = \frac{1}{\sin^{n-3} \theta_2} \frac{\partial}{\partial \theta_2} \left(\sin^{n-3} \theta_2 \frac{\partial}{\partial \theta_2} \right) + \frac{1}{\sin^2 \theta_2} \Lambda_{n-2}(\theta_3, \theta_4, \dots, \theta_{n-1}) \tag{4.4}$$

である. このように Λ_n は再帰的に定義される. しかし, Λ_n を再帰的には表わさないならば,

$$\Lambda_n(\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_{n-1}) = \Lambda_{n,1} + \Lambda_{n,2} + \Lambda_{n,3} + \Lambda_{n,4} + \cdots + \Lambda_{n,n-2} + \Lambda_{n,n-1} \tag{4.5}$$

と表される. ここで $\Lambda_{n,1}, \Lambda_{n,2}, \dots, \Lambda_{n,n-1}$ は下に与えた (4.6) で表される.

$$\begin{aligned}
 \Lambda_{n,1} &= \frac{1}{\sin^{n-2} \theta_1} \frac{\partial}{\partial \theta_1} \left(\sin^{n-2} \theta_1 \frac{\partial}{\partial \theta_1} \right) \\
 \Lambda_{n,2} &= \frac{1}{\sin^2 \theta_1 \sin^{n-3} \theta_2} \frac{\partial}{\partial \theta_2} \left(\sin^{n-3} \theta_2 \frac{\partial}{\partial \theta_2} \right) \\
 \Lambda_{n,3} &= \frac{1}{(\sin^2 \theta_1 \sin^2 \theta_2) \sin^{n-4} \theta_3} \frac{\partial}{\partial \theta_3} \left(\sin^{n-4} \theta_3 \frac{\partial}{\partial \theta_3} \right) \\
 \Lambda_{n,4} &= \frac{1}{(\sin^2 \theta_1 \sin^2 \theta_2 \sin^2 \theta_3) \sin^{n-5} \theta_4} \frac{\partial}{\partial \theta_4} \left(\sin^{n-5} \theta_4 \frac{\partial}{\partial \theta_4} \right) \\
 &\dots \\
 \Lambda_{n,n-2} &= \frac{1}{(\sin^2 \theta_1 \cdots \sin^2 \theta_{n-3}) \sin \theta_{n-2}} \frac{\partial}{\partial \theta_{n-2}} \left(\sin \theta_{n-2} \frac{\partial}{\partial \theta_{n-2}} \right) \\
 \Lambda_{n,n-1} &= \frac{1}{(\sin^2 \theta_1 \cdots \sin^2 \theta_{n-2})} \frac{\partial^2}{\partial \theta_{n-1}^2}
 \end{aligned} \tag{4.6}$$

この (4.5), (4.6) で表された Λ_n は中西先生の表記法を用いれば, 簡単に

$$\Lambda_n = \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{\left(\prod_{j=1}^{k-1} \sin^2 \theta_j \right) \sin^{n-k-1} \theta_k} \frac{\partial}{\partial \theta_k} \left(\sin^{n-k-1} \theta_k \frac{\partial}{\partial \theta_k} \right) \tag{4.5a}$$

と表すことができる⁵。ただし、このとき $k = 1$ のときの積は

$$\prod_{j=1}^{k-1} \sin^2 \theta_j = 1$$

と定義する。

これから数学的帰納法で (4.2) を証明したい。

数学的帰納法の仮定により上に述べた n 次元のラプラス演算子の一つ前の $n - 1$ 次元のラプラス演算子が成り立つから、そのときの変数として、つぎの $n - 1$ 個の変数 $(y_1, y_2, \dots, y_{n-1})$ をとる。

$$\begin{aligned} y_1 &= x_2 = \rho \cos \phi_1 \\ y_2 &= x_3 = \rho \sin \phi_1 \cos \phi_2 \\ y_3 &= x_4 = \rho \sin \phi_1 \sin \phi_2 \cos \phi_3 \\ &\dots \\ y_{n-2} &= x_{n-1} = \rho \sin \phi_1 \sin \phi_2 \cdots \sin \phi_{n-3} \cos \phi_{n-2} \\ y_{n-1} &= x_n = \rho \sin \phi_1 \sin \phi_2 \cdots \sin \phi_{n-3} \sin \phi_{n-2} \end{aligned} \tag{4.7}$$

ここで、

$$\begin{aligned} x_1 &= r \cos \theta_1 \\ \rho &= r \sin \theta_1 \\ \phi_1 &= \theta_2 \\ \phi_2 &= \theta_3 \\ &\dots \\ \phi_{n-2} &= \theta_{n-1} \end{aligned} \tag{4.8}$$

である。

まず (4.2) は $n = 2$ のとき

$$\Delta_2 = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \Lambda_2(\theta_1) \tag{4.9}$$

となり、これは (2.16) が成り立つことから明らかに成立する。

つぎに $(n - 1)$ に対して

$$\begin{aligned} \Delta_{n-1} &= \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} + \cdots + \frac{\partial^2}{\partial x_n^2} \\ &= \frac{\partial^2}{\partial y_1^2} + \cdots + \frac{\partial^2}{\partial y_{n-1}^2} \\ &= \frac{1}{\rho^{n-2}} \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\rho^{n-2} \frac{\partial}{\partial \rho} \right) + \frac{1}{\rho^2} \Lambda_{n-1}(\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_{n-2}) \end{aligned} \tag{4.10}$$

が成り立つと仮定する。すなわち、これは数学的帰納法における仮定である。

ではこれから (4.2) の Δ_n が成り立つことを示そう。まず Δ_n に (4.10) を代入すれば

$$\begin{aligned} \Delta_n &= \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} + \cdots + \frac{\partial^2}{\partial x_n^2} \\ &= \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \Delta_{n-1} \\ &= \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{1}{\rho^{n-2}} \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\rho^{n-2} \frac{\partial}{\partial \rho} \right) + \frac{1}{\rho^2} \Lambda_{n-1}(\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_{n-2}) \end{aligned} \tag{4.11}$$

⁵ 著者 (矢野) へのメールで示された簡便な表記法である。(4.6) の $\Lambda_{n,i}, (i = 1, \dots, n - 1)$ を見たら、この表示が示唆される。

となる. ところで

$$\frac{1}{\rho^{n-2}} \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\rho^{n-2} \frac{\partial}{\partial \rho} \right) = \frac{\partial^2}{\partial \rho^2} + \frac{n-2}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \quad (4.12)$$

であるから

$$\Delta_n = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial \rho^2} + (n-2) \underbrace{\frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho}} + \frac{1}{\rho^2} \Lambda_{n-1}(\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_{n-2}) \quad (4.13)$$

(4.13) で下線部は (2.16) または (3.9) の関係から

$$\frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial \rho^2} = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta_1^2} \quad (4.14)$$

となり, また下カッコ部は (3.10) を用いれば,

$$\begin{aligned} \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} &= \frac{1}{r \sin \theta_1} \left(\sin \theta_1 \frac{\partial}{\partial r} + \frac{\cos \theta_1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta_1} \right) \\ &= \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{\cos \theta_1}{r^2 \sin \theta_1} \frac{\partial}{\partial \theta_1} \end{aligned} \quad (4.15)$$

となる. したがって (4.13) の Δ_n に (4.14), (4.15) を代入すれば

$$\begin{aligned} \Delta_n &= \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta_1^2} + (n-2) \left(\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{\cos \theta_1}{r^2 \sin \theta_1} \frac{\partial}{\partial \theta_1} \right) + \frac{1}{\rho^2} \Lambda_{n-1}(\theta_2, \theta_3, \dots, \theta_{n-1}) \\ &= \underbrace{\frac{\partial^2}{\partial r^2} + (n-1) \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta_1^2}} + \underbrace{(n-2) \frac{\cos \theta_1}{r^2 \sin \theta_1} \frac{\partial}{\partial \theta_1}} + \frac{1}{\rho^2} \Lambda_{n-1}(\theta_2, \theta_3, \dots, \theta_{n-1}) \end{aligned} \quad (4.16)$$

(4.16) では $(\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_{n-2})$ を $(\theta_2, \theta_3, \dots, \theta_{n-1})$ で表した.

(4.16) の下線部と下カッコ部はそれぞれ

$$\frac{\partial^2}{\partial r^2} + (n-1) \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} = \frac{1}{r^{n-1}} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^{n-1} \frac{\partial}{\partial r} \right) \quad (4.17)$$

$$\frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta_1^2} + (n-2) \frac{\cos \theta_1}{r^2 \sin \theta_1} \frac{\partial}{\partial \theta_1} = \frac{1}{r^2 \sin^{n-2} \theta_1} \frac{\partial}{\partial \theta_1} \left[\sin^{n-2} \theta_1 \frac{\partial}{\partial \theta_1} \right] \quad (4.18)$$

となるから, Δ_n は (4.16), (4.17), (4.18), (4.3) を用いて, つぎのように

$$\begin{aligned} \Delta_n &= \frac{1}{r^{n-1}} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^{n-1} \frac{\partial}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^{n-2} \theta_1} \frac{\partial}{\partial \theta_1} \left[\sin^{n-2} \theta_1 \frac{\partial}{\partial \theta_1} \right] + \frac{1}{\rho^2} \Lambda_{n-1} \\ &= \frac{1}{r^{n-1}} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^{n-1} \frac{\partial}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \Lambda_n(\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_{n-1}) \end{aligned}$$

が導かれる. ここで Λ_n は (4.5), (4.6) または (4.5a) で表されている.

以上から, (4.2) が数学的帰納法で証明された.

5 おわりに

このエッセイでは, 2次元, 3次元, n 次元のラプラス演算子の極座標表示を求めた. 2次元と3次元の場合には物理や工学で頻りに現れるのでだれでも知っている. 一般の n 次元のラプラス演算子の極座標表示にはまだ私は出くわしたことがない. だから, 単なるアカデミックな問題であるのか, それとも実際に必要な場合があるのか. いまのところわからない.

しかし, なんでも人間が考えることは現実の世界のどこかで実現しているという経験をすることが最近では多くなってきているので, どこかで役に立つときがくるだろう.

6 補遺 1 軌道角運動量演算子

量子力学で現れる軌道角運動量演算子の 2 乗 \mathbf{L}^2 と 3 次元のラプラス演算子の角部分 Λ_3 との関係について簡単に述べておこう。詳しい説明はまた別の機会に述べたい。

まず、軌道角運動量演算子 \mathbf{L} をつぎのように定義する。

$$\begin{aligned} L_x &= -i\hbar \left(y \frac{\partial}{\partial z} - z \frac{\partial}{\partial y} \right) \\ L_y &= -i\hbar \left(z \frac{\partial}{\partial x} - x \frac{\partial}{\partial z} \right) \\ L_z &= -i\hbar \left(x \frac{\partial}{\partial y} - y \frac{\partial}{\partial x} \right) \end{aligned} \quad (6.1)$$

ここで、 $\hbar = h/2\pi$ であり、 h はプランクの定数である。いま、3 節の極座標のとり方 (3.3)

$$\begin{aligned} x &= r \cos \theta, \\ y &= r \sin \theta \cos \phi, \\ z &= r \sin \theta \sin \phi \end{aligned}$$

を使うと、軌道角運動量演算子は極座標表示では

$$\begin{aligned} L_x &= -i\hbar \frac{\partial}{\partial \phi}, \\ L_y &= i\hbar \left(\sin \phi \frac{\partial}{\partial \theta} + \cot \theta \cos \phi \frac{\partial}{\partial \phi} \right), \\ L_z &= i\hbar \left(-\cos \phi \frac{\partial}{\partial \theta} + \cot \theta \sin \phi \frac{\partial}{\partial \phi} \right) \end{aligned} \quad (6.2)$$

となる。この極座標表示での軌道角運動量の 2 乗 \mathbf{L}^2 は

$$\mathbf{L}^2 = L_x^2 + L_y^2 + L_z^2 = -\hbar^2 \Lambda_3 \quad (6.3)$$

となる。ここで

$$\Lambda_3 = \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{\partial^2}{\partial \phi^2}$$

である。また

$$\begin{aligned} \mathbf{L}^2 Y_{lm}(\theta, \phi) &= l(l+1)\hbar^2 Y_{lm}(\theta, \phi), \quad (l = 0, 1, 2, \dots) \\ L_x Y_{lm}(\theta, \phi) &= m\hbar Y_{lm}(\theta, \phi), \quad (m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, \pm l) \end{aligned} \quad (6.4)$$

が成り立つ。ここで、 $Y_{lm}(\theta, \phi)$ は球面調和関数であり、

$$Y_{lm}(\theta, \phi) = A P_{lm}(\cos \theta) e^{im\phi}, \quad A = \text{正規化定数} \quad (6.5)$$

である。ここで $P_{lm}(\cos \theta)$ は Legendre の陪関数である。(6.4) は $Y_{lm}(\theta, \phi)$ が演算子 \mathbf{L}^2, L_x の共通の固有関数 (同時固有関数ともいう) であることを示している。

(6.1) で与えられた L_x, L_y, L_z は互いに交換しないで、つぎのような交換関係にしたがう。

$$[L_x, L_y] = i\hbar L_z, \quad [L_y, L_z] = i\hbar L_x, \quad [L_z, L_x] = i\hbar L_y \quad (6.6)$$

ここで、 A, B を演算子として交換子 $[A, B]$ を

$$[A, B] = AB - BA \quad (6.7)$$

で定義している.

ところで L_x, L_y, L_z は互いに交換しないが, 軌道角運動量の 2 乗 \mathbf{L}^2 と L_x (または L_y あるいは L_z) は交換する. すなわち,

$$[\mathbf{L}^2, L_x] = 0 \quad (6.8)$$

このとき, 演算子 \mathbf{L}^2 と L_x の共通の固有関数が存在する. それが球面調和関数 $Y_{lm}(\theta, \phi)$ であった.

古典力学では角運動量とは軌道角運動量のことだが, 量子力学では例えば, 電子のような粒子はそれが静止しているとき, すなわち軌道角運動量が 0 のときでも固有の角運動量 (intrinsic angular momentum) をもっていて, それをスピン角運動量という.

7 補遺 2 2次元ラプラス演算子の極座標表示の一般的な導出

この補遺 2 では教育的な観点から 2 次元ラプラス演算子の極座標表示の一般的な導出を示す [8].

2 変数 x, y の関数 $u = u(x, y)$ の x, y での 1 階の偏導関数を極座標 r, θ の偏導関数で表せば, 2 節の (2.12), (2.13) から

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \cos \theta \frac{\partial u}{\partial r} - \frac{\sin \theta}{r} \frac{\partial u}{\partial \theta}, \quad (7.1)$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \sin \theta \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{\cos \theta}{r} \frac{\partial u}{\partial \theta} \quad (7.2)$$

である.

さらに関数 u の x での 2 階の偏導関数は

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)$$

であるから, いま $v = \frac{\partial u}{\partial x}$ とおけば,

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} &= \cos \theta \frac{\partial v}{\partial r} - \frac{\sin \theta}{r} \frac{\partial v}{\partial \theta} \\ &= \cos \theta \frac{\partial}{\partial r} \left(\cos \theta \frac{\partial u}{\partial r} - \frac{\sin \theta}{r} \frac{\partial u}{\partial \theta} \right) - \frac{\sin \theta}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\cos \theta \frac{\partial u}{\partial r} - \frac{\sin \theta}{r} \frac{\partial u}{\partial \theta} \right) \\ &= \cos \theta \left[\cos \theta \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} - \sin \theta \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \right) \frac{\partial u}{\partial \theta} - \frac{\sin \theta}{r} \frac{\partial^2 u}{\partial r \partial \theta} \right] \\ &\quad - \frac{\sin \theta}{r} \left[\frac{\partial \cos \theta}{\partial \theta} \frac{\partial u}{\partial r} + \cos \theta \frac{\partial^2 u}{\partial \theta \partial r} - \frac{1}{r} \left(\frac{\partial \sin \theta}{\partial \theta} \right) \frac{\partial u}{\partial \theta} - \frac{\sin \theta}{r} \frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} \right] \\ &= \cos^2 \theta \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{2 \cos \theta \sin \theta}{r^2} \frac{\partial u}{\partial \theta} - \frac{2 \cos \theta \sin \theta}{r} \frac{\partial^2 u}{\partial r \partial \theta} + \frac{\sin^2 \theta}{r} \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{\sin^2 \theta}{r^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} \end{aligned} \quad (7.3)$$

また関数 u の y での 2 階偏導関数は

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)$$

であるから、いま $w = \frac{\partial u}{\partial y}$ とおけば、

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} &= \sin \theta \frac{\partial w}{\partial r} + \frac{\cos \theta}{r} \frac{\partial w}{\partial \theta} \\
 &= \sin \theta \frac{\partial}{\partial r} \left(\sin \theta \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{\cos \theta}{r} \frac{\partial u}{\partial \theta} \right) + \frac{\cos \theta}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{\cos \theta}{r} \frac{\partial u}{\partial \theta} \right) \\
 &= \sin \theta \left[\sin \theta \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \cos \theta \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \right) \frac{\partial u}{\partial \theta} + \frac{\cos \theta}{r} \frac{\partial^2 u}{\partial r \partial \theta} \right] \\
 &\quad + \frac{\cos \theta}{r} \left[\frac{\partial \sin \theta}{\partial \theta} \frac{\partial u}{\partial r} + \sin \theta \frac{\partial^2 u}{\partial \theta \partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \cos \theta}{\partial \theta} \frac{\partial u}{\partial \theta} + \frac{\cos \theta}{r} \frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} \right] \\
 &= \sin^2 \theta \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} - \frac{2 \cos \theta \sin \theta}{r^2} \frac{\partial u}{\partial \theta} + \frac{2 \cos \theta \sin \theta}{r} \frac{\partial^2 u}{\partial r \partial \theta} + \frac{\cos^2 \theta}{r} \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{\cos^2 \theta}{r^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2}
 \end{aligned} \tag{7.4}$$

したがって

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} \tag{7.5}$$

が得られる。

この導出からもわかる通り、2次元のラプラス演算子の極座標表示をまともに計算したとしてもそれほど複雑ではないが、2節で求めた導出がより簡明であることはわかるだろう。

謝辞

中西 襄先生には問題のはじめから終わりまでご教示いただき、またこのエッセイを仕上げる段階においてもコメントをいただきました。深く感謝します。しかし、文責は著者（矢野）にあることはいまでもありません。

(2017.11.20)

参考文献

- [1] 矢野 忠, ラプラス演算子の極座標表示, 研究と実践 (愛数協), 第 25 号 (1988) 16-29
- [2] 矢野 忠, 『数学散歩』 (国土社, 2005) 109-118
- [3] 矢野 忠, 『物理数学散歩』 (国土社, 2011) 38-47
- [4] A. Erdélyi (ed.), *Higher Transcendental Functions*, Vol. II (McGraw-Hill, 1953) 232-235
- [5] 中西 襄, 『微分方程式』 (丸善出版, 2016) 127-130
- [6] 高橋健人, 『物理数学』 (培風館, 1958) 100-101
- [7] 佐々木重吉, 『微分方程式概論』 下 (槇書店, 1973) 149 - 151
- [8] 高木貞治, 『解析概論』 改訂第三版 (岩波書店, 1983) 61

微分をして積分を求める 1

矢野 忠¹

How to Differentiate Parameters under the Integral Sign 1

Tadashi YANO²

1 はじめに

このエッセイはすでに「研究と実践」（愛数協）に掲載されたものである [1]. 「研究と実践」の読者は小学校の先生が中心であるので、あまりその広がり期待できなかった。このたび、旧稿を改訂してより広い読者層を期待して、「数学・物理通信」に掲載する。改訂の主な点は補遺をつけ加えたことである。また Feynman の著書の引用した翻訳部分に原書から補足の英語を挿入した。これによって Feynman の意図がもっと正確に伝わることを期待する。

このエッセイのタイトル「微分をして、積分を求める」を見たら、それは当然だと言われるかもしれない。積分は微分の逆演算だからである。しかし、ここで述べようとするのは、そういった微積分法の本質に触れたことではない。一言断わっておく。

R.P. Feynman はアメリカの著名な物理学者で、アメリカの J. Schwinger および日本の朝永振一郎氏とのノーベル賞の共同受賞者でもある。彼の自伝『ご冗談でしょう、ファインマンさん』[2] はとても面白い本で、読んでみると腹を抱えて笑い出してしまうたり、くすくすと笑わずにはいられないところが多い。しかし、中には真面目で私たちの役に立つと思われる箇所もある。

「毛色の違った道具」という章の一部を引用してみよう。「ウッズの本には積分記号の中で係数（パラメーター：引用者補足）を微分する方法 (how to differentiate parameters under the integral sign : 引用者挿入) も出ていたが、あれだって一種の演算だ。ところが大学ではあんまり教えないし、強調もしない。僕はウッズの本のおかげでその方法の使い方を覚え、それからもずっと馬鹿の一つ覚えみたいに、あれを繰り返し役に立ててきた。何しろ本を読んで覚えた自己流だから、僕のは随分へんてこな積分法だったと思う。MIT やプリンストンで、学生たちがある種の積分をやるのにさんざん苦勞したのは、学校で習った標準の積分法ではできない部分があったからだ。それが線積分（周回積分 contour integral: 引用者挿入）みたいな問題であれば、彼らはわかったに違いないし、簡単な級数展開なら、これもできたはずだ。ところがその彼らがどうしてもできない積分の問題があって、すったもんだやっていると、そこへ僕が現れて、積分記号の中で微分してみせる。そうするとたいていうまくいくのだ。そこで僕は積分なら何でもできる男として有名になってしまった。何のことはない。僕の使う道具が、他の連中とちょっと違っていただけのことだ。だから連中が自分の道具では解けない問題にぶつかると、毛色の違う道具をもった僕のところにお鉢がまわってきたというわけである」

Feynman の使った方法がどんなものか、特にどんな積分を求めるときに用いられたか。具体例を知りたいものだ。そうすれば、僕たちも Feynman の何分の一かは賢くなれるだろうに。Feynman はいくつかの物理の本を書いていて、それらはとても興味深い、あまりその数学のテクニクについては触れていないようだ。Feynman に『物理数学』の本を書いて欲しいと思う。しかし、それはもう駄目かもしれない。彼は現在病気だという³。

¹元愛媛大学工学部

²yanotad@earth.ocn.ne.jp

³Feynman は 1988.2.15 に病気で亡くなった。

2 積分記号下での微分による積分

ここでは、よく知られた例ではあるが、数学の本とか授業では学ばなかった、Woods-Feynman 流の積分の仕方を述べてみよう⁴。[5]にある簡単な例から始めよう。まず次の定積分はすでに分かっているものとする。

$$\int_0^{\infty} e^{-x^2} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \quad (2.1)$$

いま $x = \sqrt{a}u$ とおくと、

$$\sqrt{a} \int_0^{\infty} e^{-au^2} du = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \quad (2.2)$$

であるから、

$$I(a) = \int_0^{\infty} e^{-au^2} du = \frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{a}} \quad (2.3)$$

となる。つぎに定積分

$$\int_0^{\infty} u^2 e^{-au^2} du$$

を求めることを考えよう。求める積分は $I(a)$ を $-a$ で微分したものであるから、

$$\begin{aligned} \frac{dI(a)}{d(-a)} &= \int_0^{\infty} u^2 e^{-au^2} du \\ &= \frac{d}{d(-a)} \left(\frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{a}} \right) \\ &= -\frac{\sqrt{\pi}}{2} \frac{d}{da} (a^{-1/2}) \\ &= \frac{\sqrt{\pi}}{4} \frac{1}{a^{3/2}} \end{aligned} \quad (2.4)$$

したがって

$$\int_0^{\infty} u^2 e^{-au^2} du = \frac{\sqrt{\pi}}{4a^{3/2}} \quad (2.5)$$

が得られる。さらに、上式の両辺を $-a$ で微分して

$$\int_0^{\infty} u^4 e^{-au^2} du = \frac{d}{d(-a)} \left(\frac{\sqrt{\pi}}{4a^{3/2}} \right) = \frac{3\sqrt{\pi}}{8a^{5/2}} \quad (2.6)$$

が得られる。このように微分をパラメーター $-a$ で何回か行うことによって

$$\int_0^{\infty} u^{2n} e^{-au^2} du, \quad n = 1, 2, \dots$$

の積分を行うことができる [6]。

実は積分記号下でのパラメーターでの微分による積分の仕方は有名な朝永の量子力学の本にエネルギー等分配の法則を証明するときに使われていた方法であった [7]。

このような積分法について私のはっきり意識したのは原島鮮著『初等量子力学』[8]の p.240 に出ている脚注を見てであった。このとき、すでに教師となって何年かたっていた。[8]の p. 240 には

$$\begin{aligned} \int_0^{\infty} x^4 e^{-x} dx &= 24 \\ \int_0^{\infty} x^5 e^{-x} dx &= 120 \end{aligned}$$

⁴これは Feynman が Woods [3] のテキストを彼の高校時代に学んで、その後の積分の際にもっぱら使ったという話から、ストログッツ [4] はこういう用語を用いている。もちろん、積分記号下でのパラメーターでの微分による定積分は Woods や Feynman の発明ではない。

を求めるために,

$$\int_0^{\infty} e^{-ax} dx = \frac{1}{a} \quad (2.7)$$

を a で次々と微分して行って, その後で $a = 1$ とおくという例が挙げられている [9].

この型の積分が実際に現れる例として放射性元素の平均寿命 [10] を求める計算がある. 放射性元素の原子核の数 N はその時間的な変化を微分方程式

$$\frac{dN}{dt} = -\lambda N \quad (2.8)$$

によって与えられる. ここで, λ は単位時間あたりに原子核が崩壊する確率で, 崩壊定数といわれている. これは原子核の種類によって異なるが, 原子核の種類が決まれば, 決まった数値をとる定数である.

この微分方程式は変数分離型であるので解はすぐに得られて

$$N(t) = N_0 e^{-\lambda t} \quad (2.9)$$

である.

この崩壊の法則にしたがう, 放射性原子核の平均寿命 τ は

$$\tau = \frac{\int_0^{\infty} tN(t)dt}{\int_0^{\infty} N(t)dt} \quad (2.10)$$

で定義される.

この平均寿命の定義に解 $N(t) = N_0 e^{-\lambda t}$ を代入すれば, この放射性元素の平均寿命 τ は

$$\tau = \frac{\int_0^{\infty} t e^{-\lambda t} dt}{\int_0^{\infty} e^{-\lambda t} dt} \quad (2.11)$$

となる. ここで分子と分母の積分をすることが必要である. ところが分母の積分は

$$\int_0^{\infty} e^{-\lambda t} dt = \frac{1}{\lambda} \quad (2.12)$$

とすぐ求められるから, このとき, 分子の積分をつぎのように行う. すなわち分母の積分の両辺を $-\lambda$ で微分すれば

$$\begin{aligned} \int_0^{\infty} t e^{-\lambda t} dt &= \frac{\partial}{\partial(-\lambda)} \int_0^{\infty} e^{-\lambda t} dt \\ &= \frac{\partial}{\partial(-\lambda)} \left(\frac{1}{\lambda} \right) \\ &= \frac{1}{\lambda^2} \end{aligned} \quad (2.13)$$

したがって, いま求めようとしていた放射性元素の平均寿命 τ は

$$\tau = \frac{\int_0^{\infty} tN(t)dt}{\int_0^{\infty} N(t)dt} = \frac{1}{\lambda} \quad (2.14)$$

となる. 蛇足ながら, 分子の積分は部分積分を行っても求められることをつけ加えておこう.

さらにいくつかの例を挙げておこう. 『固体物理学入門』(上) [11] にはつぎの積分

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2 e^x}{(e^x + 1)^2} dx = \frac{\pi^2}{3} \quad (2.15)$$

を求めるには既知の定積分

$$\int_0^{\infty} \frac{x}{e^{ax} + 1} dx = \frac{\pi^2}{12a^2} \quad (2.16)$$

をパラメーター a で微分して $a = 1$ とおけばよいと述べられている⁵.

最後にもう一つだけ例を挙げると [12] には

$$\int_0^{\infty} x^2 \exp[-i(p^2 + \Lambda)x] dx = \frac{2i}{(p^2 + \Lambda - i\epsilon)^3} \quad (2.17)$$

を求めるのに,

$$\int_0^{\infty} \exp[-i(p^2 + \Lambda)x] dx = \frac{-i}{p^2 + \Lambda - i\epsilon} \quad (2.18)$$

を Λ で 2 回微分して求めるという例がある.

3 おわりに

ここに紹介した例はすべて指数関数を含んだ定積分である. このようなパラメーターで微分することによって定積分の値を求めるこの方法は指数関数を含んだ定積分 [13] のときに威力を発揮することが分かる.

私の知っている例はこれだけだが, 他のどんな場合にパラメーターで微分することによって定積分が求められるのだろうか. 他の例を知りたいものである. しかし, まっとうな数学とか物理学の講義でこのやり方を聞いた記憶がないのは何故なのだろうか.

(付記) 高木貞治『解析概論』[14]に「積分記号下での微分積分」という節があるのを後で知った. 恥ずべきは私の不勉強である.

(1987.11.17) (2002.2.7 改訂)(2017.10.14 三訂)

4 補遺 (2.15) の導出

積分記号内のパラメータで微分によって定積分 (2.15) を求める.

積分

$$\int_0^{\infty} x e^{-ax} dx = \frac{1}{a^2} \quad (4.1)$$

を用いると

$$\begin{aligned} \int_0^{\infty} \frac{x}{e^x + 1} dx &= \int_0^{\infty} (x e^{-x} - x e^{-2x} + x e^{-3x} - \dots) dx \\ &= \frac{1}{1^2} - \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} - \frac{1}{4^2} + \frac{1}{5^2} - \dots \\ &= \frac{\pi^2}{12} \end{aligned} \quad (4.2)$$

ところでいま求めた定積分 (4.2) で $x = au$ とおけば

$$\int_0^{\infty} \frac{au}{e^{au} + 1} d(au) = \frac{\pi^2}{12} \quad (4.3)$$

であるから

$$\int_0^{\infty} \frac{x}{e^{ax} + 1} dx = \frac{\pi^2}{12a^2} \quad (2.16)$$

が得られる⁶. この定積分をパラメータ a で両辺を微分して, $a = 1$ とおけば, つぎの定積分の公式

$$\int_0^{\infty} \frac{x^2 e^x}{(e^x + 1)^2} dx = \frac{\pi^2}{6} \quad (4.4)$$

⁵(2.15) の導出は補遺を参照せよ.

⁶(4.2) で $x = au$ とおけば (2.16) が簡単に求められる. (2.16) を覚えるよりもこういう変数変換の技法を覚えた方が広がりがある.

が得られる.

ところで, (2.15) の被積分関数 $f(x) = \frac{x^2 e^x}{(e^x + 1)^2}$ は偶関数であることを次のようにして示すことができる.

$$\begin{aligned} f(-x) &= \frac{(-x)^2 e^{-x}}{(e^{-x} + 1)^2} \\ &= \frac{(x^2 e^{-x}) e^{2x}}{(e^{-x} + 1)^2 e^{2x}} \\ &= \frac{x^2 e^x}{(e^x + 1)^2} \\ &= f(x) \end{aligned}$$

したがって

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2 e^x}{(e^x + 1)^2} dx = 2 \int_0^{\infty} \frac{x^2 e^x}{(e^x + 1)^2} dx = \frac{\pi^2}{3} \quad (2.15)$$

が求められる [11].

参考文献

- [1] 矢野 忠, 微分をして積分を求める, 研究と実践 (愛数協) 第 24 号 (1988.3) 2-8,
『数学散歩』(国土社, 2005) 93-97 に収録, 『物理数学散歩』(国土社, 2011) 22-26 に再録
- [2] R.P. Feynman (大貫昌子 訳), 『ご冗談でしょう, ファインマンさん』I (岩波書店, 1986)
- [3] F. S. Woods, *Advanced Calculus*, (Ginn and Co., 1934) 141-163
- [4] ストロガッツ (南條郁子 訳), 『ふたりの微積分』(岩波書店, 2012) 44-45, 59-61
- [5] 原島鮮, 『熱力学・統計力学』改訂版 (培風館, 1978) 161
- [6] 矢野 忠, Feynman の積分法と $\int_0^{\infty} x^s e^{-ax^2} dx$, 研究と実践 (愛数協), 第 96 号 (2007.12) 17-22,
微分をして積分を求める 2, 数学・物理通信, 7 巻 10 号 (2017.12) 2-8 (旧稿の改訂版)
- [7] 朝永振一郎, 『量子力学 I』第 2 版 (みすず書房, 1969) 5
- [8] 原島鮮, 『初等量子力学』改訂版 (裳華房, 1986) 240
- [9] 矢野 忠, 微分をして積分を求める 3, 数学・物理通信, 投稿準備中
- [10] 大山彰, 『現代原子力工学』第 2 版 (オーム社, 1985) 32
- [11] C. Kittel (宇野, 津屋, 森田, 山下 訳), 『固体物理学入門』(上) 第 7 版 (丸善出版, 1998) 171
- [12] 西島和彦, *Fields and Particles* (Benjamin, 1969) 178-179 第 7 版 (丸善, 1998) 171
- [13] 和達三樹, 『物理のための数学』(岩波書店, 1983) 218-219
- [14] 高木貞治, 『解析概論』改訂第 3 版 (岩波書店, 1961) 162-171

「フィボナッチ数列の拡張」へのコメント

武藤 徹¹

A Comment on “Extension of Fibonacci’s Sequence”

Tohru MUTOH²

1 はじめに

数学・物理通信, 6巻1号に「フィボナッチ数列の拡張」というタイトルの論文を載せましたが, この中で証明抜きで n を法とするフィボナッチ数列について紹介しました. その証明がわかりましたので, コメントとして一例を示します.

2 5を法とする場合

たとえば, 5を法とするとフィボナッチ数列は20を法とする循環数列となります.

0112303314044320224101123033...

下のカッコの部分はくりかえしの部分を示しています.

したがって, $f_1 = 1, f_2 = 1, \dots, f_{20} = 0, f_{21} = 1, \dots$ となります. このことは経験的にはわかっていたのですが, その証明を与えてはいませんでした.

以下はその証明です.

$$\begin{aligned} f_n &= f_{n-1} + f_{n-2} \\ &= f_2 f_{n-1} + f_1 f_{n-2} \\ &= f_2(f_{n-2} + f_{n-3}) + f_1 f_{n-2} \\ &= (f_2 + f_1) f_{n-2} + f_2 f_{n-3} \\ &= f_3 f_{n-2} + f_2 f_{n-3} \\ &= f_3(f_{n-3} + f_{n-4}) + f_2 f_{n-3} \\ &= (f_2 + f_3) f_{n-3} + f_3 f_{n-4} \\ &= f_4 f_{n-3} + f_3 f_{n-4} \\ &= \dots \\ &= f_{21} f_{n-20} + f_{20} f_{n-21} \\ &= f_{n-20} \end{aligned}$$

したがって, 5を法とするフィボナッチ数列は20を法とする循環数列となります. 他の場合も同様です.

¹ 数学思想史家

² mutoh.ab@wine.ocn.ne.jp

読者の声

Mails from Readers

1 齋藤宗孝さんから

date: 2017.10.8

御忙しい中、度々お邪魔して申し訳ございません。

数学・物理通信 7 巻 4, 6,7 号 (2017 年 9 月) に連載された世戸憲治先生の「誤解を招く弦振動の問題」を読んで、学生時代に購入した本 Arthur Gordon Webster “Partial Differential Equations of Mathematical Physics” を読み返して関連する事が書かれていることを知りました。そこに書かれた図式から記事と同じ結果が得られたので、読者の感想文として該当部分の翻訳をして、自分でも作図してみました。時間があれば読んで頂けるかも知れないと思い、図々しくもメール致しました。つまらない内容でたびたびメールして、本当に申し訳ありません。

齋藤宗孝 (元電気技術者)

2 編集者から

論文にも匹敵する量の文書を「読者の声」として齋藤宗孝さんから送っていただいた。論文ではありませんとの、注意書きがついたものであったが、次号の 7 巻 10 号に「読者の声」として掲載する。このような文書が今後も寄せられるとすれば、編集上の取り扱いが今後難しくなってくるかもしれない。(編集者 矢野)

編集後記

7巻8号に続けて、7巻9号を発行する。さらに、10号も続けて今月中に発行をするつもりである。そんなに気張らなくてもいいのではないかという気持ちは私自身にもある。だが、ことの成り行きでやはり10号を発行することになるだろう。これはひとえに読者である斎藤さんの長文の読后感想というか、読後の反応があったということに起因する。

この「数学・物理通信」も昨年の6巻5号で通巻50号を達成した後も順調に号数を伸ばしてきている。これも投稿者と読者とがあつてのことであり、感謝の念を深くする。これで今年中の65号達成もほぼ確実にってきた。

今年は秋がなくて夏から冬が来た感じもするのだが、そうはいうもののやはり秋がなかったわけではない。街路樹のイチョウとかポプラの紅葉もなかなか美しい。

8巻の発行は来年の3月を予定している。ご投稿をお願いします。

(矢野 忠)