

# 数学・物理通信

9 卷 8 号      2019 年 12 月

編集 新関章三・矢野 忠

2019 年 12 月 23 日

# 目次 (Contents)

1. 不協和曲線とオイラー格子からの <b>Bohlen-Pierce</b> 音律の導出	小方 厚	2
2. 鍵盤打楽器の固有振動 (1)	世戸 憲治	14
3. 気候を制御する人工衛星	富吉昇一	21
4. ある定積分の公式	矢野 忠	25
5. 編集後記	矢野 忠	28
1. <b>Derivation of the Bohlen-Pierce Scale from Dissonance Curve and Euler Lattice</b>	<b>Atsushi OGATA</b>	<b>2</b>
2. <b>Characteristic Oscillations of Keyboard Percussion (1)</b>	<b>Kenji SETO</b>	<b>14</b>
3. <b>A Satellite Controlling Climate</b>	<b>Shoichi TOMIYOSHI</b>	<b>21</b>
4. <b>Derivation of a Definite Integral Formula</b>	<b>Tadashi YANO</b>	<b>25</b>
5. <b>Editorial Comments</b>	<b>Tadashi YANO</b>	<b>28</b>

# 不協和曲線とオイラー格子からの Bohlen-Pierce 音律の導出

小方 厚<sup>\*1</sup>

## Derivation of the Bohlen-Pierce Scale from Dissonance Curve and Euler Lattice

Atsushi Ogata<sup>\*1</sup>

### 概要

現在のドレミ…という音階は、偶数次・奇数次を問わず、整数倍音(基音・2倍音・3倍音・4倍音…)をそなえた楽音に最適化されている。しかし閉管楽器の楽音には、偶数次倍音は不在である。2倍音を持たないので、オクターブを音階の区切りとする必然性もない。このような楽音のために最適化した音律として、周波数比1以上3未満の範囲を13分割する純正律と平均律を、不協和曲線とオイラー格子を用いて導いた。こうして導出された音律は、1970年代に Bohlen と Pierce 等によって独立に提唱された音律と同じものである。

## 1 はじめに

現行の西洋音楽の、平均律、純正律、ピタゴラス音律などの音律は、基準とする音(主音)と、これと2倍の周波数を持つ音の間を12に分割している。これに対し Bohlen-Pierce 音律(以下 B-P 音階と略す)は主音とその3倍音の間を13分割する音律である。じつは音律ではなく、Bohlen-Pierce「音階」と呼ばれることが多いのだが、13の音からより少ない音を選んだ音階から作曲することが多いので、この原稿では B-P「音律」に統一する<sup>\*2</sup>。

Bohlen-Pierce 音律は1978年に H. Bohlen により [1]、同じ1978年に K. van Prooijen により [2] 独立に提唱された。さらに1984年の、これらと独立な M.V. Mathews, L.A. Roberts, J.R. Pierce の提唱が [3] 広く知られたため、Bohlen-Pierce 音律と呼ばれている。これらの提唱においては主音に対して3,5,7の周波数比を持つ3音から音律を導いている(同じ導出法で、周波数比4,5,6を持つ3音から出発すれば、オクターブを12分割する純正律・平均律などに至る)。

平均律に代表される現行の音律とそこから派生する音階は、楽音のスペクトルが基音、2倍音、3倍音、4倍音、5倍音…と、偶数倍音・奇数倍音のどちらも備え持っているときに、美しく響く。これに対し B-P 音律は楽音のスペクトルが基音、3倍音、5倍音…の奇数倍音のみを持ち、偶数倍音を欠くときに美しく響く。この事実は過去の B-P 音律の導出と紹介で明快に指摘されてきたとは言い難い。本稿では楽音のスペクトルが奇数波のみを持つ場合を検討し、B-P 音律に帰着させることを試みる<sup>\*3</sup>。

次の第2章では、現行の音律を導出する。まずスペクトルに奇数波・偶数波を併せ持つ楽音と、純正律長音階の構成音との、心理物理学的関係を「不協和曲線」として表示する。さらにオイラー格子を用い、これを理論的に音階へと発展させる。しかし管楽器のうちでも「閉管楽器」と呼ばれるグループの楽器の楽音は、基音、3倍音、5倍音…の奇数倍音だけを持つ。弦楽器でも奏法により、閉管同様のスペクトルを発生させることが可能である。

<sup>\*1</sup> 高エネルギー加速器研究機構 名誉教授。 E-mail: ogata@post.kek.jp

<sup>\*2</sup> 音律に対し、音律から実際に使う音高を並べたものを音階という。例えば、12音平均律という音律の中には、長音階・短音階などの音階がある。音階は音律の部分集合と言っても良い。

<sup>\*3</sup> 本稿の内容は文献 [4] に簡単に記述されている。

第3章ではこのような楽音のスペクトルを示す。第4章では第2章で紹介した方法を適用し、この偶数波を持たない楽音に対する不協和曲線を求める。第5章では不協和曲線に極小を与える周波数比からオイラー格子を導く。第6章では、第4章・第5章の結果に基づいて設計した、3倍音を擬オクターブとする、13音からなる純正律と平均律を示す。この13音から選んだ音を用いて、音階を構築することが可能である。最後の第7章では、この音律を実現すべき楽器と、必要になる楽譜について検討する。

## 2 オクターブを分割する純正律

### 2.1 不協和曲線からの長音階の導出

現行の長音階は、奇数次・偶数次のどちらの倍音も備えた楽音を前提としている。ここでは、このような楽音2音を同時に聞いたとき、これらが互いに心理物理学的に協和するために満たすべき周波数比から、純正律長音階を導く [4, 5, 6].

図1は2つの単一周波数音(純音)に対する不協和曲線、すなわちこれら2音を同時に聞いた時の不協和度を、2音の周波数差の関数として示したものである [5]。不協和度とは違和感と言っても良い\*4。この図が示すように、2純音の周波数が一致すれば不協和度はゼロであるが、周波数差が増すにつれ不協和度は増加する。具体的には、うなり (beat) を意識するようになる。しかし極大を過ぎると不協和度は減少し、ある程度周波数差が大きくなれば2音は干渉し難くなり、不協和度はゼロに漸近する。この、おおよそ非干渉となる周波数幅(臨界帯域幅)は純音の周波数の絶対値に依存する。図の横軸はこの臨界帯域幅 [5] で正規化してある。

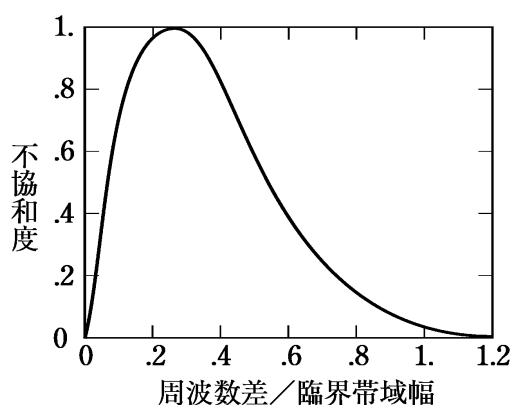


図1: 不協和曲線

ある純音と、それより高い純音を同時に聞いた時の不協和度  $D$ 。横軸は2音の周波数差を臨界帯域幅で正規化した値。

次に、この2純音の不協和度を、2つの楽音を同時に聞いた時の不協和度に拡張する。弦楽器・管楽器では図2に示すように弦あるいは気柱が振動体となる。振動は図のように分解することができ、楽音は一般に奇数次・偶数次の倍音から構成される(実は図右の両端を閉じた管は楽器になり得ない。これについては後述する)。振動体において、振動の振幅が最大となる箇所を「腹」、振動しない部分を「節」という。

2つの楽音を鳴らしたときは、基音(最低音)同士の不協和度を求めるだけでは不十分であって、楽器から出るすべての整数倍音が作る組み合わせについて不協和度を求め、それらを加えて2つの楽音の不協和度としなければならない。

図3の(a)-(d)の4つの図では、横軸は周波数すなわち音の高さである。管楽器あるいは弦楽器で、高さの異な

\*4 不協和度は曖昧な概念であるが、著者はファジィ数学を用いて定義できると考えている。

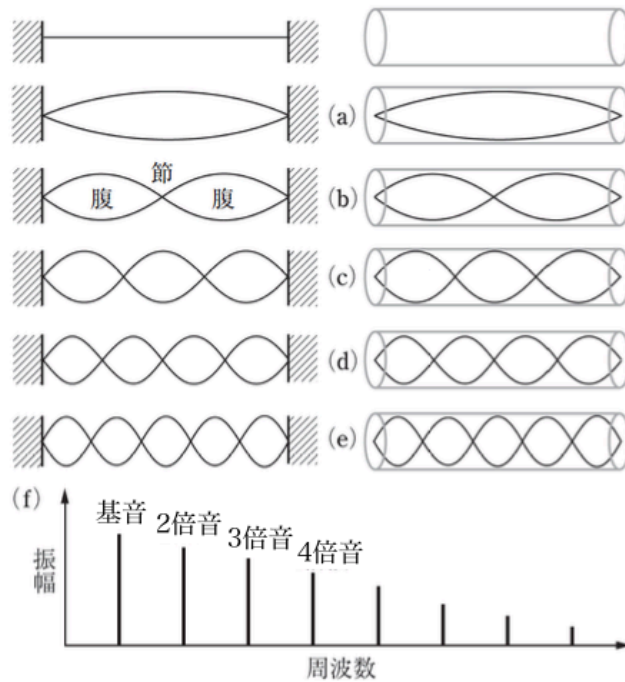


図 2: 弦楽器 (左)・管楽器 (右) からの整数倍音

(a)-(e) は両端を固定した弦の振動 (左) と、両端を閉じた管の中の空気の振動 (右). それぞれ基音, 2 倍音, 3 倍音, 4 倍音, 5 倍音を示す, (f) は周波数スペクトル.

る 2 音を同時に鳴らしたとして, 2 音のうち低音を出す楽器の周波数を大文字 I,II,III,IV,... 高音側の周波数を小文字 i,ii,iii,iv,... で表す. 奏者が (a) の周波数 I, i を持つ 2 音を出したつもりでも, 実際に楽器から出る 2 音は, それぞれが整数倍音 II,III,IV, ... および ii,iii,iv, を伴う. 整数倍音は横軸上に等間隔で並ぶが, i は I より高音すなわち周波数が大きいから, i,ii,iii,... 相互の間隔は I,II,III... の間隔よりも広い.

図 1 同様に, 図 3 (b) の純音 I,II,III,..., i,ii,iii, ... のそれぞれに不協和曲線が計算できる. これをもとの周波数スペクトルと重ねて, 模式的に図 3 (c) に示した. 基本波 I と基本波 i を同時に鳴らしたとき, i のために I がもたらす不協和度は, 図では i の位置における I の不協和曲線の高さである. これは図 3 (d) では上の図, I の右にある点線の高さに相当する. さらに例えば, 倍音 V と倍音 iii について考えると, 図においては, V のために iii がもたらす不協和度は, 図では V の位置における iii の不協和曲線の高さであり, 図 3 (d) では下の図, iii の右の点線の高さに相当する. このように, 不協和度に相当する点線の高さを, 低音側 (I,II,III,...) から高音側 (i,ii,iii,...), 高音側から低音側の 2 方向について, すべての組み合わせに対して求め, 高さを合計する.

2 つの楽音のうち低い方の高さを固定する (I を固定すれば, II,III,... の高さも自ずと固定する). この状態で他方の音高を連続的に掃引, すなわち 2 音の基本波間の周波数比を掃引して, 整数倍音 i,ii,iii,... と整数倍音 I,II,III,... との間の不協和度を合計する. そして 2 つの楽音の整数倍音間の不協和度を, 基本波周波数比の関数として示した, 不協和曲線を得る.

整数倍音の振幅は楽器により異なる. この計算では, 整数倍音は 6 倍音まで存在するとし, それらの振幅は公比 0.9 で減少するとした. すなわち, 基音の振幅を 1 とし, 2 倍音の振幅を 0.9, 3 倍音の振幅を 0.81, 4 倍音の振幅を 0.72... とした. また, 低音側の楽音 (基音) を 261Hz すなわち中央 C 音とした.

図 4 が計算結果である. 不協和度が小さいほど響きが良い. 横軸の周波数比は対数目盛りで 2 オクターブの範

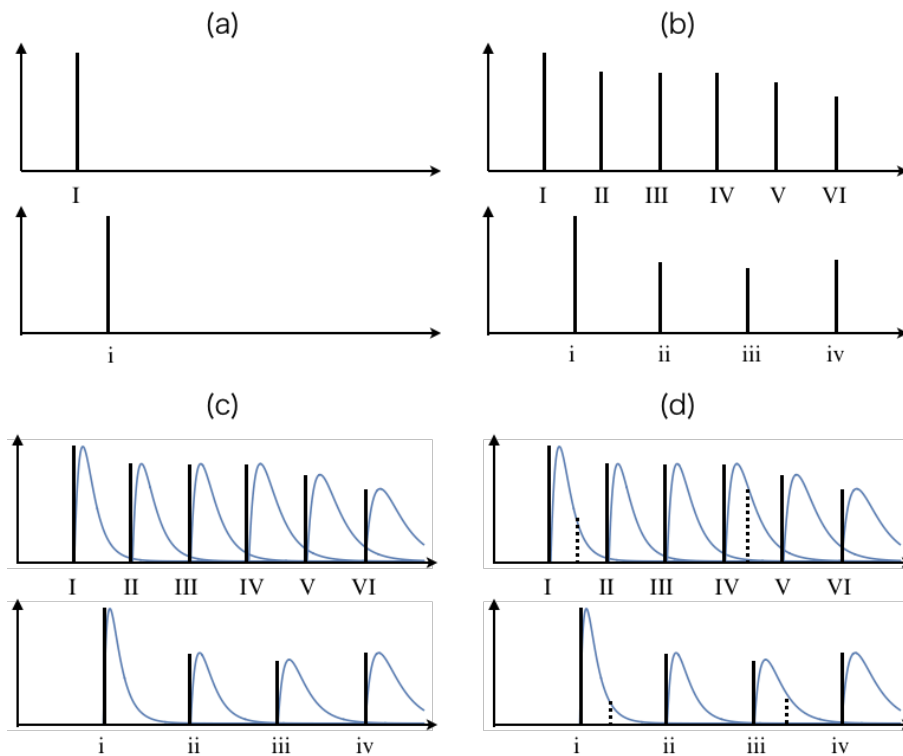


図 3: 高さの異なる, 奇数倍音・偶数倍音の両者をそなえた 2 音の不協和度

(a) 奏者が意図する音の周波数. (b) 実際に楽器から出る整数倍音列. (c) 個々の倍音の不協和曲線. (d) 点線が, 2つの整数倍音列間の相互作用がもたらす不協和度を表す. 2音が同時に出た時の不協和度はこれらの点線の高さの合計で与えられる.

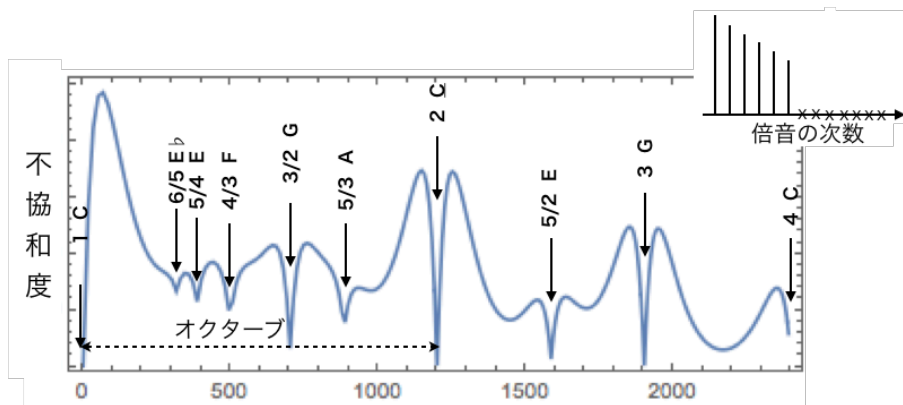


図 4: 楽音の不協和曲線

奇数倍音・偶数倍音の両者をそなえた 2つの楽音の不協和度の, ふたつの基音の周波数比に対する依存性. 横軸は対数目盛り. 矢印で曲線に極小値を与える周波数比と対応する楽音を示した. 右上のグラフは楽音のスペクトルで, "x"は該当する整数倍音の不在を示す.

囲を示しており、単位はセント\*5である。

周波数比が1なら同じ音、2なら1オクターブ離れた2音で、これらの場合は不協和度がゼロになる。この途中、1オクターブ(1200セント)の範囲で曲線が極小となる横軸の値は、 $6/5$ ,  $5/4$ ,  $4/3$ ,  $3/2$ ,  $5/3$ で、2音の周波数比が簡単な整数比で表せるときは協和度が良いという結果が得られた。1をC(あるいはド)とすればこれらの谷の音は純正律のEb, E(ミ), F(ファ), G(ソ), A(ラ)に対応する。音程で言えば短3度, 長3度, 完全4度, 完全5度, 長6度である。オクターブを超えた  $\dot{E}$ ,  $\dot{G}$ ,  $\dot{C}$ (オクターブ上のミ, ソ, その上のド)にも顕著な谷がみられる。

しかし長音階はCDEFGABである。音階ではCとEbの間にD, AとCの間にBという音があるにもかかわらず、図4ではここに極小はない。実際の長音階にD(レ)とB(シ)があるのは、CとE, AとCの間が開きすぎているとメロディが作りにくいからである。

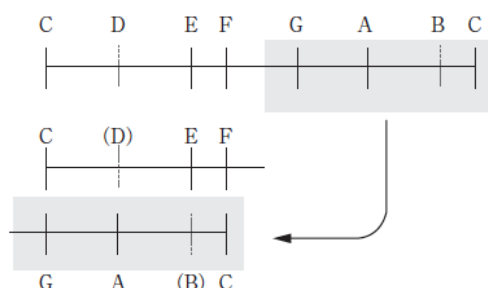


図5: CDEF(ドレミファ)を平行移動するとGABC(ソラシド)に重なる  
Aの位置とDの位置, Eの位置とBの位置が対応する。

それでは、CとE, AとCの間に1つつ音を入れるとして、どんな高さに入れば良いのだろうか。図5のように、長音階はテトラコルド構造\*6を持ち、ドレミファ(CDEFあるいはGABC)という音階をふたつオクターブに押し込んだかたちになっている。図5下のように、GABCをCDEFの下に並べて置いてみよう。そして、CE間では下のAに対応する位置、AC間では上のEに対応する位置に音を置き、それぞれDとBとする。すると、ドレミ…という長音階ができあがる。なお、周波数比 $6/5$ のEb音はCを主音とする短音階で用いられる。

## 2.2 オイラー格子

純正律の長音階はこのように不協和曲線から導かれる。しかし純正律という音律や転調についてはどう考えれば良いのだろうか。「オイラー格子」を用いてこの純正律の構造を説明してみよう [7]。

図6はオイラー格子を作る手順である。まず(a)のように数値1を表の中心とし、右方向には3倍し、左方向には3で割り、上方向には5倍し、下方向には5で割ることで各マスの数値を決める。すなわち素数3と5のべき数をそれぞれ横軸、縦軸に取る。次に縦・横の積で平面を埋める。この行列は上下左右に無限に続くが、図では1を中心に5行5列の範囲だけを取り出した、

つぎに(b)のように、行列(a)の各数値に2の累乗をかけたり、累乗で割ったりして、数値 $R$ が区間 $1 \leq R < 2$ に入るように調節する。(c)では中心を主音Cとし、行列(b)の各数値をオクターブ以内の主音に対する周波数比とみなして音名に書き変えている。隣り合うマスの音程は、右方向には完全5度上がり、左方向には完全5度下

\*5 セントは音程の単位である。音程とは2音の音高の違い、すなわち2音の周波数比に他ならない。セント $c$ と周波数比 $R$ は $c = 1200 \log R / \log 2$ の関係がある。オクターブは1200セント、平均律では半音は100セント、全音は200セントである。

\*6 古代ギリシャに由来する4つの音を作る音列。





あって、違う音高を持つ。このように転調すれば純正律では音数が多くなる。有名な田中正平の純正律オルガンはオクターブに 26 のキーを備えていたが、それでも転調できる調性は限られていた。

現行の純正律のオイラー格子は周波数 2 倍音を区切りとし、3 倍音と 5 倍音を 2 次元に展開して得られた。純正律に先立つ最初の音律は、3 倍音だけを考慮したピタゴラス音律であった。ピタゴラス音律のオイラー格子は図 6 の 3 行目だけを取り出し、左右に伸ばした 1 次元の紐である。

### 3 奇数次倍音しか持たない楽器

現行の長音階は、奇数次・偶数次の両方の倍音もあわせ持つ音楽に対して、最適化されている。これと異なるスペクトルを持つ楽器ではそれなりの、長音階とは異なる音階を用いるほうが自然である。その好例が、ガムランの諸楽器とその音階である [4]。

より身近な例では、閉管楽器が奇数次倍音しか持たないとされている。

すでに図 2 右に、管楽器中の空気の振動のモードを示した。しかしこの図の管は両側が閉じていて、これでは空気が出入りできない。実際の管楽器の管は、両端が開いている「開管」か、管の片方の一端が閉じた「閉管」のどちらかである。

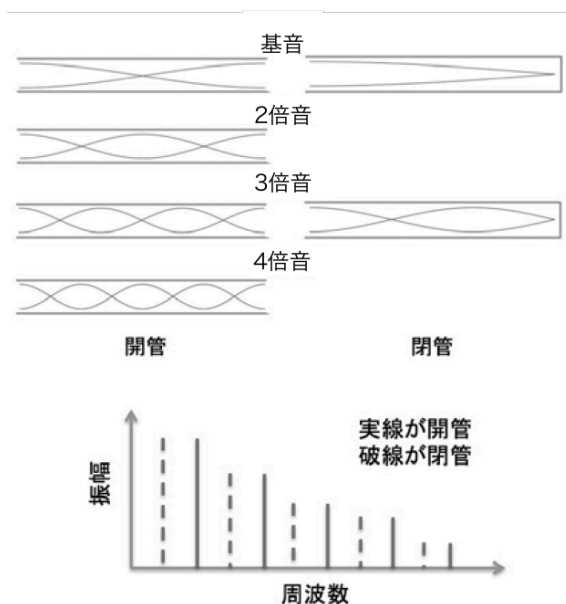


図 8: 開管と閉管

管楽器の、開管と閉管における空気の振動モード。下は同じ長さの開管と閉管のスペクトル。実線が開管、点線が閉管。

図 8 右の閉管では、管の長さが左の開管と同じでも、振動の波長は開管の場合の 2 倍、音の周波数は半分・高さは 1 オクターブ下になる。管の中の空気の振動には図が示すように、閉管では奇数次倍音しか存在せず、偶数次倍音は存在しない。同じ長さの管でも、開管と閉管では、周波数スペクトルに図のような違いが生ずる。

管楽器の中にはリードを持つものがあり、この場合は大半の時間、リードが管を閉じている。これらは一般に閉管とみなされる。クラリネットは典型的な閉管楽器であるとされる。しかしスペクトルを測ってみると、存在しないはずの偶数次倍音も意外に大きい [8]。より典型的な閉管楽器はパンフルートである。図 9(a) に示した学童用のパンフルート (キクタニミュージック PF-8L) の管の 1 本について、着脱可能な底 (キャップ) を、着けた場合 (閉管) と外した場合 (開管) の比較を図 (b)-(c) に示す。痕跡程度の偶数次倍音を無視すれば、図 8 と同様に、パン

フルートの閉管スペクトル線 (b) は開管のスペクトル線 (c) の間隙に存在する。

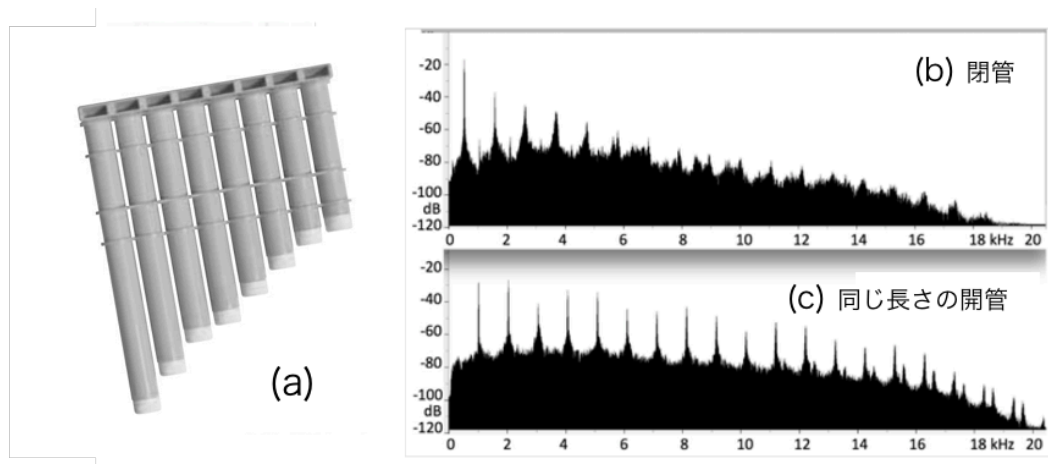


図 9: (a) 学童用パンフルート . (b)(c) パンフルートにおける同一長の閉管 (b) と開管 (c) のスペクトル

弦楽器の場合はどうであろうか. 図 2 左 (a) において, 基本波における腹の位置を弾いたとき, すなわち弦の中央を弾いたときは, 高調波において中心を節とするモード (b),(d),... は立たない, すなわち偶数倍音は出ないと推測できる. 図 10 は, ギターで, 弦長を 2 分する位置を弾いた時のスペクトル (a) を, ブリッジ側から 1/5 の位置を弾いた時 (b) と比べたものである. 図 9 のパンフルートの場合ほど顕著ではないが, 図 10(a) では 7 倍音あたりまでは奇数倍音が優勢である.

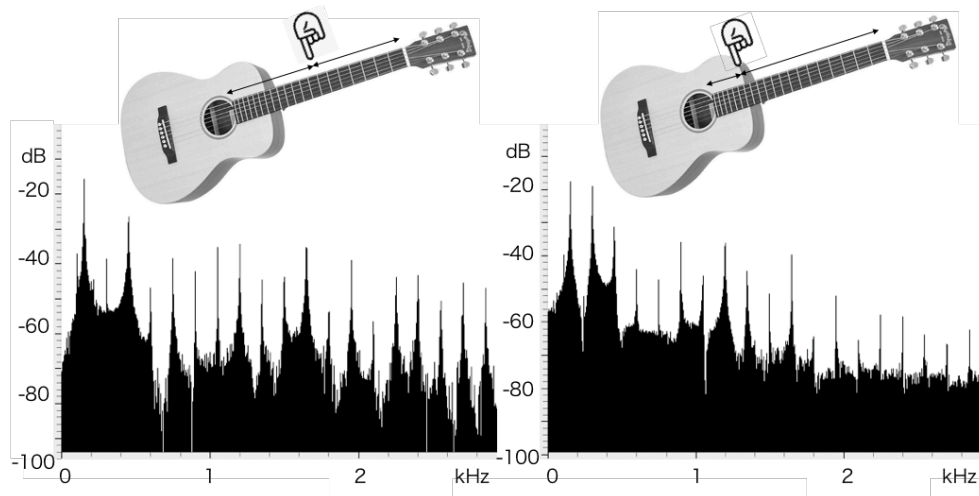


図 10: ギターをはじく位置によるスペクトルの違い

(a) 弦長を 2 分する位置, (b) 弦長をブリッジ側で 5 分する位置をはじいた時.

#### 4 奇数次倍音しか持たない楽音の不協和曲線

第 3 章に示したような奇数次倍音のみを持つ楽音を想定し, 図 4 に相当する不協和曲線を計算してみよう. ここでは第 13 次までの奇数次倍音の存在を仮定し, 基本波の振幅を 1 とした時に, 3 倍音は 0.9, 5 倍音は 0.81, 7 倍音は 0.72, ... と, 公比 0.9 の等比数列で高調波の振幅が減少すると仮定した. この結果が図 11 である.

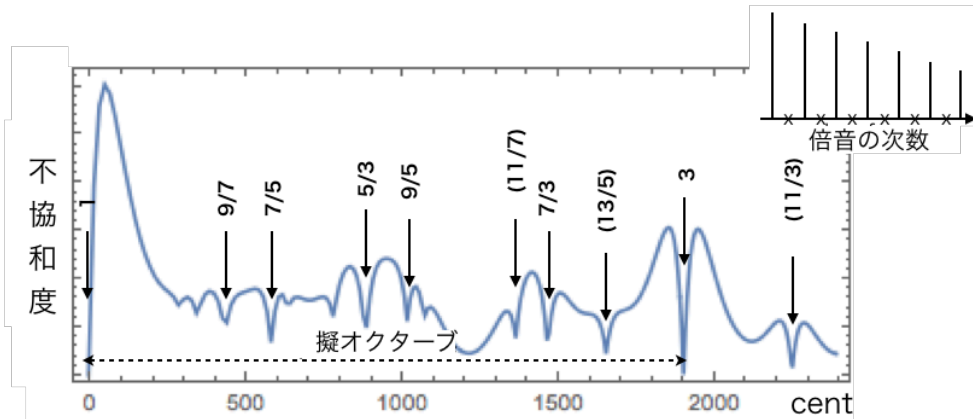


図 11: 奇数次倍音しか持たない楽音の不協和曲線

基本波と 3, 5, 7, 9, 11, 13 次高調波を仮定. 横軸は対数目盛り. 矢印で曲線に極小値を与える周波数比を示した. 右上は楽音のスペクトルで, "x" は整数倍音の不在を示す.

図 4 との大きな違いは, 周波数比 2 すなわち 1200 セントで, 不協和がゼロとならないことである. これは 2 倍音が存在しないためである. Sethares[6] は彼の著書の中で, 楽音の持つスペクトルで, 基本波の次の高周波成分の基本波に対する周波数比を  $R$  ( $R > 1$ ) とすれば,  $R$  が擬オクターブ (音階を作るときの区切り) を与えることを示している. 普通の楽器では  $R = 2$  であるから, 周波数比 2 が (擬ではなく普通の) オクターブを与える. これに対し閉管スペクトルを持つ楽器では  $R = 3$  すなわち周波数比 3, 換算すると 1901 セントが擬オクターブを与える.

図 4 において不協和度を極小とする周波数比を  $n/m$  と書けば,  $n, m$  は 3, 5, 7 の倍数である. 例外として  $11/7, 13/5, 11/3$  にも極小が存在するがこれは 13 次高調波まで計算に入れたためである.

## 5 素数 3・5・7 がつくる純正律のオイラー格子

第 2 章ではオクターブすなわち 2 倍音を区切りとする純正律を, 5 倍音と 3 倍音を配したオイラー格子で表した. これに倣って, 3 倍音を区切りとする音律もオイラー格子で表してみよう.

図 12 において, (a) が出発点, (b) が完成形である. まず (a) のように数値 1 を表の中心とし, 右方向には 5 倍し, 左方向には 5 で割り, 上方向には 7 倍し, 下方向には 7 で割ることで十字の各マスの数値を決める. すなわち, 素数 5 と 7 のべき数をそれぞれ横軸, 縦軸にとる. 次に縦・横の積で残りのマスを埋める. この行列は上下左右に無限に続くが, ここでは 1 を中心に 5 行 5 列の範囲だけを取り出し, 検討の対象とする. これは音律の音数を 25 以下に制限することに相当する.

次に (b) のように, 行列 (a) の数値に 3 の累乗をかけたり, 3 の累乗で割ったりして, マスの数値  $R$  が  $1 \leq R < 3$  に収まるように調整する. 第 2 章で純正律をつくるために 2 の累乗で乗除して, 数値を  $1 \leq R < 2$  の範囲に収めたのと同様な操作である. 点線の四角枠と丸四角枠で囲んだ数については後で述べる.

## 6 音律と音階の設計

第 5 章で得られた図 12(b) の 25 音を, 対数軸上にセントを目盛りとして, 周波数比とそのセントへの換算値とともに, 図 13 に示した.

音律の設計には, いくつかの考え方がある. 表 12(b) の 25 音を, そのまま音律とするのも 1 つの考え方である

(a)					(b)				
49/25	49/5	49	245	1225	49/25	49/45	49/27	245/243	1225/729
7/25	7/5	7	35	175	63/25	7/5	7/3	35/27	175/81
1/25	1/5	1	5	25	27/25	9/5	1	5/3	25/9
1/175	1/35	1/7	5/7	25/7	243/175	81/35	9/7	5/7	25/21
1/1225	1/245	1/49	5/49	25/49	2187/1225	729/245	81/49	135/49	75/49

図 12: 素数 3-5-7 のオイラー格子

(a) 出発点. (b) 完成形. 点線の四角枠で囲んだのは音列 A, これに丸四角枠を加えると音列 B となる.

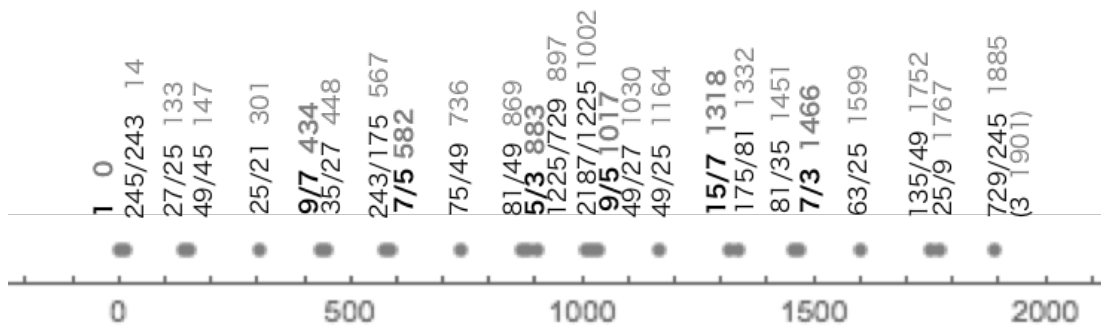


図 13: セント軸上の 3・5・7 純正律の構成音候補

[0, 1901) 区間が周波数 3 倍区間すなわち擬オクターブ. 丸が構成音の位置. 数値は周波数比およびそのセント値. ゴチック体は表 12 中心部の太線で囲んだ 7 音.

う. しかし楽器で演奏するには, 擬オクターブに 25 音は多すぎる.

表 12(b) と図 11 を見比べると, 不協和曲線に顕著な極小値を与えるのは, 表の中心部の太い線で囲んだ

$$A = (1, 9/7, 7/5, 5/3, 9/5, 15/7, 7/3),$$

の 7 音にすぎない. 表 12(b) ではこれらの 7 音を点線四角枠で囲んだ. 図 13 において, これらの音の周波数値とセント値をゴチックで強調した.

A に属する 7 音だけで音階を構成すると, 音の分布が偏ってしまい, メロディが作りにくい. そこで図 12 のオイラー格子上で A の音域に, 丸四角枠で囲んだ 6 音, すなわち中心”1”に関して対象な位置にある 3 音ずつを加えた. このように得られたのが, 次の音列,

$$B = (1, 27/25, 25/21, 9/7, 7/5, 75/49, 5/3, 9/5, 49/25, 15/7, 7/3, 63/25, 25/9),$$

である. これは B-P 音階に他ならない. この構成音を対数軸上にセントを目盛りとして図 14 の (2 つあるうちの) 上側の数直線上の点列で示す. 図 13 上では二つの点が接近した箇所がいくつか存在したが, 図 14 上では接近対のうちの一方を削除した結果, 点がほぼ等間隔に並ぶことになった.

音列 B が音階そのものであると考えても良い. また B を 13 音律とみなし, そこから図 7 にならってさらに音列を抽出して音階を作ることもできる.

図 14 の上側の点列は周波数比区間 [1, 3)(セント区間 [0, 1901)) にほぼ均等に分布している. それなら, むしろ分布を正確に平均して, 平均律をつくるという考え方もありうる. 図 14 下側の数直線の点列は, B を平均律化し

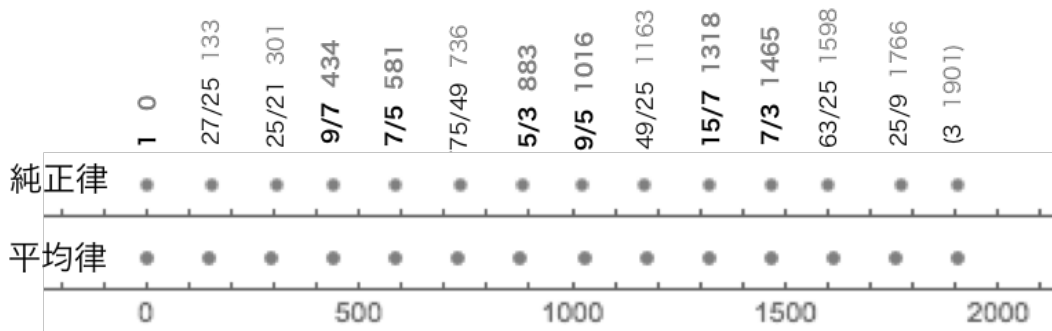


図 14: セント軸上の B-P 音階の構成音 (上の点列) と, その平均律近似 (下の点列) [0, 1901) 区間が周波数 3 倍区間すなわち擬オクターブ. ゴチック体は表 12 中心部の太線で囲んだ 7 音. 数値は周波数比とそのセント値.

た  $C$  の構成音の位置である. この平均律  $C$  の構成音数は 13 であり,  $i$  番目の構成音のセント値  $C_c(i)$  と周波数比  $C_R(i)$  は

$$C_c(i) = 1901i/13, \quad C_R(i) = 3^{i/13}, \quad i = 0, 1, 2, \dots, 12,$$

である.  $C$  に対して  $B$  を純正律とすることができる.

## 7 おわりに

B-P 音律で演奏するためには, まず楽器が必要である. アコースティックな楽器を制作する前に, 電子楽器で様子をみるのが適切であろう. 著者は Pure Data という言語を用い, midi キーボードからこの音階を発生するプログラムを作った.

Pure Data は 1990 年代にミラー・パケット (Miller Puckette) が開発したデスクトップ・ミュージックとマルチメディア作成用のオープン・ソースのビジュアルプログラミング言語である. その対象領域も設計も商用言語 Max に似ており, ある程度互換性がある. Pure Data Japan のホームページ [9] からダウンロードが可能で, Mac, Windows, Linux の各プラットフォームで動作する.

しかし微妙な音高・音色の変化のコントロールを求めるのであれば, アコースティック楽器が必須である. また本稿の論考のきっかけとなったのは, パンフルートのスペクトルであった. DIY でこの音律向けのパンフルートを製作するのは難しいことではない.

管楽器だけでなく, 弦楽器も使えば, 「管弦楽」が楽しめる. 図 10 に示したように, 弦楽器の「腹」から振動を励起すれば, 閉管楽器同様に奇数次倍音だけの (すくなくとも奇数次倍音が優勢な) スペクトルを持つ音が得られる. しかしギター属, バイオリン属等の既存の弦楽器では, 弦を抑え, 弾き, 擦る位置に自由度が低く, 常に腹から振動を励起するのは困難と思われる. ハープ属の, 1 音 1 弦の楽器が, われわれの目的に向いている. ツィンパロム, ライアー, ダンバウなどの民族楽器が参考になりそうだ.

この音律ないし音階を用いた音楽を記録するには, 新しい記譜法を案出する必要があるが, すでにいくつかの提案がなされている [10].

B-P 音律を用いた音楽を評価することは数学・物理の範疇にはない. Bohlen-Pierce Scale をキーワードとして Youtube を検索すれば, 多数の楽曲が見つかるので<sup>\*7</sup>, 興味をお持ちの方は試聴していただきたい.

\*7 例えば [https://youtu.be/MtLiE\\_HtE1k](https://youtu.be/MtLiE_HtE1k), <https://youtu.be/sd1b9Lh8iFA>

## 参考文献

- [1] H. Bohlen, "13 Tonstufen in der Duodezime", *Acoustica* : Hirzel Verlag - Stuttgart 39 (1978) 76-86.
- [2] K. van Prooijen, "A Theory of Equal-Tempered Scales", *Interface*. 7 (1978) 45-56.
- [3] M.V. Mathews, L.A. Roberts, and J.R. Pierce, "Four new scales based on nonsuccessive-integer-ratio chords", *J. Acoust. Soc. Am.* 75 (1984) S10.
- [4] 小方 厚, "音律と音階の科学 新装版 - ドレミ... はどのように生まれたか", 講談社 (2018).
- [5] R. Plomp and W.J. Levelt, "Tonal Consonance and Critical Bandwidth", *J. Acoust. Soc. Am.* 38 (1965) 548.
- [6] W. A. Sethares, "Tuning, Timbre, Spectrum, Scale" 2nd. ed., Springer, London(2005).
- [7] A.K. Honingh and R. Bod, "In Search of Universal Properties of Musical Scales", *J. New Music Research* 40 (2011) 81.
- [8] Music Science at Univ. New South Wales, "Clarinet Acoustics" <http://newt.phys.unsw.edu.au/music/clarinet/>.
- [9] "Pure Data Japan", <http://puredatajapan.info/?pageid=2>.
- [10] 例えば N-L Muller, "A Proposal for Bohlen-Pierce Notation", [http://www.noralouisemuller.de/Muller\\_BP-Notation.pdf](http://www.noralouisemuller.de/Muller_BP-Notation.pdf).

# 鍵盤打楽器の固有振動 (1)

世戸 憲治\*

## Characteristic Oscillations of Keyboard Percussion (1)

Kenji SETO\*

### 1 はじめに

鍵盤打楽器とは、木琴、鉄琴、マリンバ、ヴィブラフォン等を含めた楽器の総称である。これらの楽器では、木材、あるいは、アルミなどの金属を棒状にして、長さを種々に変えたものをたくさん並べておき、それをマレットと呼ばれるもので叩くことによって音を出す。このとき、叩かれた棒は、一番低い振動数の基本振動の他に高調波と言われる音も同時に出しているが、単純な棒状のものでは、この高調波の振動数が基本振動数の整数倍になっていない。そのため、不協和音が出てしまい、そのままでは、メロディー楽器としては不向きと言われる。これを救うために、これらの楽器で使われる鍵盤は、単純な棒状のものではなく、図 1(b) に示すように、棒の中心部が棒の両端部よりも厚さが薄くなるように作られている。



図 1 鍵盤を横から見た図。単純に棒状のもの (a) と、中心部を薄くしたもの (b)

ここでは、最初の試みとして、この図の (a) で示す厚さが一様な場合の固有振動を、弾性体の波動方程式を解くことで求めてみる。中心部の厚さを薄くした (b) の場合については次回以降で議論する。

参考までに述べておくと、西洋音楽で使われるヴァイオリンを代表とする弦楽器、あるいは、フルートやクラリネットを代表とする管楽器は、すべて発音体が 1 次元的なものである。このような 1 次元的な発音体から発する音の場合は、その高調波の振動数は基本波の整数倍になり、音として初めから調和のとれたものになっている。

## 2 方程式の導入とその解法

### 2.1 方程式の導入

ここでは、鍵盤打楽器の棒状鍵盤を、その厚さが一様な 1 本の棒として扱う。この棒の長さを  $2l$ 、幅を  $a$ 、厚さを  $h$  とする。また、材料定数として、この棒の体積密度を  $\rho$ 、Young 率を  $E$  とする。この棒の中心を原点として棒の長さ方向に座標軸  $x$  をとることにする。この棒を叩いたとき、棒の面に対し垂直で、幅方向には一様な変位の座標  $x$ 、時刻  $t$  での値を  $V(x, t)$  とする。ここでは、この弾性棒の波動方程式として、Bernoulli-Euler 梁の振

\* 北海学園大学名誉教授

E-mail: seto@pony.ocn.ne.jp

動方程式

$$\rho ahV_{tt}(x,t) = -\partial_x^2 [EIV_{xx}(x,t)], \quad I = \frac{ah^3}{12} \quad (2.1)$$

を採用する．ここに，変位  $V$  に付けた添え字はその変数での微分を表し，また，定数  $I$  は断面 2 次モーメントでこの第 2 式で定義する．このように方程式は，座標  $x$  について 4 階微分，時間  $t$  について 2 階微分の偏微分方程式となる．

ここでは，この方程式を，棒の先端部 ( $x = \pm\ell$ ) は自由端となるため，そこでの曲げモーメント  $M$ ，および剪断力  $Q$  がゼロとなるものとして，

$$M = EIV_{xx} \Big|_{x=\pm\ell} = 0, \quad Q = \partial_x [EIV_{xx}] \Big|_{x=\pm\ell} = 0 \quad (2.2)$$

の境界条件の基に解くことになる．ただし，ここでは，弾性棒の厚さ  $h$  を一定として扱うので，(2.1) (2.2) 式にある  $EI$  は微分の外に出してかまわない．

この方程式を解く前に，数式簡素化のため，変数の無次元化をしておく．速度の次元を持つ  $c$ ，および時間の次元を持つ  $\tau$  を

$$c = \sqrt{\frac{E}{12\rho}}, \quad \tau = \frac{\ell}{c} \quad (2.3)$$

と導入しておく．これを用いて， $\ell$  を長さの単位，また， $\tau$  を時間の単位として， $x, h, t, V$  を，改めて

$$x/\ell \rightarrow x, \quad h/\ell \rightarrow h, \quad t/\tau \rightarrow t, \quad V/\ell \rightarrow V \quad (2.4)$$

とおき直す．この変換で方程式 (2.1) は，

$$V_{tt}(x,t) = -h^2 V_{xxxx}(x,t) \quad (2.5)$$

となる．なお，この変換で  $x$  の範囲は  $-1 \leq x \leq 1$  となることに注意する．

## 2.2 固有値と固有関数

ここで，変位  $V(x,t)$  を座標  $x$  と時間  $t$  について，変数分離形にし，時間部分を三角関数として，

$$V(x,t) = X(x) \sin(\omega t + \alpha) \quad (2.6)$$

とおいてみる． $\omega$  は無次元化された角振動数， $\alpha$  は位相定数である．このとき， $X(x)$  が満たす方程式は，

$$\omega^2 X(x) = h^2 X_{xxxx}(x) \quad (2.7)$$

となる．この方程式を，(2.2) 式から得られた境界条件

$$X_{xx}(x) \Big|_{x=\pm 1} = 0, \quad X_{xxx}(x) \Big|_{x=\pm 1} = 0 \quad (2.8)$$

の下に解くことになる．この方程式 (2.7) は，三角関数，双曲線関数を用いて簡単に解け，その 4 個の独立解は，

$$X(x) = \cos(kx), \quad \cosh(kx), \quad \sin(kx), \quad \sinh(kx), \quad k = \sqrt{\frac{\omega}{h}} \quad (2.9)$$

である．ここで，波数  $k$  をこの最後の式で定義する．もともと，方程式 (2.7) と境界条件 (2.8) は  $x$  の符号反転に対し不変なので，その解としては，偶関数の場合と，奇関数の場合があり得る．ここでは，これら (2.9) 式の独立解を組み合わせ，境界条件 (2.8) の第 1 式である  $X_{xx}(x) \Big|_{x=\pm 1} = 0$  を満たす解として，偶関数のものを

$$F(x) = \cosh(k) \cos(kx) + \cos(k) \cosh(kx) \quad (2.10)$$



また，奇関数のものを

$$G(x) = \sinh(k) \sin(kx) + \sin(k) \sinh(kx) \quad (2.11)$$

と定義しておく．さらに，これら関数に，境界条件 (2.8) の第 2 式  $X_{xxx}(x)|_{x=\pm 1} = 0$  を要請するため，3 階微分を作ると

$$F_{xxx}(x) = k^3 [\cosh(k) \sin(kx) + \cos(k) \sinh(kx)], \quad G_{xxx}(x) = k^3 [-\sinh(k) \cos(kx) + \sin(k) \cosh(kx)] \quad (2.12)$$

となるので，これらが， $x = \pm 1$  でゼロとなるには，それぞれ，

$$\tanh(k) = -\tan(k), \quad \tanh(k) = \tan(k) \quad (2.13)$$

でなければならない．図 2 に，これら式の値を  $y$  とおいたときの， $y = \tanh(k)$ ，および， $y = \pm \tan(k)$  のグラフを重ね描きしたものを示す．

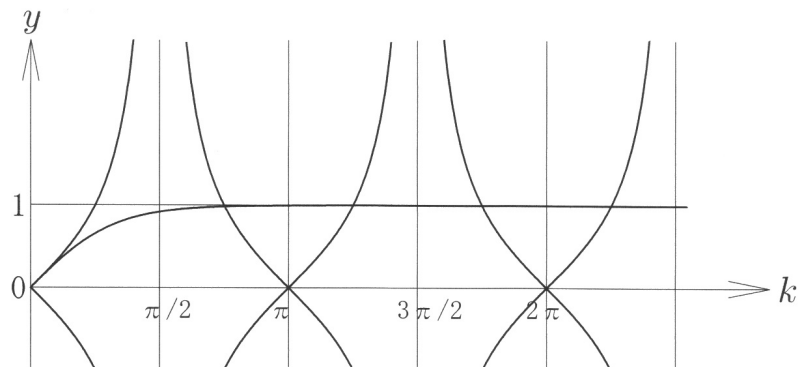


図 2  $y = \tanh(k)$  と  $y = \pm \tan(k)$  のグラフ

$k > 0$  の領域におけるこれらグラフの交点での  $k$  の値を，小さい方から  $k_n$ , ( $n = 0, 1, 2, 3, \dots$ ) として， $k$  の固有値と呼ぶ．また，この  $k_n$  に対し，(2.9) の最後の式から決まる

$$\omega_n = h k_n^2 \quad (2.14)$$

を固有角振動数と呼ぶ．ただし，この  $k_n$  の厳密解を求めることは不可能であり，数値的に求めるしか方法はない．しかし，この図 2 から分かるとおり，近似的には，これらグラフの交点は，ほぼ， $y = 1$  の線上に存在する．したがって，その近似解は

$$k_n \cong \left( \frac{n+1}{2} + \frac{1}{4} \right) \pi, \quad n = 0, 1, 2, 3, \dots \quad (2.15)$$

とみなせる．以下，この近似解で固有値  $k_n$  の代用としてもよいであろう\*1．ここで，番号  $n$  が偶数の  $k_n$  は  $\tanh(k) = -\tan(k)$  の解，すなわち，偶関数  $F(x)$  に属し， $n$  が奇数の  $k_n$  は， $\tanh(k) = \tan(k)$  の解，すなわち，奇関数  $G(x)$  に属することに注意する．また，このときの関数  $F(x)$ ,  $G(x)$  の  $k_n$  依存性を明記するために， $F(x, k_n)$ , ( $n = 0, 2, 4, \dots$ ),  $G(x, k_n)$ , ( $n = 1, 3, 5, \dots$ ) と記すことにし，これらを固有関数と呼ぶ．ただしこれらは規格化されたものではない．

\*1 より正確には，「おわりに」のところで述べる．ちなみに，この  $k_n$  の近似式で  $\tanh(k_0) = 0.98230\dots$ ,  $\tanh(k_1) = 0.99922\dots$  である．

### 2.3 固有関数の規格化

2個の固有値  $k_n$  と  $k_{n'}$  を考える. このとき,  $n$  と  $n'$  の偶奇性が違えば, それら関数が直交することは言うまでもない. 例えば,  $n$  が偶数,  $n'$  が奇数のときは, 固有関数の偶奇性から

$$\int_{-1}^1 F(x, k_n)G(x, k_{n'})dx = 0 \quad (2.16)$$

となる. この結果から, 固有関数としては, 偶関数同士, あるいは, 奇関数同士の直交性を考えるとよい. どちらにしてもやり方は同じようなものなので, ここでは, 偶関数同士の場合を考える. 一般に固有値とは限らない2個の  $k, k'$  を考え, (2.9) の最後の式で対応する2個の  $\omega$  を  $\omega, \omega'$  とする. また, これらに属する関数を  $F(x, k), F(x, k')$  とする. これら関数は, 方程式 (2.7) を満たしているので,

$$\omega^2 F(x, k) = h^2 F_{xxxx}(x, k), \quad \omega'^2 F(x, k') = h^2 F_{xxxx}(x, k') \quad (2.17)$$

が成り立つ. この第1式に  $F(x, k')$  を掛け, 第2式に  $F(x, k)$  を掛けてから, 辺々を引き算すると,

$$\begin{aligned} & (\omega^2 - \omega'^2)F(x, k)F(x, k') \\ &= h^2 \frac{d}{dx} \left[ F_{xxx}(x, k)F(x, k') - F_{xxx}(x, k')F(x, k) - F_{xx}(x, k)F_x(x, k') + F_{xx}(x, k')F_x(x, k) \right] \end{aligned} \quad (2.18)$$

となるので, この式を  $x$  で  $-1$  から  $1$  まで積分すると,

$$\int_{-1}^1 F(x, k)F(x, k')dx = \frac{h^2}{\omega^2 - \omega'^2} \left[ F_{xxx}(x, k)F(x, k') - F_{xxx}(x, k')F(x, k) \right]_{-1}^1 \quad (2.19)$$

となる. ここで, 関数  $F(x, k)$  は境界の  $x = \pm 1$  で, その2階微分がゼロとなることを用いた. さらにここで,  $k, k'$  を異なる固有値  $k_n, k_{n'}$  とすると, 境界の  $x = \pm 1$  で, 関数  $F(x, k_n), F(x, k_{n'})$  の3階微分もゼロとなるので, この式の右辺はゼロとなり, 異なる固有値に属する固有関数同士の直交性,

$$\int_{-1}^1 F(x, k_n)F(x, k_{n'})dx = 0, \quad n \neq n' \quad (2.20)$$

が得られる. 同じ固有値になるときは, (2.19) 式右辺は  $0/0$  になってしまうので, 先に,  $k'$  を固有値  $k_n$  とすると,  $F_{xxx}(\pm 1, k_n) = 0$  を用いて,

$$\begin{aligned} \int_{-1}^1 F(x, k)F(x, k_n)dx &= \frac{h^2}{\omega^2 - \omega_n^2} \left[ F_{xxx}(x, k)F(x, k_n) \right]_{-1}^1 \\ &= \frac{2h^2}{\omega^2 - \omega_n^2} F_{xxx}(1, k)F(1, k_n) = \frac{2}{k^4 - k_n^4} F_{xxx}(1, k)F(1, k_n) \end{aligned} \quad (2.21)$$

となる. ここで,  $F_{xxx}(x, k)$  が奇関数であること, および, (2.9) の最後の式から  $\omega = hk^2$  と (2.14) 式の  $\omega_n = hk_n^2$  を用いた. あとは, l'Hopital の定理を用いて, 極限  $k \rightarrow k_n$  をとると, 同じ固有値の場合の積分式ができる. 以上をまとめて, 固有関数の直交性の式

$$\int_{-1}^1 F(x, k_n)F(x, k_{n'})dx = N_{F,n}^2 \delta_{n,n'}, \quad N_{F,n}^2 = \frac{1}{2k_n^3} \left[ \partial_k F_{xxx}(1, k) \right]_{k=k_n} F(1, k_n), \quad n = 0, 2, 4, \dots \quad (2.22)$$

を得る. ここに,  $N_{F,n}$  は規格化定数で,  $F(x, k_n)/N_{F,n}$  が規格化された固有関数となる.

同様に, 奇関数の固有関数  $G(x, k_n)$  同士の直交性は

$$\int_{-1}^1 G(x, k_n)G(x, k_{n'})dx = N_{G,n}^2 \delta_{n,n'}, \quad N_{G,n}^2 = \frac{1}{2k_n^3} \left[ \partial_k G_{xxx}(1, k) \right]_{k=k_n} G(1, k_n), \quad n = 1, 3, 5, \dots \quad (2.23)$$

となり,  $G(x, k_n)/N_{G,n}$  が規格化された固有関数となる.

## 2.4 数値計算例

固有値  $k_n$ , ( $n = 0, 1, 2, 3, \dots$ ) が求まると, これから固有角振動数  $\omega_n$  が (2.14) 式で示したように  $\omega_n = hk_n^2$  と決まり, これに  $k_n$  の近似式 (2.15) を代入すると,

$$\omega_n = h \left( \frac{n+1}{2} + \frac{1}{4} \right)^2 \pi^2 \quad (2.24)$$

と求められる. これから, 最も低い角振動数である基本角振動数  $\omega_0$  に対し, 高調波の角振動数がどのようになるかを見るために,  $\omega_n$  と  $\omega_0$  との比  $\omega_n/\omega_0$  を  $n = 0, 1, 2, 3, 4$  まで計算してみると, それぞれ,

$$\frac{\omega_n}{\omega_0} = 1, \quad \left(\frac{5}{3}\right)^2 (= 2.777\dots), \quad \left(\frac{7}{3}\right)^2 (= 5.444\dots), \quad \left(\frac{9}{3}\right)^2 (= 9), \quad \left(\frac{11}{3}\right)^2 (= 13.444\dots) \quad (2.25)$$

となる. 3 番目の高調波は基本角振動数の 9 倍と整数になっているが, それ以外の高調波は基本角振動数の整数倍になっていない. これが, 不協和音を出す原因である.

これまで使われた  $\omega_n$  は無次元化されたものだったので, そのままでは現実の振動数を与えない. 現実の振動数を求めるには, 無次元化する前のものに戻さなければならない. ここでは, ピアノの中央「ラ」の音の振動数が 440Hz であることを用いて, これと同じ基本振動数を木琴で出すための鍵盤サイズを求めてみよう. とは言っても, 筆者は木琴などというものは, 小学生のときに触っただけで, それ以来, 見たこともない. ここでは, 適当ではあるが, この鍵盤が木材の松で作られるものとして, 密度  $\rho$ , Young 率  $E$  を, ネットで探した値,

$$\rho = 0.63 \text{ g/cm}^3 = 630 \text{ kg/m}^3, \quad E = 10,790 \text{ MPa} \quad (2.26)$$

とする. このとき, (2.3) 式で定義した速度  $c$  は

$$c = \sqrt{\frac{E}{12\rho}} = 1,194.675 \text{ m/s} \quad (2.27)$$

となる. これを用いて鍵盤のサイズを求めるには, まず, (2.24) 式で示した角振動数  $\omega_n$  は無次元化されたものなので, 最初に, これに含まれる無次元の  $h$  を  $h/\ell$  と元のものに戻す. そのうえで, この  $\omega_n$  を (2.3) 式で定義する時間  $\tau = \ell/c$  で割ると次元を持った角振動数となり, さらに  $2\pi$  で割ると, 次元付きの振動数  $\nu$  となる. ここでは基本振動数のみを問題とするので,  $n = 0$  として,

$$\nu = \frac{\pi hc}{2\ell^2} \left(\frac{3}{4}\right)^2 \quad (2.28)$$

となる. これを  $\ell$  について逆に解き, 2 倍して鍵盤の長さにすると,

$$2\ell = \frac{3}{2} \sqrt{\frac{\pi hc}{2\nu}} \quad (2.29)$$

となる. これから振動数  $\nu$  を与えて, 鍵盤の長さ  $2\ell$  を求めるわけだが, そのためには, 鍵盤の厚さ  $h$  が必要である. 前にも述べたように, 筆者はこの厚さに関する情報を持ち合わせていないが, ここでは, 勝手ながら

$$h = 1 \text{ cm} = 0.01 \text{ m} \quad (2.30)$$

とおくことにする. この式に (2.27) 式の  $c$  の値, および, 振動数  $\nu$  としてピアノの中央「ラ」の 440Hz を代入すると,

$$2\ell = 0.3097 \text{ m} = 30.97 \text{ cm} \quad (2.31)$$

と、鍵盤の長さとして、もっともらしい答えがでる。

西洋音楽で使われる音階の振動数は、高い音にいくほど指数関数的に大きくなるが、(2.29) 式からそのときの鍵盤の長さは指数の  $-\frac{1}{2}$  乗に比例して短くなるのが分かる。ちなみに、ピアノの中央「ド」の音の振動数は 261.626Hz, それより 1 オクターブ高い「ド」の振動数は 2 倍の 523.251Hz である。この音を木琴で出すときの鍵盤の長さは、(2.29) 式より、それぞれ、

$$2\ell = 40.173\text{cm}, \quad 28.406\text{cm} \quad (2.32)$$

と求められる。1 オクターブ上がるごとに、鍵盤の長さは  $1/\sqrt{2}$  倍になることに注意する。

最後に、固有関数  $F(x, k_n)$ ,  $G(x, k_n)$  を (2.22) (2.23) 式の規格化定数を用いて規格化したものの数値グラフを、 $n = 0, 1, 2, 3, 4, 5$  の 6 個について、図 3 に示す。

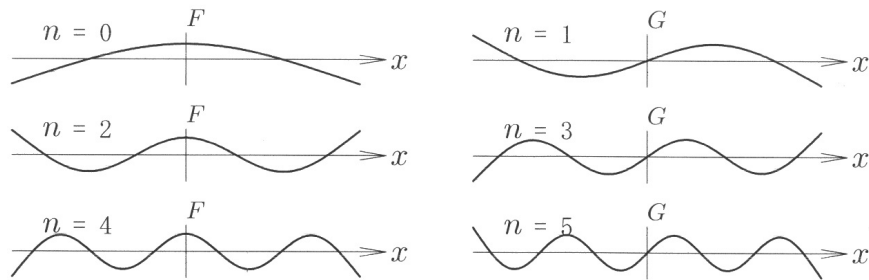


図 3 固有関数  $F(x, k_n)$ ,  $G(x, k_n)$

このうち、固有値番号  $n$  が偶数の固有関数  $F(x, k_n)$  は偶関数、また、 $n$  が奇数の固有関数  $G(x, k_n)$  は奇関数である。どのグラフも、 $n + 2$  個のゼロ点を持つ。

### 3 おわりに

ここで扱った鍵盤打楽器の固有振動を解析してみようと思いついたのは、小方厚著『音律と音階の科学』、および、同著者の『視て聴くドレミ』を読んだからである。そこでは、(2.25) 式で示した値について、

$$\frac{\omega_n}{\omega_0} = 1, \quad 2.76, \quad 5.40, \quad 8.93, \quad 13.34, \quad (n = 0, 1, 2, 3, 4) \quad (3.1)$$

となっている。これらの値は、ここで求めたものとはほぼ同じで、安心もしたが、幾分小さめの値になっている。これは、(2.15) 式で求めた  $k_n$  の近似式の違いによるものであろう。そこで、(2.13) 式を、直接、数値計算で解いてみると、

$$k_n = 2.365, \quad 3.926, \quad 5.497, \quad 7.068, \quad 8.639, \quad (n = 0, 1, 2, 3, 4) \quad (3.2)$$

という値を得た。(2.15) で近似した  $k_0$  は  $k_0 = 2.356$  で、少し小さめに近似したことになる。これ以下の  $k_n$ ,  $n = 1, 2, 3, \dots$  については、小数 3 桁の範囲で同じ値になっている。これを用いて、(2.25) 式を計算し直すと、

$$\frac{\omega_n}{\omega_0} = 1, \quad 2.7565, \quad 5.403, \quad 8.9329, \quad 13.3442, \quad (n = 0, 1, 2, 3, 4) \quad (3.3)$$

となって、小数点 3 桁のところを四捨五入すると小方厚氏の本の (3.1) 式と一致する。

ところで、(2.28) 式を見て思ったことを一つ付け加えておく。通常この種の楽器では、すべての鍵盤の厚さを同じにし、その長さを変えることで、音の高さを変えている。しかし、この式から考えると、音の高さを変えるに

は鍵盤の厚さを変えてもよいはずである。極端に考えると、長さを同じにして厚さだけを変えても色々な音が出せるはずである。このようにして作られた楽器が存在しないのは何故なのだろうか。

ここでは、鍵盤打楽器の固有振動を弾性体の波動方程式を解くことで求めてみた。「はじめに」のところで述べたように、ここで扱ったのは、鍵盤の厚さが一様のものである。実際の鍵盤では中心部の厚さが両端部よりも薄くなっているの、そのような場合も解析したいとは思っているが、これは大変面倒なことになりそうである。これについては、次回以降でそれなりに努力してみるつもりである。

#### [ 謝辞 ]

今回も、京都大学名誉教授の中西襄先生にこの原稿を見ていただきました。先生からは逆に、U字型の音叉がきれいなサインカーブの音をだすのは何故かという質問を受けました。この質問に対しては、正しい解答かどうかはよくわからないのですが、音叉の場合は、下に共鳴箱がついているので、特定の基本波のみが共鳴するように作られているというのと、金属棒をU字に曲げることで、奇関数の振動が出にくくなっているというのがその理由と思われま。いつも適切なコメントをいただく先生に感謝します。

また、「おわりに」のところで述べたように、この「鍵盤打楽器の固有振動」を書くことになったのは、小方厚氏の本を読んだのがそのきっかけである。小方厚氏に心から感謝します。

# 気候を制御する人工衛星

富吉昇一\*1

## A Satellite Controlling Climate

Shoichi TOMIYOSHI\*2

### 1 はじめに

地球温暖化が大きな問題になっている。温暖化ガスである二酸化炭素  $\text{CO}_2$  の増加がその原因として挙げられ、その排出を抑える試みがいろいろ行われ、 $\text{CO}_2$  を排出しない社会を作るという方向でいろいろな努力がなされている。しかし、まだ温暖化ガスの増加は続いており、削減するのは並大抵ではない。

ところで温暖化ガスを削減する方法以外に地球温暖化を止める方法はないのであろうか。非常に単純なやり方として、太陽光を地球の上空で反射させて大気圏に入って来ないようにする方法が考えられる。このような提案はまだ聞いたことがないので、その方法を述べてみたい。

現在多くの人工衛星が地球の周りを回っているが、もしアルミ反射シートのような太陽光を反射させるシートを地球上空に静止衛星として打ち上げておけば、シートの面積に比例して太陽光エネルギーが大気圏に入って来なくなるので、地球が受け取るエネルギーはその面積に比例して減少し、地表の温度は下がることが期待される。その温度を計算してみた。

### 2 地球のエネルギー収支の計算

地球の温度は黒体放射の理論により計算できる。地球が受け取るエネルギーと地球表面から放出される放射のエネルギーがバランスしているとして温度を求めると  $-18^\circ\text{C}$  から  $-19^\circ\text{C}$  になることがこれまでに示されている。この温度は実測より少し低い値のようだが（温暖化ガスの効果で  $+14^\circ\text{C}$  になると言われている）、簡単に計算で導くことができるということが重要である。

まず大気圏外で太陽を追尾する反射シートの静止衛星を考える。太陽光を常に 100% 反射し、反射シートの面積に比例する分だけ太陽光が入射しなくなるとする。その場合の地球表面の平衡温度をシート面積の関数として求めてみる。

太陽から地球に照射されるエネルギーは 1 秒間に面積  $1\text{m}^2$  当たり  $S = 1.37 \times 10^3 \text{J} \cdot \text{s}^{-1} \text{m}^{-2}$  である（太陽定数）。地球の半径を  $r$  とすると地球が照射される全エネルギーは  $S\pi r^2$  になる。ところが大気圏でその入射量の 30% が反射され、地表に届くのは全体の入射量の 70% となることが分かっているらしい。この反射率はアルベドと言われ、今回はボンダルベド  $A_B = 0.3$  を採用する。これは入射する全エネルギーと反射する全エネルギーの比を表す。従って地球表面に届くエネルギーは  $S(1 - A_B)\pi r^2$  である。

絶対温度  $T$  (K) の地球表面からは熱放射でエネルギーが失われる。ステファン・ボルツマンの黒体放射の法則より地球の全表面から放射されるエネルギーは  $\sigma T^4 \cdot 4\pi r^2$  である。ここで  $\sigma$  はステファン・ボルツマン定数で  $\sigma = 5.67 \times 10^{-8} \text{ (Js}^{-1}\text{m}^{-2}\text{K}^{-4})$  である。

---

\*1 元愛媛大学工学部

\*2 tomiyos@yahoocoo.jp

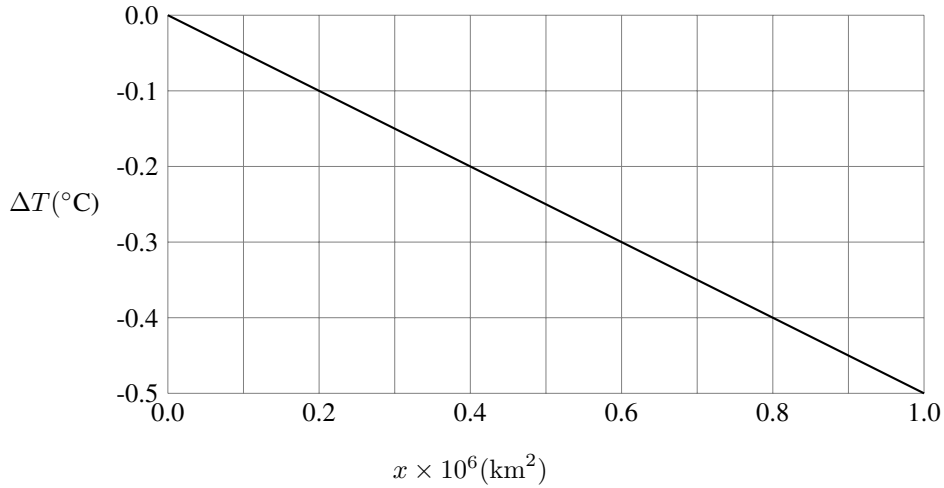


図1 反射シートの面積  $x$  と下がる地球の温度  $\Delta T$

入射エネルギーと輻射エネルギーがつり合って平衡温度になっているので,

$$\sigma T^4 = \frac{S(1 - A_B)}{4} \quad (2.1)$$

となり,  $T^4 = 4.23 \times 10^9$  が得られる.

これから平衡温度は  $T = 255.0\text{K}$ , すなわち,  $-18.1^\circ\text{C}$  が得られる.

反射シートの面積を  $x$  ( $\text{km}^2$ ) とすると, 地球が照射されるエネルギーは地球の断面積  $\pi r^2$  に対する反射シートの面積の比  $x/\pi r^2$  だけ減少する. その場合の熱平衡温度の式は

$$T = 255.0 \times \left(1 - \frac{x}{\pi r^2}\right)^{1/4} \quad (2.2)$$

と表される. この式から温度  $T$  は簡単に求めることができる.  $-18.1^\circ\text{C}$  からの温度差を  $\Delta T$  とすると (2.2) 式で  $x$  が大きくなると  $\Delta T$  はリニアな変化から下がりが徐々に大きくなる. 地球の断面積に比較してシートの面積  $x$  が非常に小さい時には

$$\begin{aligned} \Delta T &= 255.0 \times \left(1 - \frac{x}{\pi r^2}\right)^{1/4} - 255.0 \\ &= 255.0 \times \left(1 - \frac{1}{4} \frac{x}{\pi r^2}\right) - 255.0 \\ &= -0.502 \times 10^{-6} x \end{aligned} \quad (2.3)$$

と近似できる. 図1に面積  $x$  と  $\Delta T$  の関係のグラフを示す. この図から分るように温度  $\Delta T$  を  $0.1^\circ\text{C}$  下げるためには約  $x = 200,000\text{km}^2$  の面積のシートが必要となる. 正方形の場合は  $450\text{km} \times 450\text{km}$  である.  $0.5^\circ\text{C}$  下げるためには, 約  $1,000,000\text{km}^2$  ( $1,000\text{km} \times 1,000\text{km}$ ) の面積が必要である.

$0.1^\circ\text{C}$  という温度は小さな温度の変化に見えるが, 実は地球全体の温度が  $0.1^\circ\text{C}$  下がるということである. 理科年表のデータによると 1900年から2000年までの100年間で地球の温度は  $0.68^\circ\text{C}$  上昇していることが示されている. 10年間の上昇は  $0.068^\circ\text{C}$  であるから  $0.1^\circ\text{C}$  よりも少ないので,  $0.1^\circ\text{C}$  下げるのが出来れば15年前まで戻ることが出来る.  $\text{CO}_2$  を削減してもどれだけの効果が出るのか分からないし, 削減し続けてもいつから, どれだけ効果が出るのか分からない. それに比較すると, ここで示した計算結果は明白である. 下げたい温度とその面積が簡単に計算できるのがこの方法のメリットである.

太陽と地球中心を結ぶ大気圏上空に反射シートが広げられると、地球の自転に伴い、ある時間帯だけ地球表面に太陽光が照射されない場所が出来るが、その日影の地域は局所的に温度が下がることになる。昼の温度から夕方温度に代わるような変化が地球上で起きるかもしれない。

局所的な温度低下が周辺の温度を下げ徐々に低い温度部分が伝わっていき、時間とともにそれが地球全体に行き渡って平衡状態の温度が実現する。シート衛星が赤道付近を回る場合、赤道に沿ってかなり低い温度になる可能性があり、赤道直下のアフリカと南アメリカでは異常気象になるかもしれない。

### 3 気候制御

反射シートによって地球上のある地域の太陽光エネルギーの入射を遮断するという方法を用いれば、ある特定地域の気候を制御することが出来るかもしれない。

台風は赤道近くの海上で発生して北上する。台風の発生する近辺にシート衛星を持ってきて太陽の熱エネルギーの供給を遮断すれば、台風のたまごをつぶすことができるかもしれない。台風は上昇気流が盛んになることにより勢力を増すが、太陽からのエネルギーが遮断されれば上昇気流を抑えることができ、台風の発生を防ぐことができるかもしれない。台風の大きさは初期のころは比較的小さいので限定された狭い領域をシートで覆うだけでよく、100km × 100km 程度の小形のシートで十分かもしれない。この大きさでも遮断できる太陽エネルギーは莫大 (10GkW) であり、エネルギーが遮断されれば台風になれないかもしれない。

その他それぞれの地域で大雨とか日照りなどの制御にも利用できるかもしれない。その場合にはさらに小さい 50km × 50km シートでも有効かもしれない。この場合はある特定の地域に衛星を移動させる。天候制御衛星は特定地域の周辺にとどまる必要があるので、通常東回転の静止衛星が望ましい。注目する地域に移動できることが重要である。

### 4 反射シート

反射シートは軽くて丈夫で、太陽光反射率 100% で、さらに放射線損傷に強いことが要求される。また、コンパクトに畳まれ容易に宇宙で広げられなければならない。これまでにイカロスという帆のシート衛星が打ち上げられており、現在太陽の光エネルギーの圧力を利用してシートを加速できるか実験が進められている。大きさ 14m × 14m で厚さ 7.5 $\mu$ m の複層ポリイミドシートが採用されている。

ここで必要なのはさらに巨大なシートである。その大きさを簡単な計算で検討してみる。比重 1 の樹脂を用い薄いシートを作ることを考える。1m × 1m × 1m の樹脂 1 トンを薄く延ばして 1 $\mu$ m の厚さにすると樹脂は 1m × 1m × 1 $\mu$ m × 10<sup>6</sup> であるので、1 トンが 1km × 1km のシートとなる。

地球を 0.1 °C 冷やすためには 450km × 450km の面積が必要であるので 20 万トンの重さになる。0.1 $\mu$ m まで薄くできるとすると重量は 2 万トンとなり、0.01 $\mu$ m とすると 2 千トンになる。厚さ 0.1 $\mu$ m 程度であれば現在でも作れるかもしれない。丈夫な樹脂のシートにアルミや銀などをコーティングし、大面積のシートを大量生産する技術を開発することが必要である。これまでにこのような目的の反射シートは研究されていないが、この目的に適したものがすでにあるかもしれない。

### 5 シート衛星

シートで大気圏の上を覆うためには人工衛星を打ち上げてシートを広げなければならない。まず赤道上空に打ち上げた場合を考えると、常に太陽を追尾するような太陽追尾型人工衛星であれば大気圏に入ってくる太陽光エネルギーを常時反射させることができる。そのためには衛星は西向きに回り、24 時間後に元の位置に戻るよう



回転しなければならない。

ところが多くの静止衛星は地球の回転方向である東向きに回るように打ち上げられている。だからこの衛星は逆回転衛星ということになる。東向きに回るシート衛星では、ある特定の地球上の位置に留まっているので太陽光を遮蔽できるのは昼間のある特定の時間帯だけであり効率が悪い。したがって目的の衛星は西向き回転の静止衛星ということになる。

ここで問題になるのは、これまで地球の回転と同じ方向に回る静止衛星が多く打ち上げられ活動していることである。そのためこれらと反対に回る衛星は既存の衛星と衝突する可能性があり非常に危険である\*3。人工衛星は遠心力と地球中心からの重力がつり合うことにより地球上空に浮かんでいることができる。

一日に1回転する静止衛星の軌道は地表から36,000kmの高さと決まっている。この高さは衛星の重さとか大きさとは無関係である。多くの既存の衛星に邪魔にならないためには静止軌道より少し高い高度にする必要があるかもしれない。そうすると1回転に要する時間が24時間より長くなるが、正確に24時間で回る必要はないので大きくずれたときに時々調整するようにすればよい。このような位置調整にはイオンエンジンが必要である。イオンエンジンは打ち上げてからシートを広げたり、シートを正常な形に保つためや消滅処理のためにも必要である。

シート衛星の重量は数万トンから数十万トンになるかもしれないことが明らかになったが、これを西回りの静止軌道まで打ち上げるには強力なロケットが必要である。現在ファルコンヘビーという大型のロケットがスペースX社で開発されていて、静止軌道に22.2トンの荷物を打ち上げることができるということである。さらにこのロケットは再利用可能で燃料を詰めなおすことにより何回でも運搬できるようにできているらしい。0.1°C下げる0.1μm厚のシートを運搬するにはロケットを900回も打ち上げなければならないことになる。もう一つのハンディは西回り軌道では地球の自転速度が逆速度になるのでより多くの推力を必要とすることである。より積載荷重の大きいロケットを開発する必要がある。

## 6 おわりに

太陽からのエネルギーを大気圏外で反射させて遮断するという方法で地球の温度の計算を行い、下がる温度と反射シートの面積の関係を求めることができた。

0.1°C下げるには450km×450kmの面積が必要で、シートの重量は数万トンにもなり、今すぐ実現することは難しい。今後の努力次第ということになる。

またシート衛星は台風や豪雨などの局所的な気候の制御にも使える可能性がある所以今後の発展が楽しみである。なお、ここで用いた主な数値は『理科年表』2011年版に記されている値を用いた。

---

\*3 既存の衛星のみならず、以前に宇宙空間を浮遊した衛星からのdebrisとの衝突もありうる。

# ある定積分の求め方

矢野 忠<sup>\*1</sup>

## Derivation of a Definite Integral Formula

Tadashi YANO<sup>\*2</sup>

### 1 はじめに

「いろいろな定積分の求め方」を「数学・物理通信」9巻7号に述べた [1]. その中で

$$\int_0^{\infty} \frac{x^2 e^x}{(e^x + 1)^2} dx = \frac{\pi^2}{6} \quad (1.1)$$

の求め方の方針を説明したが、実際の計算は示さなかった. このエッセイではそれを求めてみよう.

Kittel の有名な著書『固体物理学入門』上 [2] の金属の電子比熱の計算のところに

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2 e^x}{(e^x + 1)^2} dx = \frac{\pi^2}{3} \quad (1.2)$$

という定積分がある.

この定積分公式は (1.1) と書き換えられる. しかし, この (1.1) は多くの定積分公式が載っている, 岩波の『数学公式 I』 [3] にも載っていない<sup>\*3</sup>.

それで, 計算をすこし詳しく追ってみたいと考えた. 実は [1] を書き上げた後に, ちょっとその結果が気になった. 前にもこの計算はやってみたはずだが, そのノートが見つからない. それであらためて計算をやってみた. これはその記録である.

### 2 (1.1) の求め方

(1.1) を計算するためには, よく知られた定積分の公式

$$\int_0^{\infty} \frac{x}{e^x + 1} dx = \frac{\pi^2}{12} \quad (2.1)$$

から出発する. この定積分は [4] に載っているが, その求め方は [1] でも述べた.

ともかく (2.1) から出発しよう. (2.1) で  $x = au, (a > 0)$  とおけば,

$$\int_0^{\infty} \frac{au}{e^{au} + 1} d(au) = \frac{\pi^2}{12} \quad (2.2)$$

であるから, これは

$$\int_0^{\infty} \frac{x}{e^{ax} + 1} dx = \frac{\pi^2}{12a^2} \quad (2.3)$$

となることはすぐにわかる.

---

<sup>\*1</sup> 元愛媛大学工学部

<sup>\*2</sup> yanotad@earth.ocn.ne.jp

<sup>\*3</sup> (1.2) から (1.1) への導出を付録 1 に示す.

(2.3) ではパラメータ  $a$  が現れてきたので、パラメータ  $a$  で (2.3) の両辺を微分することができる。(2.3) の左辺の被積分関数の  $a$  での微分と右辺の  $a$  での微分は付録 2 に示す。

ここではその結果を使おう。すなわち、

$$\frac{\partial}{\partial a} [x(e^{ax} + 1)^{-1}] = -\frac{x^2 e^{ax}}{(e^{ax} + 1)^2} \quad (2.4)$$

$$\frac{\partial}{\partial a} \left( \frac{\pi^2}{12a^2} \right) = -\frac{\pi^2}{6a^3} \quad (2.5)$$

したがって、これを

$$\frac{\partial}{\partial a} \int_0^\infty \frac{x}{e^{ax} + 1} dx = \frac{\partial}{\partial a} \left( \frac{\pi^2}{12a^2} \right) \quad (2.6)$$

に代入すれば、

$$\int_0^\infty \frac{x^2 e^{ax}}{(e^{ax} + 1)^2} dx = \frac{\pi^2}{6a^3} \quad (2.7)$$

が得られる。この (2.7) に  $a = 1$  を代入すれば、(1.1) が得られる。

### 3 おわりに

なんでもない計算であるので、わざわざエッセイとして遺すことまでもないと思われるが、前のエッセイを書き上げたときに、ちょっと気になったので、まとめてみた。

(1.1) と (1.2) の定積分は初等的ではないと Kittel の本にも書いてある。それで脚注にその定積分の求め方が書かれたのであろう。

本を読んで、こういう定積分に出会ったとき、丹念にノートしておけば、いざというときに役立つかもしれない。

### 4 付録 1 (1.2) から (1.1) の導出

(1.2) から (1.1) を導出するには

$$\int_{-\infty}^\infty \frac{x^2 e^x}{(e^x + 1)^2} dx = 2 \int_0^\infty \frac{x^2 e^x}{(e^x + 1)^2} dx \quad (4.1)$$

を示せばよい。すなわち、

$$\int_{-\infty}^0 \frac{x^2 e^x}{(e^x + 1)^2} dx = \int_0^\infty \frac{x^2 e^x}{(e^x + 1)^2} dx \quad (4.2)$$

を示せばよい。 $x = -u$  とおけば、

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^0 \frac{x^2 e^x}{(e^x + 1)^2} dx &= \int_\infty^0 \frac{u^2 e^{-u}}{(e^{-u} + 1)^2} d(-u) \\ &= - \int_\infty^0 \frac{u^2 e^{-u}}{(e^{-u} + 1)^2} du \\ &= \int_0^\infty \frac{u^2 e^{-u}}{(e^{-u} + 1)^2} du \\ &= \int_0^\infty \frac{e^{2u} u^2 e^{-u}}{e^{2u} (e^{-u} + 1)^2} du \\ &= \int_0^\infty \frac{u^2 e^u}{(e^u + 1)^2} du \end{aligned}$$

したがって (4.2) が示された。

## 5 付録2 (2.4) と (2.5) の導出

まず (2.3) の左辺の被積分関数の分母因子の  $a$  での偏微分は

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial a} \left( \frac{1}{e^{ax} + 1} \right) &= \frac{\partial}{\partial a} (e^{ax} + 1)^{-1} \\ &= -(e^{ax} + 1)^{-2} x e^{ax} \\ &= -\frac{x e^{ax}}{(e^{ax} + 1)^2}\end{aligned}$$

したがって

$$\frac{\partial}{\partial a} \left( \frac{x}{e^{ax} + 1} \right) = -\frac{x^2 e^{ax}}{(e^{ax} + 1)^2} \quad (2.4)$$

つぎに (2.3) の右辺の  $a$  に関係した因子の微分を計算する.

$$\frac{\partial}{\partial a} \left( \frac{1}{a^2} \right) = -\frac{2}{a^3}$$

であるから

$$\frac{\pi^2}{12} \frac{\partial}{\partial a} \left( \frac{1}{a^2} \right) = -\frac{\pi^2}{6a^3} \quad (2.5)$$

(2019. 10. 15)

## 参考文献

- [1] 矢野 忠, いろいろな定積分の求め方, 数学・物理通信 9 巻 7 号 (2019.9.29) 18-23
- [2] C. Kittel (宇野, 津屋, 森田, 山下 訳) 『固体物理学入門』上 第 7 版 (丸善, 1998) 171
- [3] 森口, 宇田川, 一松, 『数学公式 I』(岩波全書, 1956)
- [4] 森口, 宇田川, 一松, 『数学公式 I』(岩波全書, 1956) 234

## 編集後記

皆様にはご健勝にお過ごしのことと存じます。年末が近づいてまいりました。

「数学・物理通信」9巻8号を発行します。

今号には小方厚さんからご投稿をいただいた。小方さんには『音律と音階の科学』（講談社ブルーバックス）の著書がある。音楽に造詣の深い方である。

この「数学・物理通信」では音楽に造詣の深い方には、中西襄先生や世戸憲治さんがおられるが、それにこの号から小方さんが加わった。

どうも音楽も数学も得意ではない編集者の私などから見るとおそれ多いことはなはだしいが、小方さんは世戸さんからのご紹介である。

世戸さんが上記の『音律と音階の科学』を購入されたころ、私も得意でない音楽を学ぶために偶然この書と芥川也寸志『音楽の基礎』（岩波新書）を購入していたが、私は両書ともまったく読み進めることができず、積読になっている。

雑談会という会を毎月1回開いているが、その仲間の富吉さんから「気候を制御する人工衛星」という論文を投稿いただいた。実現はなかなかできそうにないが、アイデアがおもしろい。これに似た発想の映画「ジオストーム」を最近テレビで見た。

もし、気候を人工衛星で制御するというこのアイデアが実現することがあるとしても、炭酸ガスの排出を少なくする努力は絶対にすべきである。ベルリンの壁崩壊から30年、時代は確実に変わって来ている。

（矢野 忠）