液晶科学者のための群論入門　第 2 回：群の表現[1]

谷村 省吾[2]

群の表現論について，正三角形対称性群と回転群を例に挙げながら説明する．テンソル積と直和分解と既約表現という概念を導入し，それらの物理的意義を解説する．

キーワード：表現，ベクトル空間，線型作用素，不変部分空間，直和分解，既約表現，テンソル積表現

1　表現とは

前回の講義（液晶 2007 年 3 号）では，群が考え出される状況と，群の定義・性質などを説明した．図形の回転・反転といった操作の集合を考えると，操作と操作の合成（積）が可能であり，積は結合律を満たしており，図形を動かさない特殊な操作（単位元）や，操作の逆操作（逆元）があることがわかる．操作される具体的な図形から離れて，抽象的な積という関係で閉じた集合のことを，群と呼んだのであった．そのような抽象的な群にも，いろいろな種類があり，内部構造もあることを前回は観察した．

今回は,「操作されるもの」からいったん離脱した群に，再び「操作されるもの」を付与して，群を「操作」の集合にすることを考える．これを「群の表現」という．

例として正三角形の対称性群を使って説明しよう．図-1 のような正三角形をそれ自身に重ねる回転や反転（鏡映）操作を全部集めた集合

$$G = \{e, \rho_1, \rho_2, \sigma_1, \sigma_2, \sigma_3\}$$

を正三角形の対称性群と呼んだ．これらの元の積

$$\sigma_1 \circ \rho_1 = \sigma_2, \qquad \rho_1 \circ \sigma_1 = \sigma_3$$

を書き並べると図-1 右のような群表ができる．

【図-1　正三角形を不変にとどめる操作全体を正三角形対称性群という．右はその群表.】

さて，ここで群 G の各元に

$$D(e) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad D(\rho_1) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$D(\rho_2) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad D(\sigma_1) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$D(\sigma_2) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad D(\sigma_3) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

という 3 行 3 列の行列を対応させると，これらの行列の積は

$$D(\sigma_1)D(\rho_1) = D(\sigma_2), \quad D(\rho_1)D(\sigma_1) = D(\sigma_3)$$

という関係を満たしていることが確かめられる．つまり，抽象的な群の元 a を具体的な行列 $D(a)$ で表し，抽象的な群の積 ab を具体的に計算可能な行列の積 $D(a)D(b)$ で表すことができる．これが「群を行列で表現する」ということである．

表現とは群に「操作されるもの」を与えることだと言ったが，この場合，操作されるものはベクトルである．3 行 3 列の行列は 3 次元のベクトルを操作する．例えば，$D(\rho_1)$ はベクトル $\boldsymbol{v} = (v_1, v_2, v_3)$ に[3]

$$D(\rho_1)\boldsymbol{v} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_3 \\ v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}$$

と作用する．群を 3 次元行列で表現することは，群を 3 次元ベクトル空間に作用させることなのだ．これらの表現行列は，正三角形を図-2 のように 3 次元空間に置いて，線型変換していることに相当する．

[1]日本液晶学会誌 11 巻, 4 号, pp. 365-372 (2007 年 10 月) に掲載.

[2]Shogo Tanimura, 京都大学大学院情報学研究科数理工学専攻

[3]本文中に縦ベクトルを書くと収まりが悪いので，本文中では横ベクトルを書く．

【図-2　正三角形を 3 次元空間に置く.】

いま，正三角形対称性群を 3 次元行列で表現したが，3 次元以外の行列でも表現できる．例えば，

$$D'(e) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad D'(\rho_1) = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -1 & -\sqrt{3} \\ \sqrt{3} & -1 \end{pmatrix}$$
$$D'(\rho_2) = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -1 & \sqrt{3} \\ -\sqrt{3} & -1 \end{pmatrix} \quad D'(\sigma_1) = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$
$$D'(\sigma_2) = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & \sqrt{3} \\ \sqrt{3} & -1 \end{pmatrix} \quad D'(\sigma_3) = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & -\sqrt{3} \\ -\sqrt{3} & \end{pmatrix}$$

という 2 行 2 列の行列を対応させると，これらの行列の積もまた $D'(a)D'(b) = D'(ab)$ という関係を満たしている．さらに，群の各元に「1 行 1 列」の行列（つまり，数）を

$$\begin{aligned} &D''(e) = 1, \quad D''(\rho_1) = 1, \\ &D''(\rho_2) = 1, \quad D''(\sigma_1) = -1, \\ &D''(\sigma_2) = -1, \quad D''(\sigma_3) = -1 \end{aligned}$$

と対応させても $D''(a)D''(b) = D''(ab)$ が成立する．いっそのこと，群のすべての元に 1 を対応させて

$$\begin{aligned} &D_0(e) = D_0(\rho_1) = D_0(\rho_2) \\ &= D_0(\sigma_1) = D_0(\sigma_2) = D_0(\sigma_3) = 1 \end{aligned}$$

とおいてしまえば，当然 $D_0(a)D_0(b) = D_0(ab)$ が成立する．このような表現 D_0 を**自明な表現** (trivial representation) という．

以上の D, D', D'', D_0 はいずれも正三角形群の表現である．このように群の表現は一通りではない．そうすると，与えられた群の表現は全部で何通りあるか，という問題意識が自然と湧いて来る．また，二つの表現が「同じ」であるとはどういうことか，ということも当然問題になって来る．こういう問題を扱うのが群の表現論という数学である．

2　ベクトル空間

表現論の舞台はベクトル空間なので，ベクトル空間論の基礎を手短に復習しておこう．実数体 $\mathbb{R}$ 上のベクトル空間 V は，スカラー倍と和の定義された集合である．すなわち，任意の実数 $\lambda \in \mathbb{R}$ と任意のベクトル $\boldsymbol{v} \in V$ に対して，スカラー倍されたベクトル $\lambda\boldsymbol{v} \in V$ が定まる．また，任意の 2 つのベクトル $\boldsymbol{v}, \boldsymbol{v}' \in V$ の和 $\boldsymbol{v} + \boldsymbol{v}' \in V$ が定まる．ベクトルの集合 $\{\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \cdots, \boldsymbol{e}_n\}$ が V の**基底** (basis) であるとは，任意のベクトル $\boldsymbol{v}$ に対して

$$\boldsymbol{v} = v_1\boldsymbol{e}_1 + v_2\boldsymbol{e}_2 + \cdots + v_n\boldsymbol{e}_n$$

を満たす実数 $v_1, v_2, \cdots, v_n$ が一意的に存在することである．これら展開係数を並べて書いた

$$\boldsymbol{v} \doteq \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix}$$

を基底 $\{\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \cdots, \boldsymbol{e}_n\}$ による $\boldsymbol{v}$ の成分表示，あるいは $\boldsymbol{v}$ に伴う数ベクトルという．数ベクトルはベクトルそのものではなく，ベクトルの表示の一つにすぎないということを強調するために，等号 $=$ ではなく $\doteq$ という記号を使った．ベクトル $\boldsymbol{v}$ を与えられても，基底を定めないと係数は定まらないし，同じベクトルでも基底を変えれば係数の値は違ってくることに注意してほしい．このことは，例えば長さの次元を持った 1 次元ベクトル $\boldsymbol{v}$ を表すのに

$$\boldsymbol{v} = 3\,\mathrm{m} = 300\,\mathrm{cm} = 9.84\,\mathrm{feet}$$

というふうに，単位の取り方によって数値が異なるのと同様である．これを「$\boldsymbol{v} \doteq 3$」と書くのは一つの表示にすぎないという意味がわかるだろう．つまり，基準となるベクトル $\boldsymbol{e}$ を決めると $\boldsymbol{v} = c\boldsymbol{e}$ となる係数 c が決まるのであり，基準を変えれば $\boldsymbol{v} = c\boldsymbol{e} = c'\boldsymbol{e}'$ のように係数も変わる．

3　線型作用素と行列

2 つのベクトル空間 V, W があったとき，写像 $A : V \to W$ が任意の $\lambda \in \mathbb{R}$ と $\boldsymbol{v}, \boldsymbol{v}' \in V$ に対し

$$A(\lambda\boldsymbol{v}) = \lambda A(\boldsymbol{v}), \quad A(\boldsymbol{v} + \boldsymbol{v}') = A(\boldsymbol{v}) + A(\boldsymbol{v}')$$

を満たすならば A を**線型写像** (linear mapping) あるいは**線型作用素** (linear operator) という．$A(\boldsymbol{v})$ のことをたんに $A\boldsymbol{v}$ と書く．$\{\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \cdots, \boldsymbol{e}_n\}$ が V の基底，$\{\boldsymbol{f}_1, \boldsymbol{f}_2, \cdots, \boldsymbol{f}_m\}$ が W の基底ならば，

$$A\boldsymbol{e}_j = \sum_{i=1}^{m} \boldsymbol{f}_i A_{ij}$$

によって係数 A_{ij} を定義できる．一般のベクトル $\boldsymbol{v} = \sum_{j=1}^{n} \boldsymbol{e}_j v_j$ に A を作用させると

$$\boldsymbol{w} = A\boldsymbol{v} = \sum_{j=1}^{n} A\boldsymbol{e}_j v_j = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} \boldsymbol{f}_i A_{ij} v_j$$

を得る．ベクトル $\boldsymbol{w}$ を $\boldsymbol{w} = \sum_{i=1}^{m} \boldsymbol{f}_i w_i$ と展開すれば，その展開係数は

$$\begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ \vdots \\ w_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & \cdots & A_{1n} \\ A_{21} & A_{22} & \cdots & A_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{m1} & A_{m2} & \cdots & A_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix}$$

のような行列と数ベクトルの積で計算される．注意してほしいのは，基底を導入することによって初めて線型作用素は行列で表されるようになるし，基底の取り方によって行列の成分 A_{ij} の値は違ってくる，という点である．抽象的なベクトルを具体的な数列で表示したものが数ベクトルであり，抽象的な線型作用素を具体的な数表で表示したものが行列である，というふうにここでは認識してほしい．ただし，どんな基底を使っているか明らかな状況や，どんな基底でもかまわない状況もあり，そういう場合は，ベクトルを即，数ベクトルで，線型作用素を直接，行列で書き表してもよい．第 1 節で $D(\rho_1)$ などの行列を書き下したが，適当な基底を想定して書いたのである．

線型作用素 $A : V \to W$, $B : W \to X$ があれば，合成写像 $BA : V \to X$ もまた線型作用素である．BA に対する行列は，B に対する行列と A に対する行列の積に等しい：

$$(BA)_{ik} = \sum_{j=1}^{m} B_{ij} A_{jk}.$$

とくにベクトル空間 V から V 自身への全単射であるような線型作用素全体の集合を $GL(V)$ と書くことにする．$A, B \in GL(V)$ ならば積 $BA \in GL(V)$ である．この積は結合律を満たす．また，恒等写像 $I : V \to V$ は任意の $\boldsymbol{v} \in V$ をそのまま $I\boldsymbol{v} = \boldsymbol{v}$ とする写像である．I もまた $GL(V)$ の元であり，$IA = AI = A$ を満たす．$A \in GL(V)$ ならば $A^{-1} \in GL(V)$ である．こうして $GL(V)$ は群であることがわかり，$GL(V)$ を V 上の**一般線型変換群** (general linear transformation group) という．

4 群の表現

ベクトル空間と線型作用素の復習を終えたところで，群の表現のきちんとした定義を説明しよう．群 G に対して，ベクトル空間 V と準同型写像

$$D : G \to GL(V)$$

があれば，組 (D, V) を G の**表現** (representation) という．また，V を表現空間といい，V の次元をこの表現の次元という．群の元 $a \in G$ ごとに線型作用素 $D(a)$ を対応させ，$D(ab) = D(a)D(b)$ を満たしているとき，写像 D を G の表現というのである．$D(a)$ 自身は，ベクトル $\boldsymbol{v} \in V$ にベクトル $D(a)\boldsymbol{v} \in V$ を対応させる線型写像である．したがって，写像という意味では次のような多重構造になっている：

$$\begin{array}{rccccc} D: & G & \to & GL(V) & & \\ & a & \mapsto & D(a): & V & \to & V \\ & & & & \boldsymbol{v} & \mapsto & D(a)\boldsymbol{v} \end{array}$$

ここで，一般の写像 $f : X \to Y$ が元 $x \in X$ に $y = f(x) \in Y$ を対応させることを

$$\begin{array}{rccc} f: & X & \to & Y \\ & x & \mapsto & f(x) \end{array}$$

という形式で書く．集合から集合への矢印 $X \to Y$ と，元から元への矢印 $x \mapsto y$ とを使い分けている．第 1 節で導入した D は正三角形対称性群の 3 次元空間 $\mathbb{R}^3$ 上の表現である．同様に，第 1 節の D' は $\mathbb{R}^2$ 上の表現である．

一つの群でも複数の表現があるので，表現を分類するために，表現が「同値である」か「同値でない」かという基準を決めておく．群 G の表現 (D, V), (D', V') があったとき，線型写像 $T : V \to V'$ が任意の $a \in G$ に対して

$$TD(a) = D'(a)T \tag{1}$$

を満たすならば，T を (D, V) から (D', V') への けいらく **繋絡作用素** (intertwining operator) という．式 (1) を

$$\begin{tikzcd} V \arrow[r, "D(a)"] \arrow[d, "T"'] & V \arrow[d, "T"] \\ V' \arrow[r, "D'(a)"'] & V' \end{tikzcd}$$

という図式で表すこともある．左上の V の $\boldsymbol{v}$ という元から出発して，写像 $D(a)$ と T で移った結果 $TD(a)\boldsymbol{v}$ と，先に T で移ってから $D'(a)$ で移った結果 $D'(a)T\boldsymbol{v}$ が等しい，ということをこの図式は表している．つまり T は $D(a)$ と $D'(a)$ の間を取り持っている．さらに，全単射であるような繋絡作用素があれば，(D, V) と (D', V') は**同値** (equivalent) な表現であるという．

5　表現の分解

表現の性質を調べることがこの節の目的だが，一般論を展開する前に，第 1 節で導入した正三角形対称性群 G の 3 次元表現 D をもう一度調べてみよう．任意の $a \in G$ に対応する行列 $D(a)$ を $\boldsymbol{v} = (c, c, c)$ というベクトルに作用させると，

$$D(a)\begin{pmatrix} c \\ c \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c \\ c \\ c \end{pmatrix}$$

となる．つまり $(1, 1, 1)$ の方向を向いているベクトルは $D(a)$ の作用で動かない．また，$(1, 1, 1)$ に垂直なベクトルは $D(a)$ の作用を受けた後も $(1, 1, 1)$ に垂直であり続ける．そのことを確認するために，

$$\boldsymbol{e}_1 = \frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \ \boldsymbol{e}_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \ \boldsymbol{e}_3 = \frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

という $\mathbb{R}^3$ の基底を導入して，$D(a)$ を作用させると，例えば

$$\begin{aligned} D(\rho_1)\boldsymbol{e}_1 &= \boldsymbol{e}_1 \\ D(\rho_1)\boldsymbol{e}_2 &= \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = -\frac{1}{2}\boldsymbol{e}_2 + \frac{\sqrt{3}}{2}\boldsymbol{e}_3 \\ D(\rho_1)\boldsymbol{e}_3 &= \frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} = -\frac{\sqrt{3}}{2}\boldsymbol{e}_2 - \frac{1}{2}\boldsymbol{e}_3 \end{aligned}$$

を得る．関係式 $D\boldsymbol{e}_j = \sum_i \boldsymbol{e}_i D_{ij}$ でこの基底に関する行列成分 D_{ij} を定めると，

$$D(\rho_1) \doteq \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ 0 & \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

となる．基底 $\{\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3\}$ によって作用素 $D(\rho_1)$ を行列表記したものが右辺であるということを意識して，$=$ ではなく $\doteq$ を使って書いた．同様に，

$$D(\rho_2) \doteq \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ 0 & -\frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \quad D(\sigma_1) \doteq \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$D(\sigma_2) \doteq \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ 0 & \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \quad D(\sigma_3) \doteq \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ 0 & -\frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

なども得る．これらの式を見ると，3 次元表現 $D(a)$ の中には

$$D(a) = \begin{pmatrix} D_0(a) & \\ & D'(a) \end{pmatrix}$$

というパターンで 1 次元表現 $D_0(a)$ と 2 次元表現 $D'(a)$ が入っていることがわかる．このような状況を，D は D_0 と D' の**直和表現** (direct sum representation) であるといい，

$$D = D_0 \oplus D'$$

と書く．あるいは，D は $D_0 \oplus D'$ に分解されるともいう．D のように分解可能な表現を**可約表現** (reducible representation) といい，D_0 や D' のように

基底をどう取ってもこれ以上分解できない表現を**既約表現** (irreducible representation) という．

一般的な定義を与えよう．ベクトル空間 V の部分集合 W がスカラー倍と和で閉じているとき，すなわち，任意の実数 $\lambda \in \mathbb{R}$ と任意の $\boldsymbol{w}, \boldsymbol{w}' \in W$ について $\lambda \boldsymbol{w} \in W$ および $\boldsymbol{w} + \boldsymbol{w}' \in W$ が成立するならば，W を V の**部分空間** (subspace) という．V の 2 つの部分空間 W_1, W_2 があって，任意の $\boldsymbol{v} \in V$ に対して

$$\boldsymbol{v} = \boldsymbol{w}_1 + \boldsymbol{w}_2$$

を満たす $\boldsymbol{w}_1 \in W_1$ および $\boldsymbol{w}_2 \in W_2$ が一意的に存在するならば，V を W_1 と W_2 の**直和空間** (direct sum space) といい，$V = W_1 \oplus W_2$ と書く．

群 G の表現 (D, V) があったとき，V の部分空間 W で，任意の $\boldsymbol{w} \in W$ と任意の $a \in G$ に対して

$$D(a)\boldsymbol{w} \in W$$

が成立するならば，W を**不変部分空間** (invariant subspace) という．V の直和分解 $V = W_1 \oplus W_2$ において W_1 と W_2 がそれぞれ不変部分空間になれば，$V = W_1 \oplus W_2$ を表現 (D, V) の**直和分解** (direct sum decomposition) という．

いまの正三角形群の表現の例では，$\boldsymbol{e}_1$ のスカラー倍で張られる部分空間 $W_1 = \{\lambda \boldsymbol{e}_1 \,|\, \lambda \in \mathbb{R}\}$，および $\boldsymbol{e}_2$, $\boldsymbol{e}_3$ の線型結合で張られる部分空間 $W_2 = \{\lambda_2 \boldsymbol{e}_2 + \lambda_3 \boldsymbol{e}_3 \,|\, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{R}\}$ が，それぞれ不変部分空間であった．

分解不可能な表現，すなわち既約表現は，言わば表現の最小単位である．一般の表現は既約表現の直和になっていることが多い．したがって既約表現をリストアップしておくことは有用である．ちなみに正三角形群の非同値な既約表現は全部で $\{D', D'', D_0\}$ である．これらはそれぞれ 2 次元，1 次元，1 次元の既約表現であるが，次元数の 2 乗和を計算すると

$$2^2 + 1^2 + 1^2 = 6 \tag{2}$$

となり，これは正三角形群の位数（元の個数）6 に等しい．これは決して偶然の一致ではなく，一般の群でも（少し形を変えれば，無限位数の群でも）成り立つ関係である[4]．

6　テンソル積表現

表現から別の表現を派生的に作る方法として，テンソル積という応用上も重要な方法があるので，それを説明しよう．2 つのベクトル空間 V と V' があったとき，$\boldsymbol{v} \in V$ と $\boldsymbol{v}' \in V'$ の**テンソル積** (tensor product) $\boldsymbol{v} \otimes \boldsymbol{v}'$ を作る．また，テンソル積のスカラー倍 $\lambda(\boldsymbol{v} \otimes \boldsymbol{v}')$ や和 $\boldsymbol{v}_1 \otimes \boldsymbol{v}'_1 + \boldsymbol{v}_2 \otimes \boldsymbol{v}'_2$ も作る．さらに，実数 λ とベクトル $\boldsymbol{v}, \boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2 \in V$ と $\boldsymbol{v}', \boldsymbol{v}'_1, \boldsymbol{v}'_2 \in V'$ の間に

$$(\lambda \boldsymbol{v}) \otimes \boldsymbol{v}' = \boldsymbol{v} \otimes (\lambda \boldsymbol{v}') = \lambda(\boldsymbol{v} \otimes \boldsymbol{v}')$$
$$(\boldsymbol{v}_1 + \boldsymbol{v}_2) \otimes \boldsymbol{v}' = \boldsymbol{v}_1 \otimes \boldsymbol{v}' + \boldsymbol{v}_2 \otimes \boldsymbol{v}'$$
$$\boldsymbol{v} \otimes (\boldsymbol{v}'_1 + \boldsymbol{v}'_2) = \boldsymbol{v} \otimes \boldsymbol{v}'_1 + \boldsymbol{v} \otimes \boldsymbol{v}'_2$$

という関係式が成り立つことを要請する．これらの条件を満たす集合を V と V' の**テンソル積空間** (tensor product space) といい，$V \otimes V'$ と書く．

もう少し具体的に説明しよう．物理ふうに言えば，テンソル積とは「ある次元を持った量と，ある次元を持った量を掛けて，新しい次元を持つ量を定義すること」である．例えば（力）×（距離）=（仕事）という関係はテンソル積の一種である．物体を 2 N（ニュートン）の力で 6 m（メートル）動かす仕事は，3 N の力で 4 m 動かす仕事に等しく，結局，

$$2\,\mathrm{N} \otimes 6\,\mathrm{m} = 3\,\mathrm{N} \otimes 4\,\mathrm{m} = 4\,\mathrm{N} \otimes 3\,\mathrm{m} = 12\,\mathrm{N} \otimes \mathrm{m}$$

という仕事に等しい．形式化すると，

$$(\lambda \boldsymbol{e}) \otimes (\lambda' \boldsymbol{f}) = (\lambda\lambda')(\boldsymbol{e} \otimes \boldsymbol{f})$$

というテンソル積の計算になっている．$\mathrm{N} \otimes \mathrm{m}$ のことを J（ジュール）と呼んでいるのである．(力)

[4] 有限群に対して成り立つ (2) のような関係式はバーンサイド (Burnside) の定理と呼ばれる．バーンサイドの定理を拡張し精緻にしたものとして，無限位数であってもコンパクト群に対して成り立つピーター・ワイル (Peter-Weyl) の定理がある．これらについては参考文献 [5] などを参照してほしい．

×（距離）=（仕事）は1次元同士のテンソル積であるが，一般に m 次元ベクトル $\boldsymbol{v}$ と n 次元ベクトル $\boldsymbol{v}'$ のテンソル積は mn 次元のベクトルになる：

$$\begin{aligned}\boldsymbol{v}\otimes\boldsymbol{v}' &= \Big(\sum_{i=1}^{m} v_i\boldsymbol{e}_i\Big)\otimes\Big(\sum_{j=1}^{n} v'_j\boldsymbol{f}_j\Big)\\ &= \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} v_i\,v'_j(\boldsymbol{e}_i\otimes\boldsymbol{f}_j).\end{aligned}$$

数ベクトルで表示すると

$$\begin{pmatrix} v_1\\ v_2\\ \vdots\\ v_m\end{pmatrix}\otimes\begin{pmatrix} v'_1\\ v'_2\\ \vdots\\ v'_n\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} v_1v'_1\\ v_1v'_2\\ \vdots\\ v_iv'_j\\ \vdots\\ v_mv'_n\end{pmatrix}$$

となる．つまり，$\boldsymbol{v}$ と $\boldsymbol{v}'$ の成分を順々に掛算して，すべての組み合わせを並べたものが $\boldsymbol{v}\otimes\boldsymbol{v}'$ の数ベクトルである．テンソル積空間の一般の元 $\boldsymbol{t}\in V\otimes V'$ は $\boldsymbol{t}=(t_{11},t_{12},\cdots,t_{1n},t_{21},t_{22},\cdots,t_{2n},t_{31},\cdots,t_{mn})$ という2重添字付き成分で表示される．同様にして，3重テンソル積空間 $V\otimes V'\otimes V''$ も定義され，その元は x_{ijk} $(i=1,\cdots,m; j=1,\cdots,n; k=1,\cdots,l)$ という3重添字付きの成分を持つ数ベクトルで表示される．

さらに，2つの線型作用素 $A:V\to W$, $B:V'\to W'$ があったとき，A と B のテンソル積 $A\otimes B$ を，線型作用素

$$\begin{aligned} A\otimes B: V\otimes V' &\to W\otimes W'\\ \boldsymbol{v}\otimes\boldsymbol{v}' &\mapsto (A\boldsymbol{v})\otimes(B\boldsymbol{v}')\end{aligned}$$

と定める．2次元行列のテンソル積なら4次元行列になる：

$$\begin{aligned}&\begin{pmatrix} A_{11} & A_{12}\\ A_{21} & A_{22}\end{pmatrix}\otimes\begin{pmatrix} B_{11} & B_{12}\\ B_{21} & B_{22}\end{pmatrix}\\ &=\begin{pmatrix} A_{11}B_{11} & A_{11}B_{12} & A_{12}B_{11} & A_{12}B_{12}\\ A_{11}B_{21} & A_{11}B_{22} & A_{12}B_{21} & A_{12}B_{22}\\ A_{21}B_{11} & A_{21}B_{12} & A_{22}B_{11} & A_{22}B_{12}\\ A_{21}B_{21} & A_{21}B_{22} & A_{22}B_{21} & A_{22}B_{22}\end{pmatrix}\end{aligned}$$

さて，群 G の表現 (D,V) と (D',V') があったとき，線型作用素 $(D\otimes D')(a)=D(a)\otimes D'(a)$ を定めれば，新たな表現 $(D\otimes D', V\otimes V')$ を得る．これを (D,V) と (D',V') の**テンソル積表現** (tensor product representation) という．

7 回転群の表現

若干，抽象論が続いたので，具体例を議論しよう．3次元回転群 $SO(3)$ とは，3次元行列 R で，転置行列 R^t が $R^tR=RR^t=I$（単位行列）を満たし，$\det R=1$ を満たしているもの全体の集合であった．3次元ベクトル $\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}$ の内積を $\langle\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}\rangle=\boldsymbol{u}^t\,\boldsymbol{v}=\sum_{i=1}^{3}u_iv_i$ で定義する．回転行列 R でベクトル $\boldsymbol{u}$, $\boldsymbol{v}$ は $R\boldsymbol{u}, R\boldsymbol{v}$ に移されるが，内積は変わらない：

$$\langle R\boldsymbol{u},R\boldsymbol{v}\rangle=(R\boldsymbol{u})^t\,R\boldsymbol{v}=\boldsymbol{u}^tR^tR\boldsymbol{v}=\boldsymbol{u}^t\,\boldsymbol{v}=\langle\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}\rangle.$$

つまり，回転はベクトルの長さとベクトル間の角度を不変に保つ．

$R\in SO(3)$ は $\boldsymbol{v}=(v_1,v_2,v_3)\in\mathbb{R}^3$ に

$$\boldsymbol{v}\mapsto\boldsymbol{v}'=R\boldsymbol{v},\quad v'_i=\sum_{p=1}^{3}R_{ip}\,v_p \tag{3}$$

のように作用する．このことを

$$\begin{aligned} D_3: SO(3) &\to GL(\mathbb{R}^3)\\ R &\mapsto D_3(R): \ \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3\\ &\qquad\qquad\quad \boldsymbol{v} \mapsto D_3(R)\boldsymbol{v}=R\boldsymbol{v}\end{aligned}$$

と書く．つまり $(D_3,\mathbb{R}^3)$ は $SO(3)$ の表現である．

これからテンソル積表現 $D_3\otimes D_3$ を作ろう．テンソル積空間 $\mathbb{R}^3\otimes\mathbb{R}^3$ の元 $\boldsymbol{t}$ は2重添字付き成分 t_{ij} $(i,j=1,2,3)$ を持つ．$R\in SO(3)$ に対する $(D_3\otimes D_3)(R)$ が $\boldsymbol{t}$ に作用すると

$$\boldsymbol{t}\mapsto\boldsymbol{t}'=(R\otimes R)\boldsymbol{t},\quad t'_{ij}=\sum_{p,q=1}^{3}R_{ip}\,R_{jq}\,t_{pq} \tag{4}$$

を返す．

同様に，3重テンソル積表現 $D_3\otimes D_3\otimes D_3$ は $\mathbb{R}^3\otimes\mathbb{R}^3\otimes\mathbb{R}^3\ni\boldsymbol{x}\mapsto\boldsymbol{x}'=(R\otimes R\otimes R)\boldsymbol{x}$, すなわち

$$x'_{ijk}=\sum_{p,q,r=1}^{3}R_{ip}\,R_{jq}\,R_{kr}\,x_{pqr} \tag{5}$$

と作用する．回転 R に伴って式 (3), (4), (5) のように変換する量 $\boldsymbol{v}$, $\boldsymbol{t}$, $\boldsymbol{x}$ をそれぞれ，1 階テンソル，2 階テンソル，3 階テンソルと呼ぶこともある．

じつは，回転群のテンソル積表現は可約である．つまり $\mathbb{R}^3 \otimes \mathbb{R}^3$ は不変部分空間に直和分解できる．そのことを見ていこう．2 階テンソル $\boldsymbol{a}$ の成分が $a_{ji} = a_{ij}$ を満たすならば，$\boldsymbol{a}$ を**対称テンソル** (symmetric tensor) という．テンソル $\boldsymbol{b}$ の成分が $b_{ji} = -b_{ij}$ を満たすならば，$\boldsymbol{b}$ を**反対称テンソル** (antisymmetric tensor) という．テンソル $\boldsymbol{c}$ の成分が $c_{ij} = c\,\delta_{ij}$ （c は実数，δ_{ij} はクロネッカーのデルタ）と書けるならば，$\boldsymbol{c}$ は**スカラー的** (scalar) であるという．また，テンソル $\boldsymbol{t}$ の対角成分の和を $\mathrm{Tr}\,\boldsymbol{t} = \sum_{i=1}^{3} t_{ii}$ と書き，$\boldsymbol{t}$ の**トレース** (trace) と呼ぶ．$\mathrm{Tr}\,\boldsymbol{t} = 0$ ならば，$\boldsymbol{t}$ を**トレースレス・テンソル** (traceless tensor) という．反対称テンソルは必ずトレースレスである（理由を考えてほしい）.

回転群による変換 (4) の下で，対称テンソルは対称テンソルに移る．つまり $\boldsymbol{a}$ が対称テンソルならば，$\boldsymbol{a} \mapsto \boldsymbol{a}' = (R \otimes R)\boldsymbol{a}$ で移った $\boldsymbol{a}'$ も対称である．なぜなら，$a_{pq} = a_{qp}$ だから

$$a'_{ji} = \sum_{p,q=1}^{3} R_{jp}\,R_{iq}\,a_{pq} = \sum_{p,q=1}^{3} R_{iq}\,R_{jp}\,a_{qp} = a'_{ij}.$$

同様に，反対称テンソルは反対称テンソルに移ることもわかる．また，スカラー的テンソルは不変に留まる：

$$\begin{aligned} c'_{ij} &= \sum_{p,q=1}^{3} R_{ip}\,R_{jq}\,c_{pq} = \sum_{p,q=1}^{3} R_{ip}\,R_{jq}\,c\,\delta_{pq} \\ &= \sum_{p=1}^{3} R_{ip}\,R_{jp}\,c = \delta_{ij}\,c = c_{ij}. \end{aligned}$$

ここで回転行列の性質 $RR^t = I$ すなわち $\sum_{p=1}^{3} R_{ip}\,R_{jp} = \delta_{ij}$ を使った．また，テンソルのトレースは回転で変わらない：

$$\begin{aligned} \mathrm{Tr}\,\boldsymbol{t}' &= \sum_{i=1}^{3} t'_{ii} = \sum_{i,p,q=1}^{3} R_{ip}\,R_{iq}\,t_{pq} \\ &= \sum_{p,q=1}^{3} \delta_{pq}\,t_{pq} = \sum_{p=1}^{3} t_{pp} = \mathrm{Tr}\,\boldsymbol{t}. \end{aligned}$$

ここでは $R^t R = I$ を使った．以上より，トレースレス対称テンソル・反対称テンソル・スカラー的テンソルは，回転してもそれぞれの性質が変わらないことがわかる．言い換えると，トレースレス対称テンソルだけを集めた集合は，テンソル全体の空間の中で回転群の作用に関する不変部分空間になっている．反対称テンソル全体の集合，スカラー的テンソル全体の集合についても同様のことが言える．

また，どんな 2 階テンソル $\boldsymbol{t}$ に対しても

$$\boldsymbol{t} = \boldsymbol{a} + \boldsymbol{b} + \boldsymbol{c}$$

となるようなトレースレス対称テンソル $\boldsymbol{a}$, 反対称テンソル $\boldsymbol{b}$, スカラー的テンソル $\boldsymbol{c}$ が唯一存在する．実際,

$$\begin{aligned} a_{ij} &= \frac{1}{2}(t_{ij} + t_{ji}) - \frac{1}{3}\delta_{ij}\,\mathrm{Tr}\,\boldsymbol{t}, \\ b_{ij} &= \frac{1}{2}(t_{ij} - t_{ji}), \\ c_{ij} &= \frac{1}{3}\delta_{ij}\,\mathrm{Tr}\,\boldsymbol{t} \end{aligned}$$

とおけばよい．$a_{ij}+b_{ij}+c_{ij} = t_{ij}$ となることはすぐわかるし，トレースレス･対称性･反対称性といった性質も確かめられる．テンソル $\boldsymbol{t}$ は 9 個の成分 t_{ij} $(i, j = 1, 2, 3)$ を持っていた．対称テンソル $\boldsymbol{a}$ の独立な成分は $(a_{11}, a_{22}, a_{33}, a_{12}, a_{13}, a_{23})$ の 6 個であり，さらにトレースレスという条件 $a_{11} + a_{22} + a_{33} = 0$ を課すと独立な成分は 5 個に減る．反対称テンソル $\boldsymbol{b}$ の独立な成分は (b_{12}, b_{13}, b_{23}) の 3 個である．スカラー的テンソルの独立な成分は係数 c だけ，1 個である．以上をまとめると，回転群のテンソル積表現 $D_3 \otimes D_3$ は 9 次元表現であり，5 次元，3 次元，1 次元の表現に直和分解される：

$$D_3 \otimes D_3 = D_5 \oplus D_3 \oplus D_1.$$

そしてもうこれ以上は分解できない．このことは，2 つの 3 次元ベクトル $\boldsymbol{u}$, $\boldsymbol{v}$ からトレースレス対称テンソル α_{ij}, 外積 $\boldsymbol{\beta}$, 内積 γ という 3 種類の掛算が作れることと対応している：

$$\begin{aligned} \alpha_{ij} &= \frac{1}{2}(u_i v_j + u_j v_i) - \frac{1}{3}\delta_{ij}\,\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{v}, \\ \boldsymbol{\beta} &= \boldsymbol{u} \times \boldsymbol{v} = -\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{u}, \\ \gamma &= \boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{v}. \end{aligned}$$

3つの3次元ベクトルの掛算でどんな量ができるかは，読者に考えてみてもらいたい．数学的には $D_3 \otimes D_3 \otimes D_3$ の分解という問題である．答えだけを書いておくと，

$$D_3 \otimes D_3 \otimes D_3 = D_7 \oplus D_5 \oplus D_5 \oplus D_3 \oplus D_3 \oplus D_3 \oplus D_1$$

となる[5]．直和分解に D_1 が一回だけ現れたということは，3 つのベクトルの掛算でただ一つだけ独立なスカラーが作れるということである．それは $\boldsymbol{u} \cdot (\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{w})$ である．

8　表現論の物理的意義

群の表現論にはさまざまな物理的意義があるが，ここではその一面について議論しよう．実験にせよ，理論計算にせよ，我々はデータ

$$d_1, d_2, d_3, d_4, d_5, d_6, d_7, d_8, d_9, \cdots \tag{6}$$

を得るのだが，データはそのままでは数字の羅列である．これらから「意味のある量」を引き出す作業が必ず必要になる．そこでどうするかというと，データの「見方」を変えるのである．例えば，測定器の向きを変えてデータを取り直すのである．あるいは測定されるサンプルの向きを変えてもよい．測定器の向きを変えれば，測定値は変化するかもしれない：

$$d'_1, d'_2, d'_3, d'_4, d'_5, d'_6, d'_7, d'_8, d'_9, \cdots . \tag{7}$$

データを十分集めてあれば，回転後の測定データは，回転前の測定データから決まるだろう．つまり，後のデータ d'_i は前のデータの関数になっているだろう：

$$d'_i = F_i(d_1, d_2, d_3, d_4, d_5, d_6, \cdots).$$

実際には，装置の向きを変えるたびに同じ実験を繰り返さなくても，計算上の変換だけで済むことが多いのだが，その変換規則 F_i はやはり実験的に確かめるべきものである．ここでは，いちおう変換前の全データ $(d_1, d_2, d_3, d_4, d_5, d_6, \cdots)$ があれば変換後の d'_i の値が決まるという書き方をしたが，実際には，すべてのデータが絡み合っているとは限らない．むしろ，うまくデータを整理すれば，回転で互いに関係し合っているデータは 3 つだけになるかもしれない．つまり，変換後の (d'_1, d'_2, d'_3) の値を知るには (d_1, d_2, d_3) だけを知っていればよいかもしれない．さらに (v_1, v_2, v_3) というデータは

$$v'_i = \sum_{p=1}^{3} R_{ip}\, v_p$$

という線型変換で移るならば，計算はとても簡単である．あるいは関連し合っているデータは t_{ij} という 9 つだけということもあるかもしれない：

$$t'_{ij} = \sum_{p,q=1}^{3} R_{ip}\, R_{jq}\, t_{pq}.$$

さらに $t_{ij} = a_{ij} + b_{ij} + c_{ij}$ というふうに，関連の有無に従ってデータを細分することもできる．こういうことを繰り返すと，データの羅列 (6) は

$$(v_1, v_2, v_3), (a_{11}, a_{12}, a_{13}, a_{22}, a_{23}), c, \cdots \tag{8}$$

という形に仕切られ，整理される．(v_1, v_2, v_3) という 3 つのデータは回転の下で互いに関連して変換され，変換の前後関係を決めるという意味ではこれより細かく分割できないのだから，まとまった一つの実体を表していると思ってよい．例えば，誘電体の分極は3つのデータ (P_1, P_2, P_3) で特徴付けられ，3 つで一まとまりの物理的内容を持っている．

トレースレス対称テンソル $(a_{11}, a_{12}, a_{13}, a_{22}, a_{23})$ もそれで一まとまりの実体を表すデータである．例えば，単位強さの電場を j 方向にかけたときの分極の i 成分を ε_{ij} と書けば，これは対称テンソルになる．ε_{ij} のトレースは平均電気感受率を表しているし，トレースレスの部分は分極応答の異方性を表している．

[5] クレブシュ・ゴルダン (Clebsch-Gordan) の公式（量子力学では角運動量の合成則とも呼ばれる）を使うと，このような分解ができることがわかる．本記事末に挙げる参考文献のいずれにもクレブシュ・ゴルダンの公式についての解説があるので，見てほしい．

回転に伴って物理データがどう変化するか調べることは，回転群の表現の具体例を調べることに他ならない．回転群の作用を通して，互いに関連のあるデータと，関連のないデータが仕分けされ，回転群の既約表現ごとに一まとまりの物理的に意味のある量が現れてくる．こうして，データの羅列 (6) は，有機的関係を編み込まれた構造物 (8) に変わる．言わば，群はデータを揺さぶって，データをふるい分け，データの中に隠されていた骨組みを明らかにするのである．こういうことを系統的・自動的にやるのに群の表現論が役立つのである．

群の表現論は，データの分類・整理に役立つだけではない．未発見のものを予測する能力もある．例えば，回転群の既約表現は必ず奇数次元であることが知られている．だから 4 次元の既約表現はあり得ない．4 つのデータがあるなら，それは 5 次元表現の一部分であり，もう 1 つ測るべきデータを見落としている可能性がある．しかも表現論を駆使すると未発見のデータについてもある程度の予測ができる．この方法は，とくに素粒子論において際立って有効で，素粒子の分類や，未発見の粒子の予言に群の表現論が活用されているのである．統計物理の分野でも，対称性の現れ方は，相転移と関連して興味を持たれることが多く，対称性の現れとは，群の表現に他ならないので，表現論は統計物理でも有用な視点・方法になり得る．

なお，与えられた群の既約表現が全部でどれだけあるかとか，ある表現を既約表現に分解せよ，といった問題は当然重要であり，そういう問題を系統的に扱う数学も相当発達している．ぜひ参考文献にあたって，さらに学んでいただきたい．学習の際には，ユニタリ表現，指標，シューアの補題，不変測度，直交定理，正則表現といったキーワードに注意を払って理解を進めてもらえばよいと思う．

今回の講義のポイントをまとめておこう：　群にベクトル空間という「作用の受け手」を与え，群の元を線型作用素にすることを，群の表現と言った．

操作されるものから切り離して群を抽象化しておいたおかげで，具体的な表現の仕方がいろいろあることがわかった．このように群論と表現論を分けておくと，すべての表現に共通な一般的性質と，各表現の個別の性質を，切り分けて見ることができる．　ベクトルのテンソル積は，物理量の掛算と対応している．　表現空間の部分空間に群の作用が収まっていれば，つまり不変部分空間があれば，表現空間は細分される．それより小さな不変部分空間がないような表現空間を，既約表現空間という．

既約表現空間は一まとまりの物理的実体・属性を表している．

次回は，表現論の，液晶の物理への応用について講義しよう．

参考文献

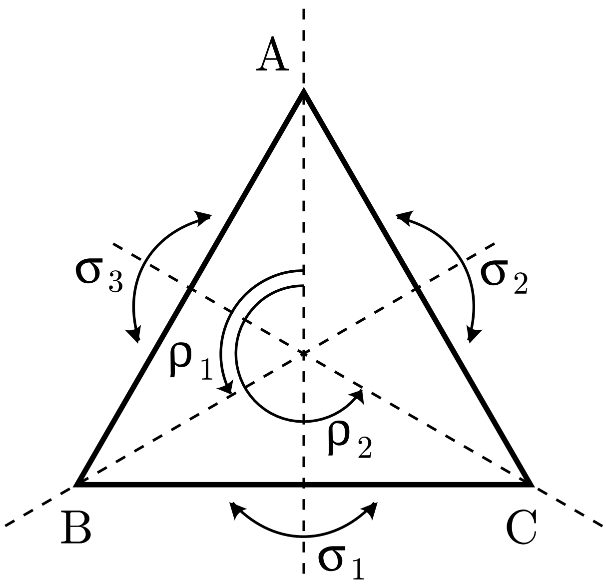
[1] 犬井鉄郎, 田辺行人, 小野寺嘉孝：応用群論 — 群表現と物理学，裳華房 (1980)．群の表現論の物理への応用を詳細に解説した本である．

[2] 江沢洋，島和久：群と表現，岩波書店 (1994)．物理や化学への応用を意識して書かれており，数学的にも踏み込んだ内容になっている．

[3] 山内恭彦，杉浦光夫：連続群論入門，培風館 (1960). 回転群を中心に具体的な表現論を解説.

[4] 桜井純：現代の量子力学（上），吉岡書店 (1989)．回転群だけを扱うのであれば量子力学の角運動量の理論を学んだ方が早いかもしれない．

[5] 小林俊行，大島利雄：リー群と表現論，岩波書店 (2005)．「Lie 群と Lie 環 (1,2 巻)，岩波書店 (1999)」と同内容．本格的な数学書．



	e	ρ_1	ρ_2	σ_1	σ_2	σ_3
e	e	ρ_1	ρ_2	σ_1	σ_2	σ_3
ρ_1	ρ_1	ρ_2	e	σ_3	σ_1	σ_2
ρ_2	ρ_2	e	ρ_1	σ_2	σ_3	σ_1
σ_1	σ_1	σ_2	σ_3	e	ρ_1	ρ_2
σ_2	σ_2	σ_3	σ_1	ρ_2	e	ρ_1
σ_3	σ_3	σ_1	σ_2	ρ_1	ρ_2	e

図1

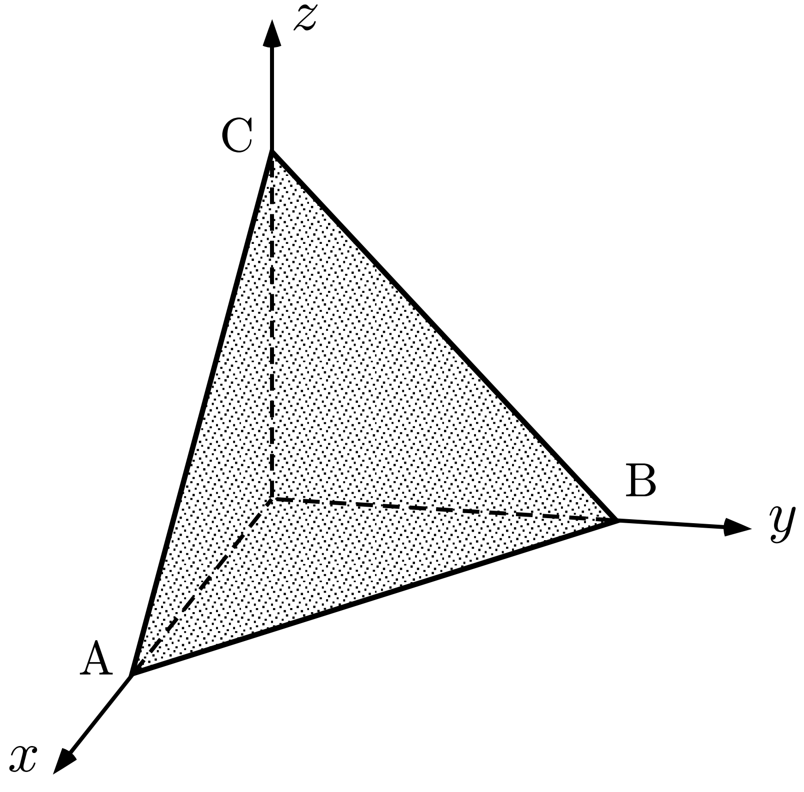


図2