幾何学における0

曲率0の不思議

谷 村　省 吾

1. 幾何学の0とは何か？

*1) 私がいただいた題は「幾何学における0」である．難しい題である．のっけから言い訳で恐縮だが，困難の最大の理由は「幾何学における0とは何か」という問いに対する答えが定まっていないことにある．0と言えば，任意の数 a に対して $a+0=a$ を満たすもの，つまり和に関する零元という代数的定義を思い浮かべるのが常識的な発想であろう．0に相当するものが幾何学にあるだろうか，それは何だろうかという問いには，各人異なる答えを返すであろう．実際，何人かの数学者に「幾何学の0と言われたら何を思い浮かべますか？」と尋ねたところ,「空集合」（まさに0の原型）,「点」（分割不可能なもの，0次元という意味で，あるいは関数の零点という意味で．スペクトルと言えばもっと代数幾何的だろうか．またホップの定理では接ベクトル場の零点に注目する）,「消滅定理」（ある種の位相的障害が消えている）といった答えが返って来た．また，多様体の連結和を考えれば，球面は連結和に関する零元であると言える．編集部からは,「曲率0のパラドクス」という提案をいただいた．数学では平坦接続，物理ではアハラノフ・ボーム効果と呼ばれるものだ．そこで本稿では平坦な世界にも意外な不思議があるという話を紹介しよう．

*1） 本稿は数理科学（サイエンス社）2005年11月号 (Vol.43-11, No.509) pp.27-32 に掲載された．

2. 曲線の曲率と曲面のガウス曲率

曲面の曲率の話から始めよう[1]．例えば球面は典型的な曲面であるが，面の曲がり具合というものをどうすれば定量的に表現できるだろうか？

曲がり具合の測り方の一つはガウスの曲率と呼ばれるものである．それを定義するためにまず曲線の曲率を定義する．図1のように曲線上の点Pから曲線に沿って長さ Δs だけ離れた点Qをとり，PとQにおける接ベクトルの方向角の変化の大きさを $\Delta\theta$ としたとき，

$$\kappa=\lim_{\Delta s\to 0}\frac{\Delta\theta}{\Delta s}$$

という極限で定まる κ を，点Pにおける曲率と言う．κ の逆数は曲率半径と呼ばれる．

それでは曲面の曲率はどう定義するか？ 3次元空間に置かれた曲面上の点Pに対して，点Pを通る曲面内の曲線を引き，その曲線の曲率を測るというのは一つの案だ．しかし図2(a)のように曲線の引き方は何通りでもあり，曲率はいくらでも異なった値をとることができてしまい，曲面そのも

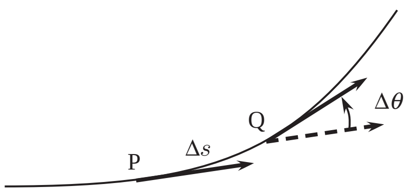

図1　曲線の曲率

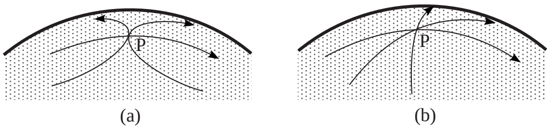

図 2　曲面の曲率を曲線の曲率で定義する．
(a) 点 P を通るいろいろな曲線．(b) 測地線．

のの曲がり具合を測っていることにはならないであろう．そこで，図 2(b) のように点 P を通る測地線をとることにする．測地線とは，いわば，曲面上に束縛された曲線としては可能な限りまっすぐな線であり，曲面上の 2 点を結ぶ最短曲線として特徴づけられる．この「できる限りまっすぐに引かれた」測地線が曲がっていれば，それはもはや曲面そのものが曲がっているせいだと言えるだろう．ところが測地線に限ってもその選び方は一通りではない．そこでこれらの測地線の中で，点 P における曲率が最大となる測地線と最小となる測地線に注目する．じつはこの 2 本の測地線は互いに直交することが証明される．これらの測地線の曲率の最大値，最小値をそれぞれ $\kappa_{\max}$，$\kappa_{\min}$ とする．そこで，

$$H = \frac{1}{2}(\kappa_{\max} + \kappa_{\min}), \qquad G = \kappa_{\max}\kappa_{\min}$$

で定義される量 H を点 P における平均曲率，G をガウス曲率と言う．

ただし，図 3 のようにある方向には凸に，それと直交する方向には凹に曲がっているような面に対しては，$\kappa_{\max}$ が正，$\kappa_{\min}$ が負になるように曲率の符号を定めておく．したがってこの場合はガウス曲率は負になる．

しかしこれらの曲率の定義の仕方は外来的[*2)]で

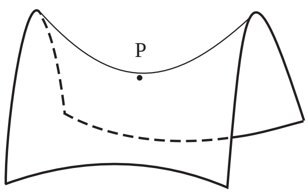

図 3　負のガウス曲率

あることに注意したい．とくに曲線の曲率の定義は，この曲線が 2 次元平面や 3 次元空間にどう置かれているかということに依存している．もし曲線内に閉じ込められた生き物がいて，光もこの曲線に沿ってしか進まないとしたら，この曲線が曲がっているということをこの生き物は認識し得るだろうか？ それは無理であろう．この曲線が外から見てどう曲がっていようと，この世界の住人にとっては光はまっすぐ進むのである．他に逃げ場がないからである．この世界の住人にとって見える景色は，ファイバースコープを覗いているようなもので，ファイバーがどう曲がろうと，いつも景色は真正面に見える．曲線から一歩も出ることのない住人にとっては，曲線は直線と区別がつかないのである．

同様に曲面の曲がり具合を測るときも，それは曲面の外にいる人の視点からのみ測られるものなのか，それとも曲面に束縛された住人にも認識可能な曲がりなのか，考える必要がある．

3. ホロノミーとリーマン曲率

曲面から一歩も出ることなく，曲面の曲率を定義できるだろうか？ リーマン曲率を用いればそれはできる．曲面に接ベクトルを置いて，これを閉曲線に沿って平行移動していって元の地点に戻ると接ベクトルの向きが変わっていることがある．見やすい例としては，球面上で図 4(a) のように北極点から出発して子午線に沿って進み，赤道を 4 分の 1 周して，また子午線に沿って北極点に戻るという道筋に沿って接ベクトルを平行移動した場合であろう．この場合，出発点に戻って来た接ベクトルは 90° 向きが変わっている．このように平行移動の結果として生じる接ベクトルの正味の回転をホロノミーと言う．ホロノミーは球面に束縛された住人にも認識可能な「曲がり」の現れである．今の例では，閉曲線が囲む立体角は全球面の 8 分の 1 だから $4\pi \times \frac{1}{8} = \frac{1}{2}\pi$ であり，これはホロノミー角に等しい．

*2)　その空間の内にある視点ではなく外にある視点から観測されるという意味で「外来的」という言葉を用いることにする．

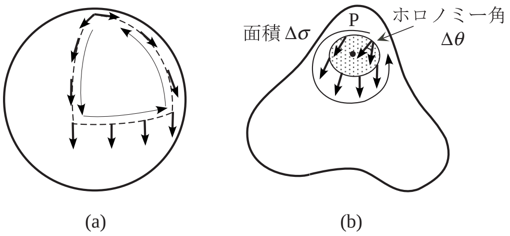

図 4　平行移動とホロノミー

一般に，曲面上の点 P を囲む微小な閉曲線に沿った平行移動に伴うホロノミー角 $\Delta\theta$ は閉曲線が囲む微小面積 $\Delta\sigma$ に比例する．この面積を小さくしていった極限で

$$K = \lim_{\Delta\sigma\to 0} \frac{\Delta\theta}{\Delta\sigma}$$

が有限な値に収束すれば，K を点 P におけるリーマン曲率と言う．半径 R の球面の場合，点 P をどこにとっても $K = 1/R^2$ になる．リーマン曲率は曲面内にとどまっている住人によって測定可能な曲率であり，その意味で内在的な曲率と呼ばれる．それに対して曲線の曲率や平均曲率は外来的な曲率である．しかし，ガウス曲率 G については $G = K$ という関係が成り立つ．

4. 円筒と円錐の曲率

ところで円筒の側面の上で接ベクトルを平行移動するとホロノミー角は 0 である．このことは円筒の展開図を見ればわかりやすい．円筒は見かけ上，つまり外来的には曲がっているが，内在的には平坦なのである．展開図を描けるということ自体，じつは平坦であるということの現れである．

それでは円錐の側面の曲率はいくらであろうか？円錐は円筒と同様，平面に展開できるので，ホロノミーは 0 である．ところが頂点を囲むような閉曲線に沿って平行移動したときには 0 でないホロノミーを生じる．そのホロノミー角は，円錐を展開したときに現れる欠損角に等しい．頂点を囲んで一周する限り，どんなに小さな閉曲線でもホロノミー角は一定である．頂点を囲まない閉曲線ならばすべてホロノミー角は 0 である．この意味で，

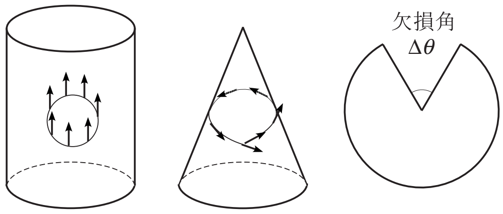

図 5　円筒と円錐上の平行移動，円錐の展開図

円錐の曲率は頂点にだけ集中しており，そこでの曲率は無限大であり，他の場所の曲率は 0 である．

5. 折れ線と回転数

滑らかな曲線ではなく，折れ線に対しては，頂点の前後の距離 $\Delta s \to 0$ という極限で接ベクトルの方向角の変化 $\Delta\theta$ が 0 でない有限な値にとどまるので，曲率 $\kappa = \frac{\Delta\theta}{\Delta s}$ が発散してしまう．この場合は折れ角 $\Delta\theta$ そのものを考察の対象にする．

さて，図 6 のように平面上の折れ線で囲まれた図形，すなわち多角形について，各頂点の折れ角（外角）$\Delta\theta_i$ の和はいくらになるだろうか？ 一周して元の向きに戻るという直観から明らかであるが，

$$\sum_{i=1}^{n} \Delta\theta_i = 2\pi$$

となる．ちなみに多角形の頂点の内角 $\Delta\phi_i$ は $\Delta\phi_i + \Delta\theta_i = \pi$ を満たすので，n 角形について

$$\sum_{i=1}^{n} \Delta\phi_i + \sum_{i=1}^{n} \Delta\theta_i = \sum_{i=1}^{n} \Delta\phi_i + 2\pi = n\pi$$

つまり，内角の和が $\sum_{i=1}^{n} \Delta\phi_i = (n-2)\pi$ となることが容易に理解される．一般に，自己交差を許された閉じた折れ線に対しては，折れる方向の左

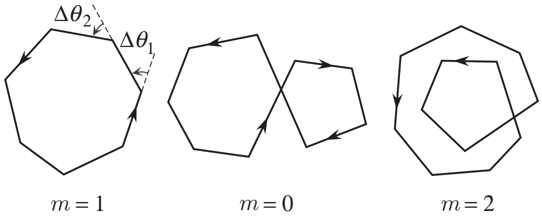

図 6　折れ線の外角と回転数

右に応じて $\Delta\theta_i$ に正負の符号をつけて足したとき

$$\sum_{i=1}^{n} \Delta\theta_i = 2\pi m$$

が成り立つ．m は折れ線の回転数と呼ばれる整数である．折れ線を「正則に変形」しても回転数は変化しない．ここでいう正則な変形とは，辺と辺とが重なることを許さない範囲で頂点の位置を連続的に変化させることである．

さらに一般に，滑らかな曲線部分と折れ線部分とを有している閉曲線 C に対しては，滑らかな区間にわたる曲率の積分と，外角の和について

$$\int_C K\, ds + \sum_{i=1}^{n} \Delta\theta_i = 2\pi m$$

という関係が成り立つ．曲率がデルタ関数的に集中した点が頂点だと言える．

6. 折れ面とオイラー数

多角形の欠損角の和が連続変形で変わらない回転数という意味を持ったように，多面体の頂点の欠損角 $\Delta\theta_i$ の和も何か意味のある量になるだろうか？ じつはオイラー数と呼ばれる位相不変量になる：

$$\sum_{i=1}^{n} \Delta\theta_i = 4\pi(1-g).$$

ここで g は 0 または正の整数であり，種数と呼ばれる（図 7）．トーラスに同相な多面体は，負の欠損角（正の剰余角）を持つ頂点も持っていることに注意してほしい．これを 2π で割った $\chi = \frac{1}{2\pi}\sum_{i=1}^{n} \Delta\theta_i = 2(1-g)$ は，頂点の個数 V と，辺の個数 E と，面の個数 F で定義されるオイラー数 $\chi = V - E + F$ に等しい．

一般に，滑らかな面と，滑らかな辺と，頂点とで構成された閉曲面に対しては，曲面上のリーマン曲率 K の面積分と，辺上の測地的曲率 k（これは定義を与えていないが，図 8 のような 2 つの円錐を貼り合わせた図形を考えて，どう定義するのが適切か考えてみてほしい）の線積分と，頂点の欠損角の和が

$$\int_S K\, d\sigma + \int_C k\, ds + \sum_{i=1}^{n} \Delta\theta_i = 4\pi(1-g)$$

という関係式を満たす．これはガウス・ボンネの公式と呼ばれる．とくに，至るところ滑らかな閉曲面に対してはこの関係式は $\int_S K\, d\sigma = 4\pi(1-g)$ となり，曲面の曲率 K という局所的に定義された量を空間全体にわたって集めて，空間の大域的特徴を捉えるという意義を持つ．

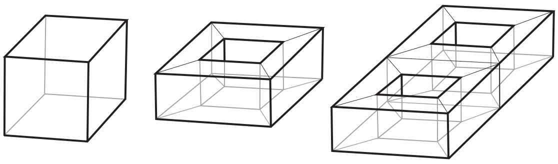

図 7　種数

7. ゲージ場による平行移動

ここまでは接ベクトルの平行移動と，ホロノミー，曲率を考えてきたが，平行移動されるものは接ベクトルばかりとは限らない．数学的にはベクトル束の平行移動という概念へと拡張できる[2)]．物理的には波動関数や場の量の共変微分と呼ばれる概念だ．あるいはゲージ場と言ってもよい．

多様体の各点 x に場の量（複素数または複素数のベクトル）$\psi(x)$ が定められているとき，点 P を通過する滑らかな曲線に沿って場の量の変化を調べることを考える．適当な座標系で曲線上の点を $x(t) = (x^1(t), x^2(t), \cdots, x^n(t))$ と表し，$x(0) =$P とする．実数 t が十分小さいとき点 $x(t)$ で定められた場の量 $\psi(x(t))$ を $\psi(\mathrm{P})$ と比べるために，

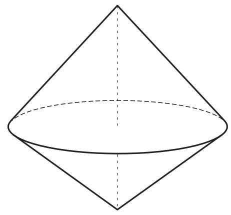

図 8　2 つの円錐を貼り合わせた図形

$\psi(x(t))$ を点 P に平行移動した量を

$$\psi_{\parallel}(t) = \psi(x(t)) + \sum_{\mu} A_{\mu}\psi(x(t))(x^{\mu}(t) - x^{\mu}(0))$$

で定める．ここに現れた係数（一般には行列）$A_{\mu}(x)$ をゲージ場と言う．曲線 $x(t)$ に沿った点 P における共変微分を

$$\begin{aligned} \frac{D\psi}{dt} &:= \lim_{t\to 0} \frac{\psi_{\parallel}(t) - \psi_{\parallel}(0)}{t} \\ &= \sum_{\mu} \left(\frac{\partial \psi}{\partial x^{\mu}} + A_{\mu}(x)\psi(x) \right) \frac{dx^{\mu}}{dt} \end{aligned}$$

で定める．曲線 $x(t)$ 上の各点で $\frac{D\psi}{dt} = 0$ が成り立っていれば，$\psi(x(t))$ は曲線に沿って平行移動されていると言う．

閉曲線に沿って場の量を平行移動して出発点に戻ると，場の量の値は必ずしも元の値には戻らず，ある種の回転を受けることがある．この正味の回転を再びホロノミーと呼ぶ．ホロノミーを局所化したものがゲージ場の曲率を定める．曲率は平行移動の非可積分性として特徴づけられる．つまり，x^{μ} 方向に ψ が平行移動されたとしたら，

$$D_{\mu}\psi = \frac{\partial \psi}{\partial x^{\mu}} + A_{\mu}(x)\psi(x) = 0$$

という式が成り立つのだが，x^{μ} 方向と x^{ν} 方向の平行移動が両立するためには

$$\begin{aligned} &\frac{\partial}{\partial x^{\nu}}\left(\frac{\partial \psi}{\partial x^{\mu}}\right) - \frac{\partial}{\partial x^{\mu}}\left(\frac{\partial \psi}{\partial x^{\nu}}\right) \\ =\ & \frac{\partial}{\partial x^{\nu}}(-A_{\mu}\psi) - \frac{\partial}{\partial x^{\mu}}(-A_{\nu}\psi) \\ =\ & -(\partial_{\nu}A_{\mu})\psi - A_{\mu}\partial_{\nu}\psi \\ & +(\partial_{\mu}A_{\nu})\psi + A_{\nu}\partial_{\mu}\psi \\ =\ & (\partial_{\mu}A_{\nu} - \partial_{\nu}A_{\mu} + A_{\mu}A_{\nu} - A_{\nu}A_{\mu})\psi \end{aligned}$$

が消えなければならない．ここに現れた

$$F_{\mu\nu} = \partial_{\mu}A_{\nu} - \partial_{\nu}A_{\mu} + A_{\mu}A_{\nu} - A_{\nu}A_{\mu}$$

という量をゲージ場の曲率と言う．もし曲率が 0 でなければ，x^{μ} 方向と x^{ν} 方向の平行移動は両立せず，これら 2 つの軸が張る面上の閉曲線に沿って ψ を平行移動するとホロノミーを生じる．

物理的には ψ は荷電粒子の波動関数であり，A_{μ} はベクトルポテンシャルあるいはゲージ場と呼ばれるものであり，$F_{\mu\nu}$ は電磁場である．電磁場中を荷電粒子が通過すると，粒子の軌道が曲がる．物理的にはローレンツ力と呼ばれるものだが，幾何学的な曲率の現れと見ることもできる．

8. アハラノフ・ボーム効果

円錐はリーマン曲率 0 であるにも関わらず，円錐の頂点を一周するときだけ 0 でないホロノミーが現れたように，ゲージ場においても曲率が 0 であるにも関わらず，ある空間を一周したときだけ 0 でないホロノミーを生じることがある．

図 9 のように磁場を細い円筒に閉じ込めて，円筒をまたぐように電子ビームを照射して，円筒の後ろのスクリーンに電子が当たる様子を観察すると，電子は磁場のない場所だけを通ってきたのにも関わらず，スクリーンの各点に電子が到着する確率は磁場の強弱の影響を受けることが観察される．磁場の周りを一周したとき生じるホロノミーの値によって，電子の波動関数の干渉が影響を受けるのである．円錐の頂点をまたいで平行移動した 2 本のベクトルが，欠損角の分だけ向きがそれて，ベクトルの和が大きくなったり小さくなったりするように，磁場をまたいで重なり合った電子の波動関数の値も大きくなったり小さくなったりして，電子の到着確率が変化するのである．この現象をアハラノフ・ボーム効果と言う.「曲率が 0 であってもホロノミーは 0 にならない現象」と言えばよいだろうか．

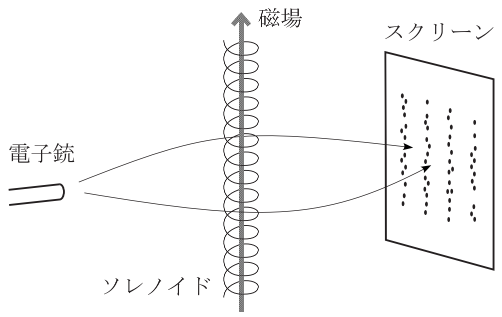

図 9　アハラノフ・ボーム効果

9. 2+1 次元のアインシュタイン重力

曲率が関わる物理の風変わりな話題として，2+1 次元のアインシュタイン重力理論を紹介しよう[3]．この「2+1 次元」とは空間 2 次元，時間 1 次元の時空があったとしたらという意味である．

3+1 次元は我々が経験する通常の時空であり，この世界では重力はアインシュタインの一般相対性理論で記述される．つまり重力の原因は時空の曲がりに帰着される．曲がり方がそんなにひどくない状況では，一般相対性理論はニュートンの万有引力理論で近似され，質点は距離の 2 乗に反比例する引力で引き合うという法則性が現れる．

2+1 次元の時空にアインシュタインの一般相対性理論を適用すると奇妙なことが起こる．一般に，アインシュタインテンソル $G_{\mu\nu}$ はリーマンテンソル $R^{\lambda}_{\mu\nu\rho}$ で定義されるが，2+1 次元の場合に限って，この定義式が逆に解けてしまう．つまり，リーマンテンソルがアインシュタインテンソルに比例して，反対称テンソル $\epsilon^{\lambda\mu\alpha}$ を用いて

$$R^{\lambda\mu}_{\nu\rho} = \epsilon^{\lambda\mu\alpha}\,\epsilon_{\nu\rho\beta}\,G^{\beta}_{\alpha}$$

と書けてしまうのである．一方で，アインシュタイン方程式は，適当な単位系で G を重力定数として（宇宙項がなければ）

$$G_{\mu\nu} = 2\pi G T_{\mu\nu}$$

という方程式であるから，2+1 次元では，物質のない場所，つまりエネルギー・運動量テンソル $T_{\mu\nu}$ が 0 になる場所では，時空の曲率も 0 になるということが結論されてしまう．もちろん重力波も伝播しない．素朴に 2+1 次元にニュートン重力理論を適用すると質点間には距離に反比例した引力が働くことが予想されるが，アインシュタイン重力理論によれば，質点間には力がまったく働かないのである*3)．つまり 2+1 次元ではアインシュタイン重力理論とニュートン重力理論はまったくの別物なのだ．

*3)　したがって 2+1 次元アインシュタイン重力理論では重力定数 G の符号を決める物理的理由もない．

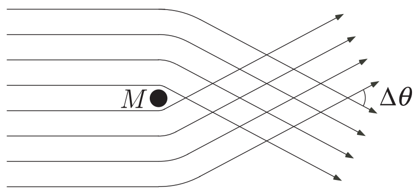

図 10　2+1 次元の天体のまわりの質点の軌道

2+1 次元アインシュタイン理論では物質のある場所だけに時空の曲率は集中する．したがってこの世界では，物体のまわりの時空は円錐のように平坦であり，欠損角だけを持っている．計算によると[3]，質量 M の物体の周りでは

$$\Delta\theta = 2\pi GM$$

だけの欠損角を生じる．質量 M の物体にテスト粒子のビームを照射すると図 10 のように屈折することがわかる．この世界では物体は放物線を描いて落下することもなく，天体は楕円軌道を描くこともなく，ただひたすらこのような屈折軌道を描くことになるのであろう．そもそも真空中を伝わる引力というものが生じないのだから天体もできるかどうか怪しいものである．

2+1 次元のアインシュタイン重力世界があったとしたら，宇宙はほとんど至るところ平坦で，物質のあるところだけに曲率が局在し，物体たちはお互いにホロノミーだけを通して相互作用する世界になっているのである．こういう，あったかもしれない別の世界を想像をしてみると，我々の世界が相対化されて面白いのではなかろうか．

参考文献

1) 小林昭七「曲線と曲面の微分幾何」裳華房，改訂版 (1995). 剱持勝衛「曲面論講義」培風館 (2000). 梅原雅顕，山田光太郎「曲線と曲面」裳華房 (2002). とくに剱持氏の本はグラフィクスをふんだんに用い，曲面という，ついわかったつもりになってしまわれがちなものが，思いもよらぬほど豊かで美しい構造と多様性を持っていることを示してくれている．

2) 小林昭七「接続の微分幾何とゲージ理論」裳華房 (1989).

3) S. Deser, R. Jackiw, G. 't Hooft: "Three-dimensional Einstein gravity: dynamics of flat space", Annals Phys. **152** 220 (1984). 2+1 次元重力についての Jackiw の講義ノート "Update on pla-

nar gravity” が `http://ccdb3fs.kek.jp/cgi-bin/img_index?200032232` で手に入る．私が大学院生のときに原子核三者若手夏の学校で聴いた懐かしい講義である．

（たにむら・しょうご，大阪市立大学大学院工学研究科）