初公開 2013 年 6 月 8 日
増補版 2013 年 7 月 6 日

「揺らぐ境界—非実在が動かす実在」を読んで いろいろ疑問が湧いた人のための補足

谷村 省吾
名古屋大学大学院情報科学研究科

0 増補版の序文

この文章を初公開した後，p.7〜17 の第 3 章（光子に抜き打ちテストを仕掛ける？）と p.17〜19 の第 4 章（隠れた変数理論）を書き足しました。ツイッター等を通して読者から寄せられた質問に詳しく答えたいと思い，この補足記事を書きました。各章は内容的にほぼ独立しているので，どこでも興味を持たれた部分を読んでいただければよいと思います。PDF ファイル内に節ごとにしおりが付けてあるので，それを使って適当な見出しのところにジャンプできます。

また，この追記に関連して，引用文献 [11]-[21] を追加しました。とくに [15]-[17] の文献は，当研究室大学院生の石渡龍輔（いしわた・りょうすけ）君・渡辺圭亮君の指摘と解説のおかげで私も知りました。彼らに感謝しています。

1 この文章の位置付け

この文章は，日経サイエンス 2013 年 7 月号，特集「量子の地平線」p.36〜45 に掲載された記事「揺らぐ境界—非実在が動かす実在」（以下，本誌・本記事と言う）に関する補足です[1]。誌面では説明しきれなかった細かい点についての解説，とくに数学的証明や歴史に関する覚え書きを補います。また，物理学上の私見も披露します。書いているうちに，あれもこれも書きたくなり，補足のくせに，ぶくぶく膨れ上がってしまいました。

2 ベルの不等式の破れを代数的量子論で分析する

古典論によれば，S という量の平均値 $\langle S\rangle$ は

$$-2 \le \langle S\rangle \le 2 \tag{1}$$

というベルの不等式を満たすはずである（本誌 p.39）。一方で，量子論では

$$-2\sqrt{2} \le \langle S\rangle \le 2\sqrt{2} \tag{2}$$

[1] http://www.nikkei-science.com/201307_036.html

という不等式が成立する（本誌 p.41）。実験では，ベルの不等式 (1) は成立せず，量子論の不等式 (2) が成立することが確認されている。

本誌 p.39 にベルの不等式 (1) の証明は書いた。しかし，本誌では量子論の不等式 (2) の証明には至らなかった。数式をたくさん書くことは雑誌の性格上適切ではないと思われたし，完全な証明は冗長になるので,「$1+1=\sqrt{2}$」になるような計算だけを示して，ともかく量子論の答えは古典論的計算と食い違うことを例示した。

以下では，量子論の不等式 (2) の完全な証明を書いておこう。しかも，普通の量子力学のやり方ではなく，代数的量子論 (algebraic quantum theory) の方法を使って証明しよう。

A, B, U, V は物理量であり，関係式

$$A^2 = 1, \qquad B^2 = 1, \qquad U^2 = 1, \qquad V^2 = 1, \tag{3}$$

$$BA = -AB, \qquad VU = -UV, \tag{4}$$

$$AU = UA, \qquad AV = VA, \qquad BU = UB, \qquad BV = VB \tag{5}$$

を満たすとする。このとき

$$S = AU + AV + BU - BV \tag{6}$$

が取り得る値を決定しようというのが課題である。

まず，仮定 (3), (4) より

$$\begin{aligned} (U+V)^2 &= U^2 + UV + VU + V^2 \\ &= 1 + UV - UV + 1 \\ &= 2 \end{aligned} \tag{7}$$

がわかる。この結果は，$U+V$ が取り得る値は $\pm\sqrt{2}$ であることを示している。ここまでの議論は本誌 p.42 に示したとおり。同様に

$$\begin{aligned} (U-V)^2 &= U^2 - UV - VU + V^2 \\ &= 1 - UV + UV + 1 \\ &= 2 \end{aligned} \tag{8}$$

もわかる。また，

$$\begin{aligned} (UV)^2 &= UVUV \\ &= -UVVU \\ &= -UU \\ &= -1 \end{aligned} \tag{9}$$

を得る。この結果は，UV が取り得る値は $\pm\sqrt{-1} = \pm i$（虚数！）であることを示している。同様に

$$(AB)^2 = -1 \tag{10}$$

を得る。さらに (5) も用いると

$$\begin{aligned}(ABUV)^2 &= (AB)^2\,(UV)^2 \\ &= (-1)\times(-1) \\ &= 1\end{aligned} \tag{11}$$

を得る。この式から $ABUV$ が取り得る値は ±1 であることがわかる。以上の結果を踏まえて

$$S = A(U+V) + B(U-V) \tag{12}$$

の 2 乗を計算すると,

$$\begin{aligned}S^2 &= A^2(U+V)^2 + AB(U+V)(U-V) + BA(U-V)(U+V) + B^2(U-V)^2 \\ &= 2 + AB(U^2 - UV + VU - V^2) + BA(U^2 + UV - VU - V^2) + 2 \\ &= 2 + AB(1 - UV - UV - 1) - AB(1 + UV + UV - 1) + 2 \\ &= 4 - 4ABUV\end{aligned} \tag{13}$$

となる。$ABUV$ の取り得る値が ±1 だから，S^2 の取り得る値は

$$S^2 \;=\; 4\pm4 \;=\; 8\,\text{または}\,0 \tag{14}$$

となる。したがって S の取り得る値は

$$S \;=\; \pm\sqrt{8}\,\text{または}\,0 \;=\; \pm2\sqrt{2}\,\text{または}\,0 \tag{15}$$

となる。よって，S の最大値は $2\sqrt{2}$，最小値は $-2\sqrt{2}$ である。S の平均値は最大値と最小値の間にあるから，不等式 (2) が成立する。（証明終わり）

2.1　初心者向けのコメント

おそらく，本記事を読んだ多くの人が，なぜ

$$S = AU + AV + BU - BV \tag{16}$$

などという量を考えるのか？この S の意味は何なのか？という疑問を抱いたであろう。S は 4 つの項からなり，3 つを足して 1 つ引くという形になっている。どうして BV だけ引き算なのか？そうすることに何か特別な意味があるのか？などと思われただろう。

まず答えやすいポイントを答えると，引き算するのは AU, AV, BU, BV のうちのどれでもよいのである。どの項をマイナスにしても結論は変わらない。ただ，どれか 1 つだけ符号を変えておくのがミソである。こうしておくと $S = A(U+V) + B(U-V)$ のように因数分解できて，U, V などに ±1 の値を割り当てたときに S の値が ±2 になることがわかる。そうなるように S の式を作ったのである。

では S そのものにどういう意味があるのかというと，とくに意味はない。ともかく S を計算して，これがどんな値になるか見てみましょう，というだけの話である。あえて言えば,

左の粒子については物理量 A または B を測り，同時に出発した右の粒子については物理量 U または V を測って，それらの値を使って定められる S は左右の測定値の関連性（相関）の指標になる，と言える。しかし，相関の指標がほしいなら (16) の第 4 項が $+BV$ ではいけないのかと指摘されるだろう。S の式だけを見て意味付けしようとしてもしようがないのである。

指標 S そのものに意味があるのではなく，いろいろな理論（古典論，量子論，さらには量子論以外の理論）が S の値についてどんな予測をするか比べることによって，各理論の限界が見えて来ることに最大の意義がある。

かつて私も，なぜ古典論では $-2 \leq \langle S \rangle \leq 2$ という不等式が成り立ち，なぜ量子論では $-2\sqrt{2} \leq \langle S \rangle \leq 2\sqrt{2}$ が成り立つのかと疑問に思い，研究した。それで可換と非可換という差異が本質的であることに気づいたのである [1]。知りたかったのは S の意味ではなく，S の値に違いをもたらしている古典論と量子論の差異である。両者の違いが生じる仕掛けもわかったので，新しいバージョンのベル不等式も作れるようになった（本誌 p.41）。

そう言われても煮え切らない思いが残り,「$S = AU + AV + BU - BV$ というものを考えれば，証明されたとおりの結果になることはわかるが，なぜ S などというものを考えなければならないのかがわからない，そうなるように S を作っただけではないのか？」という疑念を抱く人もいるだろう。こういう問題の立て方が気に食わない，という苦情なのだろう。

この疑念に対する答えはこうだ。数学にしても物理にしても，証明・実証ができればそれでよいのであって,「そんなことを証明しなければならない理由」はないのである。不思議な結果が証明できて,「それは面白い，いままでの僕らの考え方は間違っていた，視野が狭かった」ということに気づけばよいのだ。そうしなければならない理由はないが，そうすればわかることが一つ増えるからするのである。

2.2 初心者向けのコメントその 2

突然,「物理量 A, B, U, V は (3)-(5) のような関係式を満たす」と言われても，なぜこんな関係式を認めなければいけないのか？という疑問もあり得る。

これも話せば長くなる話だが，一言で言ってしまえば，偏光や電子のスピンを記述するには，この物理量代数が一番うまくいっているのだ。回転群の表現がどうとか，リー代数がどうとか，電磁場の量子化とか，数学的な理屈をいろいろ付けることはできる。しかし，どんなにもっともらしい数学的理由を付けることができても，実験に合わなければ物理としてはおしまいだ。結局は，物理としては (3)-(5) のような物理量代数が実験と合っているという実績があるから使っている。

2.3 数学が得意な人向けのコメント

物理量代数（＝物理量全体の集合）において物理量 A と複素数 x について $(A - x1)$ が逆元を持たないとき，x を A のスペクトル値 (spectral value) という。記事の中で「物理量 A

の値」と呼んでいたものは「A のスペクトル値」のことである。例えば (3) の $A^2=1$ は,

$$\begin{aligned} A^2-1 &= 0 \\ (A-1)(A+1) &= 0 \end{aligned} \tag{17}$$

と書き直せるが，この式は $(A-1)$ が零因子であること，つまり $(A-1)$ の逆元が存在しないこと意味しており，ゆえに 1 は A のスペクトル値である。また，$(A+1)$ にも逆元が存在しないので，-1 は A のスペクトル値である。このように，有限スペクトル物理量のスペクトル値を求める問題は，代数方程式の根を求める問題に帰着する。

(7) の $(U+V)^2=2$ からも同様に

$$\begin{aligned} (U+V)^2-2 &= 0 \\ (U+V-\sqrt{2})(U+V+\sqrt{2}) &= 0 \end{aligned} \tag{18}$$

が導けて，$U+V$ のスペクトル値は $\pm\sqrt{2}$ であることがわかる。

その意味では，(13) の計算もまだ中途半端であった。(13) の式変形を続けて，両辺に S を掛け算すると

$$\begin{aligned} S^2-8 &= -4-4ABUV \\ \left(S-\sqrt{8}\right)\left(S+\sqrt{8}\right) &= -4\left(1+ABUV\right) \\ \left(S-2\sqrt{2}\right)\left(S+2\sqrt{2}\right)S &= -4\left(1+ABUV\right)S \end{aligned} \tag{19}$$

となる。(3)-(6) を使って $ABUVS$ を計算すると

$$\begin{aligned} ABUVS &= ABUV(AU+AV+BU-BV) \\ &= BV-BU-AV-AU \\ &= -S \end{aligned} \tag{20}$$

となるので,

$$(1+ABUV)S = S+ABUVS = S-S = 0. \tag{21}$$

ゆえに (19) は

$$\left(S-2\sqrt{2}\right)\left(S+2\sqrt{2}\right)\left(S-0\right) = 0 \tag{22}$$

となる。この式は S のスペクトル値が $2\sqrt{2},-2\sqrt{2},0$ であることを意味している。

古典論の考え方に従って，すべての物理量の値が実在していると考えると S の値は 2 または -2 になるはずであったが，量子論では S の値は $2\sqrt{2}$ または $-2\sqrt{2}$ または 0 になる。

以上の証明は，物理量の足し算・掛け算などの代数関係（＝演算関係）を多用している。こういった代数関係で結ばれた物理量が量子系に内在していると考えるのが代数的量子論の特徴である。

2.4 量子力学をよく知っている人向けのコメント

物理量 A や B は，パウリ行列 $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z$ と 2 次の単位行列 I を使って

$$A = \sigma_x \otimes I \tag{23}$$

$$B = \sigma_y \otimes I \tag{24}$$

$$U = I \otimes \sigma_x \tag{25}$$

$$V = I \otimes \sigma_y \tag{26}$$

と書ける。パウリ行列は光子の偏光状態に関する物理量や，電子のスピンに関する物理量を表す。これらを S の定義式 (6) に代入して行列 S の固有値を計算すれば $\pm 2\sqrt{2}, 0$ という値を得る。これが通常の量子力学の計算方法である。

ところが，前節までの議論では，物理量 A, B の具体的な表現行列を用いず，ヒルベルト空間もエンタングル状態（量子もつれ, entanglement）も使わず，物理量の代数的関係 (3)-(5) だけを使ってスペクトル値を求めた点に注意してほしい。スペクトル値は固有値とほぼ同等な概念だが,「$(A - x1)$ の逆元が物理量代数（＝すべての物理量の集合）にないとき x は A のスペクトル値である」という命題は，固有ベクトルという概念を使わずに固有値もどきのスペクトル値を定義している。スペクトル値を定めるのにヒルベルト空間なんか要らないのである。ただ，一つの物理量 A のスペクトル値を決めるためにもすべての物理量の集合を参照しなければならない点にも注意してほしい。この意味でも物理量たちは密接に関連し合っており，ヒルベルト空間よりも物理量代数の方が本質的に量子系に内在しているものだと言える。そういうふうにミクロ系を理解しようとするのが代数的量子論のアプローチである [2]。

一方で,「ベル不等式の破れは，エンタングル状態の非局所性の顕れだ」としばしば言われるが，エンタングル状態など使わなくても物理量代数だけでベル不等式が破れることはわかったのである。また，(5) に示したような $AU = UA$ という可換性は，左の粒子の物理量 A の測定は右の粒子の物理量 U の値に影響しないことを含意し，この意味での局所性は守られている。論理的には，相対論的量子論では局所性は遠く離れた物理量の可換性を意味するので，$AU = UA$ のような可換性が保証されていることをビビッドに示すために，ベル・クラウザーたちの思考実験は離れた 2 箇所での測定を考察している。しかし何らかのやり方で可換性が保証されているなら，局所性という条件は要らないのだ。

また，物理量の値の非実在性を示すもう一つの数学的事実としてコッヘン・スペッカーの定理 [3, 4, 5] が知られているが，これは局所性とはまったく関係がない。

状態ベクトルの出番があるのは，物理量の値の平均，すなわち期待値 (expectation value) を求める場面だけである。期待値を求めることは，物理量が持っているさまざまなスペクトル値の出現確率を求めることに他ならない。そう考えると，状態ベクトルというのは，物理量の測定値の出現確率を決める概念装置であり，ミクロ世界に内在する物理量をマクロ世界に顕在する測定値に変換する変換器のような役割を持っていることがわかる。

なお，現代の量子論では，物理量にはスペクトル値・期待値・弱値 (weak value) という 3 種類の値があると考えられている。スペクトル値は測定器とは無関係にミクロ系が潜在的に持っている値。期待値は測定状況が定まったときに顕在化する値。弱値は新種の概念だが,

測定器と対象系を連動させて条件付けたときに顕在化する値のようなものである [6, 7, 8]。弱値はまだ研究価値や学術的評価が定まっていないが，物理学としての研究課題は多い。

2.5　専門家のためのコメント

式 (6) で定義された物理量 S のスペクトル値の上限を与えるだけなら，(4) に挙げた $BA = -AB$ などの関係式も不要である。チレルソンは，$A^2 = 1$ などの自乗に関する関係式 (3) と，$AU = UA$ などの可換関係式 (5) だけを用いて不等式

$$S \quad \leq \quad 2\sqrt{2} \tag{27}$$

を証明した [9]。そのため，この不等式は「チレルソン限界」とも呼ばれている。

この式は非常に緩い仮定の下で証明されているので（実質的に局所性と因果律だけを仮定している），この不等式を破るような現象や理論は非常に考えにくい。だから，現行の量子論に代わる新しい理論を作ろうとするときは，新理論はベル不等式 (1) を破ってもよいが（むしろ破らなければならないが），必ずチレルソン限界 (27) は守らなければならない，と考えられている。

2.6　もっとマニアックなコメント

「物理量の値が実在するならば，ベルの不等式が成立する」というのがベル・クラウザーたちの定理だった。対偶命題は「ベル不等式が成立しないならば，物理量の値は実在しない」であり，これがアスペなどの実験で確認された事実である。

これで話を終わってもよいのだが，論理的には，元の命題の逆は真か？という問題を立てることもできる。つまり,「ベル不等式の成立が確認できれば，物理量の値は実在していると言ってよいか？」と問いである。これについてはファインという人が肯定的に答えている [10]。つまり,「ベル不等式の成立は，A, B, U, V の値が実在しているための必要十分条件である」ことが証明されている。この意味で，ベル不等式は実在論に対するぎりぎりの厳しい試練になっている。

本誌 p.41 のコラムで触れた谷村・磯部の不等式 [1] に関しては，この種の必要十分条件がまだ明らかになっておらず，そこにまだ研究の余地がある。

3　光子に抜き打ちテストを仕掛ける？

本誌 p.40～42 で，光子の偏光状態に関する物理量を測るアスペたちの実験を解説した。アスペたちは光子のいろいろな物理量を測れるし，一つ一つの光子に対してどの物理量を測るか選べる。さらに，どの物理量が測定されるか前もって光子発生装置に伝わらないようにするために,【光子が発生装置から飛び出して左右の偏光分析器に飛び込むまでの間に分析器のレバーを切り替える高速スイッチ】（本誌 p.40）をこしらえていた（「レバー」と呼ぶと人が手で動かす機械仕掛けを思い浮かべるが，実際に使われたのは電気仕掛けの「スイッチ」

である)。しかし，そんな仕掛けをする目的が理解にしくいだろうし，この仕掛けを実施する方法も想像しにくいと思われるので，説明を補っておく。

3.1　抜き打ちテストの狙い

「抜き打ちテスト」というものは，何のテストをするかテストの実施直前まで被験者に知らせずに突然テストを仕掛けることによって，個人の本来の実力を測ろうとするものだ。例えば，英語と数学のような2つの試験科目の可能性があったとして，来週，どの科目について，どんな範囲から試験問題が出るか生徒が知っていたら，生徒はその科目だけを勉強して，他の科目は勉強せずに済む。それでは,「英語のテストをするぞ」と知らせたことが，生徒の成績に影響してしまう。そういう備えをする暇を生徒に与えず，たとえ英語の試験しか実施しなかったとしても，もし代わりに数学の試験を実施したとしたら，やはり本来の数学の実力どおりの成績になっていたであろう，ということを保証するのが抜き打ちテストの意義である。

アスペの実験の筋書きを学校の試験にたとえるなら，こう言える。ある学校の全校生徒の英語と数学の平均的な実力を知りたいとする。ところが一人一人の生徒に対しては英語か数学かどちらか一方の試験しか行えないとする。このような状況で,「君には英語の試験を受けてもらう」とか「君には数学の試験を受けてもらう」ということをあらかじめ各生徒に知らせてしまったら，生徒が試験に備える可能性があり，英語の試験だけを受けた生徒の平均点と，数学の試験だけを受けた生徒の平均点をもってして，全校生徒の英語と数学の平均点がわかったとは言えない。そのような事態を避けるために，何の試験をするかあらかじめ生徒には知らせない，というのが抜き打ちテストの狙いである。

アスペの実験の場合は，右に出た光子に対して物理量 U または V を測る。もしも，この光子が，行った先で U を測られることを何らかの方法であらかじめ知っていたら，U の測定値を備えている必要はあるが，V の測定値は持っていなくてもよいことになってしまう。つまり，U, V どちらの物理量を測るか光子に知られてしまっていて，しかも一時にはどちらか一方の物理量しか測らないのであれば，U, V 両方の値の実在性を試していることにならない。

さらに，アスペ実験にもっと忠実に学校の試験のたとえ話をするならこう言うといいだろう。英語の能力と数学の能力に関して兄弟の間で関連性（相関）があるかどうか知りたいとする。多くの家庭の兄弟について，兄が英語がよくできるなら，弟も英語がよくできるか？また，兄が英語がよくできると弟は数学がよくできるといった相関があるだろうか？みたいなことを調査をしたいとする。そうしたいなら，兄弟が試験中に相談できてしまっては意味がない。だから兄弟を引き離して別々の場所で試験を受けさせるだろう。しかも，各生徒に対しては，英語か数学かどちらか一科目の試験しか課すことができないとしよう。それなら，調査の目的を達成するためには，英語と数学のどちらを受験するか，あらかじめ生徒に知らせてはいけない。例えば，兄弟両方が英語を受験することを1週間前から知っていたら，兄弟そろって英語の試験勉強をして，二人とも好成績をとる可能性が高くなる。それでは，兄弟の能力の相関を調べたいという当初の目的を果たせなくなる。

アスペの実験では，兄弟に相当するものは同時発生する 2 つの光子であり，英語と数学のテストに相当するものは物理量 A と B の測定，あるいは物理量 U と V の測定である。左に行く光子に対する試験科目は A または B であり，右に行く光子に対する試験科目は U または V である。

本誌 p.40〜41 にかけて【もしも光子が発生する前に左右（の）分析器のレバーを固定していたら，どの偏光を測られるか装置が知った上で，光子を準備する余地がある】という記述があった。「**光子が**（あるいは光子発生装置が）測定器のレバーのセッティングを**知っている**」という擬人表現は奇妙だが，言いたいことは次のようなことである。たとえば実験を開始する 1 時間前から測定器のレバーが固定されっぱなしだったら，測定器と光子発生装置とをつないでいるケーブルとか装置の間にある空気とか何かを通して，測定器から光子発生装置に何らかの物理的影響が及ぶ可能性があり（実際には，そんな影響はとてもなさそうだが，その可能性がゼロとは言い切れない，という原理的なことをいまは問題にしている），レバーが U にセットしてあったときに発生する光子と，レバーが V にセットしてあったときに発生する光子は，異なった状態になる可能性がある。また，測定器から光子発生装置や飛行中の光子に影響が及ぶ時間的余裕があれば，右の測定器のレバーの U または V というセッティングに応じて，左に行く光子の物理量 A の測定値も変わる可能性がある。そうすると，左右で AU を測られる光子対と左右で AV を測られる光子対は異なった A の値を示すかもしれない。

ところがベル不等式の証明を思い出すと（本誌 p.39），$AU + AV$ という式から共通の A をくくり出して

$$AU + AV \quad = \quad A(U + V) \tag{28}$$

とする式変形を行っていた。もしも，AU と AV という 2 つの項の中の A の値が等しくないような事態が起これば，(28) のような計算は妥当ではなくなり，ベルの不等式は成立しなくてもよいことになってしまう。

要するに,「測定器のセッティングが光子に何らかの物理的影響が及ぼす」ことを「光子が（あるいは光子発生器が）測定器レバーのセッティングを知っている，察知する」というたとえで言い表していたのだ。光子や光子発生装置が人間的な「知性」や「記憶力」を持っていることを仮定しているのではない（あるいは，光子がそのような知性を持っていると仮定しても，議論は変わらない)。

ベル不等式を導いた推論が妥当であることを保証するためには，AU という組を測る場合と AV という組を測る場合とで，A の値が変わる余地がないことを保証する必要がある。そのため，U または V という測定器レバーの設定が発生する光子に影響を与えないように実験を仕組む必要があったのである。

3.2　抜き打ちテストの実施方法

「この世に光より速いものはない，光より速い情報伝達手段もない」ということを知っている人なら，こういう疑問を持つだろう（本誌 p.40 に関連)：光子発生装置から光が出た後,

光子が測定器に到着する前に，測定器のレバーのセッティングを変えようとしても，間に合わないのではないか？　光子に先回りしてレバーを切り替えることはできないはずではないか？

それはもっともな疑問だし，本記事はその点について説明不足であった。ただ，工夫をすれば，何も光子を追い越す必要はないのである。

極端に言えば，アスペの実験の仕掛けはこんなふうになっている（具体的な数値は元の実験のとおりではない）：中央の光子発生装置は 100 秒おきに光子対を発射する。光子が飛んで左右の測定器に届くには 10 秒を要する。左右の測定器では 1 秒おきにランダムにレバーを切り替えている。

左の測定器のところで待ち構えている実験者は,「中央の発生装置から光子が出たぞ」という連絡を受けてから急いで測定器のレバーを切り替えるのではなく，ともかく 1 秒おきに闇雲にレバーを A または B に切り替えている。レバーを A, B どちらにセットするかは，できればコイン投げのような方法で，でたらめに選ぶ。測定器に光子が飛び込むと，偏光分析器が作動して，赤または青のランプがつく。赤ランプは $+1$，青ランプは -1 という値に読み替えられる。こうして「光子の到着時点にレバーは A, B のどちらにセットしてあったか」ということと「値は ± 1 のどちらであったか」ということを記録する。

同様に，右の測定器でも，光子が発射されたぞという知らせを受けてからではなく，闇雲に，なるべく短い時間間隔でレバーを U, V どちらかにランダムに切り替え続けながら光子の到着を待ち受け，U または V という物理量の ± 1 という値を測る。

さらに，左右の測定器は集計用の装置につないであり，集計装置は，左の光子と右の光子の測定データを対にして記録する。

以上がアスペの実験の筋書きである。もう一度言うが，光が出たぞという合図を受けてから急いでレバーを切り替えるのではなく，光が出たかどうかにおかまいなしにレバーを切り替えながら光子の到着を待ち受けるのである。これが光子に対する「抜き打ちテスト」の実施方法である。

試験のたとえで言えば，生徒が試験室に入った時点でサイコロを振って，英語の試験を受けるか，数学の試験を受けるか決めるようなものだ。生徒が家を出発したときや，学校に向かって歩いている最中には，どちらの科目の試験を受けることになるか誰にもわからないのである。

実際，1982 年に出版された論文 [11] でアスペたちが報じた実験では，発生した光子が測定器に到達するには 40 ナノ秒かかり，偏光測定器のスイッチは 10 ナノ秒おきに切り替えていた。

ちなみに，1981 年の論文 [12] でアスペたちが報じた実験では，光子が飛行している間の素早い測定器切り替えは行っていなかった。つまり，測定器レバーはしばらくの間，固定されたままで，光子を発生させていた。このやり方では，局所性や因果律が守られていたとしてもケーブルや空気を通して測定器から光子に何らかの影響が及んでいた可能性がある。常人の感覚からすると，そこまで心配するか？そこまでケチをつけるか？という気がするが，そういう批判があり得ることはアスペたちも承知しており，だからこそ，高速切り替えスイッ

チまでこしらえたのである。

だから本記事の内容に照らせば，引用すべき文献は 1981 年の論文 [12] ではなく，高速切り替えを実現した 1982 年の論文 [11] であった。

なお，1982 年の論文でも，スイッチの切り替えはランダムにではなく，$A, B, A, B, A, B, \cdots$ という順に規則正しく切り替えられており，このやり方では，実験を続けているうちに，光子発生装置の側に測定器の手の内を知られてしまう可能性を排除できない。そこまで難癖をつける人がいるのか !? と呆れ驚くが，ベル不等式を実験可能なものに書き直したシモニー自身が，1982 年のアスペ実験を評価しながらも，測定器のスイッチ切り替えがランダムではなく周期的であった点を鋭く指摘している [13]。

その後，目的・設定の異なる実験ではあるが，真にランダムと思える量子力学的サイコロを使ってスイッチを切り替える実験が 2007 年にアスペらによって行われている [14]。

なお，どうやって 2 つの光子を同時に発生させるのか，とか，どうやって 10 ナノ秒刻みに切り替えを行うのか，という現実的・具体的方法は，説明が容易ではないし，それを考え出して実行するのはもっと困難である。アスペは，この困難を克服して実験を実施するのに何年もかかったのである。

3.3 抜き打ちテストの数学

以上で抜き打ちテストの物理的意義は説明できたと思うが，ここまで来たら，数学の得意な人向けに抜き打ちテストの数学的定式化を述べておこう。そうすることによって，ベル不等式の完全な証明が与えられるし，ベル不等式が破れるときにどの仮定が崩れるのかが明瞭になる。

数学的には，測定値の実在性は,「物理量 A を測れば値 a を得て，かつ，物理量 B を測れば値 b，かつ，物理量 U を測れば値 u，かつ，物理量 V を測れば値 v を得る確率 $P(a, b, u, v)$ が存在する」という条件で定式化される。変数 a, b には ± 1 の値を代入する。

つまり，光子は測定器に飛び込むまで U, V などの物理量のうちどれを測られるか知らず，たとえ測られなくても u, v などの値が実在しているなら，確率的ばらつきを伴うかもしれないが，光子対は a, b, u, v という値を持っていなければならない。そのことが「確率 $P(a, b, u, v)$ の存在」という形で条件付けられる。このような $P(a, b, u, v)$ を結合確率 (joint probability) という。

この状況での確率は頻度という意に解される。光子対は生まれたときに物理量 A, B, U, V について確定した値 a, b, u, v を持っているのだが，必ずしも生まれるたびに毎回同じ値を持っているわけではない。例えば，1 万回，光子対の発生を繰り返すと，そのうちの 500 回は $a = 1, b = 1, u = 1, v = 1$ という値を持った光子対ができていることを $P(1, 1, 1, 1) = 500/10000 = 0.05$ という頻度で表す。同様に，1 万回のうち 600 回，$a = 1, b = 1, u = 1, v = -1$ という値を持った光子対ができていることを $P(1, 1, 1, -1) = 600/10000 = 0.06$ という頻度で表す，といった具合である。

左の光子の A を測ったら値 a を得て，かつ相方の光子の U を測ったら値 u を得る確率を

$P_{AU}(a,u)$ で表すと，これは

$$P_{AU}(a,u) \quad = \quad \sum_{b=\pm1,}\sum_{v=\pm1} P(a,b,u,v) \tag{29}$$

に等しい。このような $P_{AU}(a,u)$ を周辺確率 (marginal probability) という。A,B,U,V すべての物理量ではなく，A,U だけに注目した場合の確率分布が P_{AU} である。実在性を信じる立場では，B と V は測らなくても，B の値と V の値は実在していることになっており，$P(a,b,u,v)$ という確率で物理量 A,B,U,V に値 a,b,u,v が割り当てられる。実際には a,u だけを測り，b,v は ±1 どちらの値でもかまわないので，これらについて和をとったものが，a,u という値の出現確率になる，というのがこの式 (29) の内容だ。

次いで，左の光子の A を測ったら値 a を得て，かつ相方の光子の V を測ったら値 v を得る確率 $P_{AV}(a,v)$ は

$$P_{AV}(a,v) \quad = \quad \sum_{b=\pm1,}\sum_{u=\pm1} P(a,b,u,v) \tag{30}$$

に等しい。今の場合は A,V だけを測って B,U は測らないのだが，やはり背後では B,U の値も実在していると考えるから，すべての物理量に値を割り振る確率 $P(a,b,u,v)$ があり，測られない変数 b,u は ±1 どちらの値でもよいので和をとって確率 $P_{AV}(a,v)$ が決まる。

注意すべきポイントは，(29) の $P_{AU}(a,u)$ も (30) の $P_{AV}(a,v)$ も共通の確率 $P(a,b,u,v)$ から決まっているという点である。もしも U または V のどちらを測るかという選択・設定が光子に影響を及ぼすならば，A,U を測る場合と A,V を測る場合とで背後にある確率 $P(a,b,u,v)$ が同じであるという保証がない。そうなってしまうと，以下のベル不等式の証明が効力を失ってしまう。だからこそ，ベル不等式が成立するはずの状況を作るためには，U または V という選択が光子に影響しない状況設定を確保して，背後の確率 $P(a,b,u,v)$ は同じはずだと言える状況を作るのである。

同様に，B,U あるいは B,V に注目した周辺確率 $P_{BU}(b,u)$, $P_{BV}(b,v)$ も共通の結合確率 $P(a,b,u,v)$ をもとにして定義される。

物理量の積 AU の平均値は

$$\langle AU\rangle = \sum_{a=\pm1,}\sum_{u=\pm1} au\, P_{AU}(a,u) = \sum_{a=\pm1,}\sum_{b=\pm1,}\sum_{u=\pm1,}\sum_{v=\pm1} au\, P(a,b,u,v) \tag{31}$$

で求められる。$\langle AV\rangle$, $\langle BU\rangle$, $\langle BV\rangle$ についても似たような式が成り立つ。

一番問題になるのは $\langle S\rangle$ の式だが，

$$\begin{aligned}
\langle S\rangle &= \langle AU\rangle + \langle AV\rangle + \langle BU\rangle - \langle BV\rangle \\
&= \sum_{a,u=\pm1} au\, P_{AU}(a,u) + \sum_{a,v=\pm1} av\, P_{AV}(a,v) \\
&\quad + \sum_{b,u=\pm1} bu\, P_{BU}(b,u) - \sum_{b,v=\pm1} bv\, P_{BV}(b,v) \\
&= \sum_{a,b,u,v=\pm1} (au+av+bu-bv)P(a,b,u,v)
\end{aligned} \tag{32}$$

という式変形ができる。4つの項から共通の $P(a,b,u,v)$ がくくり出せたところがミソだ。光子に抜き打ちテストを仕掛けたからこそ，光子は A,B,U,V のどれを測られるかあらかじめ知ることができず，共通の確率 $P(a,b,u,v)$ で発生せざるを得ないのである。

この式 (32) の括弧でくくられた部分は

$$au+av+bu-bv \;=\; a(u+v)+b(u-v) \tag{33}$$

と式変形できる。a,b,u,v は普通の ±1 という数なので，本誌 p.39 で示したように，普通の足し算・引き算・掛け算により，

$$a(u+v)+b(u-v) \;=\; \pm2 \tag{34}$$

であることが推論できる。

さらに，確率の性質

$$P(a,b,u,v) \geq 0, \tag{35}$$

$$\sum_{a,b,u,v=\pm1} P(a,b,u,v) = 1 \tag{36}$$

を使うと，ベル不等式 (1) が導ける。条件 (35) は確率の非負性と呼ばれる。この条件は，確率の常識的な頻度解釈からして，確率が 0 になることはあっても，マイナスになることはないことを反映している。また，(36) は確率の規格化条件と呼ばれる。あらゆる事象の確率の合計は，何でもいいからともかく何かが起こる確率なのだから，100%つまり 1 でなければならない，という条件だ。

いちおうベル不等式の証明を最後まで書いておくと，(34) は

$$-2 \;\leq\; au+av+bu-bv \;\leq\; 2 \tag{37}$$

を意味する。この式に $P(a,b,u,v)$ を掛け算すると，条件 (35) より $P(a,b,u,v)$ は負ではないので，不等号の向きは変わらず，

$$-2P(a,b,u,v) \;\leq\; (au+av+bu-bv)P(a,b,u,v) \;\leq\; 2P(a,b,u,v) \tag{38}$$

を得る。さらに a,b,u,v に ±1 のすべての組み合わせを代入して足し上げると

$$\begin{aligned} -2\sum_{a,b,u,v=\pm1} P(a,b,u,v) \;&\leq\; \sum_{a,b,u,v=\pm1}(au+av+bu-bv)P(a,b,u,v) \\ &\leq\; 2\sum_{a,b,u,v=\pm1} P(a,b,u,v) \end{aligned} \tag{39}$$

を得るが，期待値の式 (32) と規格化条件 (36) を用いると，

$$-2 \;\leq\; \langle S\rangle \;\leq\; 2 \tag{40}$$

が結論される。これはベルの不等式 (1) に他ならない。

3.4　局所性または因果律が破れると抜き打ちテストができなくなる

局所性とは【ある場所で起きる出来事は，遠く離れた別の場所で起きる出来事に瞬時に影響を与えることはない（本誌 p.39)】という，自然現象なら当然そうなっていると思われる性質のことをいう。ただ，そもそも影響とは何か？と問い質すと，なかなか厄介ことになるので，そこは常識的な意味で捉えておいてほしい。

因果律とは【原因が先に起こり結果はその後で起こる（本誌 p.40)】，時間を遡って未来から過去に影響が及ぶことはない，という法則である。ここでも，そもそも原因とは何か？結果とは何か？影響とは何か？過去と未来とは何か？と疑い出すと，因果律の明瞭な定義を与えるのはじつは難問であり，哲学の問題としても物理学の問題としてもいまだに議論は決着していない，と私は思う。しかし，ここでは原因・結果などの定義は問い質さないでおこう。

局所性と因果律は物理学では常識とされており，ベル不等式の大前提でもあるが，もしもこれらが間違っていたら，ベル不等式の前提はどのように変更され，その数学がどう変更されるのか，概観しておくのも悪くないだろう。

3.1 節で導入した兄弟の英語と数学のテストのたとえ話で言えば，局所性が破れているケースは，兄と弟が離れた試験場にいても，テレパシーのような手段を通して瞬時に兄弟が連絡し合うことができるような状況である。もしもテレパシーが可能なら，兄の答えを弟に伝えられ，兄弟の本来の能力を測ることができなくなってしまう。

また，因果律が破れているケースは，例えば，兄が試験場に着いて英語の試験問題を開き，弟が試験場に着いて数学の試験問題を開いた時点で（あるいは試験が終わって試験場から退場した時点で)，1 週間前の自分たちに向けてテレパシーかメールを送って，それぞれの受験科目や試験問題を伝える，というような状況である。そうすると，彼らは 1 週間かけて勉強をやり直すことができて試験の成績がよくなるだろう。これもテストとしては失敗である。

これらの例を見ると，局所性の破れも，因果律の破れも，まじめに考えるのがばかばかしいナンセンスに思えるが，もし仮にアスペの実験で局所性や因果律が破れていたら，どういうことが起こるか，また，その状況をいかに記述・定式化すべきか考えてみよう。

まず局所性に注目したいが，物理量の値の実在性を保持しつつ局所性を放棄するか，物理量の値の実在性も局所性を放棄するかでだいぶ考え方が違ってくるので，場合分けして考える：

(i) 実在性も局所性も仮定する。

(ii) 実在性は保持するが，局所性は破れているとする。

(iii) 実在性は放棄するが，局所性は保持する。

(iv) 実在性も局所性も放棄する。

(i) 局所実在論は，すでに何度も検討してきた理論であるから詳しく述べる必要はないだろう。簡単に言うと，A, B, U, V という 4 種の物理量全部を測らなくても，それぞれの値 a, b, u, v が $P(a, b, u, v)$ という確率（頻度）で割り当てられていると考えるのが実在論である。また，どの物理量を測るか決めても，確率 $P(a, b, u, v)$ が変更されることはないのが局

所性の反映である。したがって，すべての測定について共通の結合確率が存在し，ベル不等式の導出 (32) がうまくいく。

(ii) 非局所・実在論の立場では，物理量の値は実在しているはずだから，物理量の値は結合確率 $P(a,b,u,v)$ で割り当てられていると考えるが，局所性は破れているのだから，例えば，物理量 U を測るぞと決めた途端に，確率が $P'(a,b,u,v)$ に変わってしまうかもしれないことを認めることになる。別の物理量 V を測るぞと決めたら，その瞬間に，別の確率 $P''(a,b,u,v)$ に変わってしまうのもありだ。だからすべての測定について共通な結合確率というものはなく，ベル不等式の導出 (32) は破綻する。

(iii) 局所・非実在論の立場では，測定しない物理量の値は実在しなくてよいので，理論上，結合確率 $P(a,b,u,v)$ を定義する理由がなくなってしまう。また，一回の実験では物理量 A または B，U または V のどちらか一つずつしか測れないという問題設定なので，結合確率 $P(a,b,u,v)$ を実測することもできない。だから全部の物理量に対する結合確率 $P(a,b,u,v)$ を導入せずに理論を立てることになる。しかし，最低限，実測されるものはあるはずなので，A,U の測定に対する確率 $P_{AU}(a,u)$，A,V の測定に対する確率 $P_{AV}(a,v)$，同様に $P_{BU}(b,u)$，$P_{BV}(b,v)$ が光子の発生時に決まっていなくてはならない。局所性は保つのだから，A と U を測るぞと決めても，瞬時に $P_{AU}(a,u)$ が $P'_{AU}(a,u)$ に変わるようなことは起きない。それにしても，すべての測定について共通な結合確率はないので，ベル不等式の導出 (32) はやはり破綻する。

(iv) 非局所・非実在論の立場は，何でもありである。全部の物理量に対する結合確率 $P(a,b,u,v)$ はなくてよい。A,U の測定に対する確率 $P_{AU}(a,u)$ は事前にあるかもしれないが，A と U を測るぞと決めた途端に $P'_{AU}(a,u)$ に変わるかもしれないので，事前確率を考える意味がない。当然のことながら，すべての測定について共通な結合確率はないので，ベル不等式の導出 (32) は破綻する。

以上のように，実在性を要請して局所性は要請しない仮定 (ii) の下ではベル不等式を導けないことははっきりしている。また，実在性を放棄してしまうと，局所性によって何が保たれ，非局所性によって何が壊されるのか，比較する手段がなくなってしまうので，局所性が成立している場合 (iii) と破れている場合 (iv) を区別することが事実上できなくなってしまう。そして (ii), (iii), (iv) のいずれにしてもベル不等式は導けない。

整理すると，(i) の局所実在論が正しければベル不等式も正しい。(ii), (iii), (iv) の理論が正しいとしてもベル不等式の成否については何も言えない。言い換えると，実験でベル不等式が否定されると，(i) の局所実在論は否定されるが，(ii), (iii), (iv) の理論は否定されずに生き延びる。

因果律が破れているケースも同様に場合分けして分析できるが，大して面白い結果は得られない。実在性を保持して，因果律が破れている場合だけ考えると，光子が発生する時点では確率 $P(a,b,u,v)$ で物理量の値が割り当てられているはずだが，例えば，測定器を A,U にセットすることが過去に遡って光子対に影響を与え，確率を $P'(a,b,u,v)$ に変える可能性がある。測定器を A,V にセットすればまた別の影響が生じて，別の確率 $P''(a,b,u,v)$ に変わってよい。そうすると，(29) と (30) のような共通の確率 $P(a,b,u,v)$ があるとは言えなく

なり，(32) における $P(a,b,u,v)$ のくくり出しができなくなって，再びベル不等式の導出は破綻する。

局所性または因果律を放棄した理論を（作っても使い道がなさそうだが）どう作るべきかという点に関しては，多少議論の余地はある。というよりも，そういう理論を作ろうとすると，現実には間違いだとわかっている理論を理屈の上では正しく作る腕前が試され,「正しく間違える」のが難しい。いずれにしても，だいたい上に示したような理論になり，ベル不等式を正当化できない。言い換えると，ベル不等式の検証実験を行っても，局所的因果的実在論以外の理論は正しいとも間違っているとも言えない。

3.5　マイナスの確率でベル不等式を破る？

3.3 節では数式をたくさん使ってベル不等式を証明した。数式に慣れない人には辛かったかもしれないが，証明の全過程を数式で明示したおかげで，何を前提とし，どういう推論でベル不等式が導かれたのかがクリアになった。

せっかくここまで理解したついでに，最近提案されている面白いアイディアを紹介したい。量子論でベル不等式が破れる仕組みを，アハラノフたちが考え出した「弱値」のアイディアを使って理解しようという面白い解釈が，最近，ホフマン [15, 16] やヒギンズ [17] らによって示された。彼らのアイディアを紹介しておこう。

くどいようだが，量子論ではベル不等式は成り立たないのだから，ベル不等式を導いた仮定と推論のどこかが崩れるはずである。とくに「物理量 A,B,U,V の値が実在しており，非負の確率 $P(a,b,u,v)$ で各物理量に値が割り当てられる」という前提が疑われる。

この疑いを受け止めて，物理量の値がつねに実在するという信念を捨てよう，というのが私の態度である（私は「物理量の値は実在しない」と主張しているのではない。一つ一つの物理量の値はあると思ってよいのだが，非可換な 2 つの物理量の値が同時に実在していると思ってはいけないと言っている）。$UV = VU$ が成り立たない非可換物理量については，$U+V$ の値は $u+v$ に等しくないし，$AU+AV+BU-BV$ という非可換物理量の掛け算・足し算を $au+av+bu-bv$ という可換な実数値の掛け算・足し算で置き換えてはいけない。そうではなく，非可換代数を使った式 (7) のような計算から $U+V$ の値は ± 2 ではなく $\pm\sqrt{2}$ だとすべきだし，(15) や (22) のような代数計算をすべきだ，というのが私の答えであった。

他方，ホフマンたちは「確率 $P(a,b,u,v)$ は 0 以上 1 以下の実数でなければならないという信念を捨てよう。確率は，負の数や複素数になってもよいとしよう」という代案を提案している。つまり,「量子論では，3.3 節のベル不等式の証明の中で前提としていた確率の非負性 (35) が崩れている」というのだ。例えば，100 点満点のテストで，0 点を取る確率が -0.2, 100 点を取る確率が 1.2 だったら，平均点は 120 点になる。つまり，負の確率を認めてしまえば,

$$\text{最低点} \;\le\; \text{平均点} \;\le\; \text{最高点} \tag{41}$$

という不等式は必ずしも成り立たない！

一見したところ,「負の確率」や「複素数の確率」は，a,b,u,v という値の実在性の否定よりもひどいアイディアのように思える。この考えを受け入れるなら，そもそも確率の概念を

変更する必要がある。少なくとも確率の頻度解釈は捨てなければならないだろう。頻度解釈の立場をとるなら，確率 -0.2 で 0 点ということは，生徒数 50 人のクラスだったら，**−10 人**が 0 点を取るということだ！　また，確率 1.2 で 100 点ということは，**50 人中 60 人**が 100 点を取るということだ！　これらはまったくナンセンスに思える。

ところが，アハラノフの弱値という概念を使うと，負の確率のようなものも数学的に定義できるし，奇妙に思える量子論の結果も，いちおう合理的に解釈できるのである [6, 7, 8]。例えば，ホフマン [15] は，弱値を使って,「$A(U+V)=-2$ かつ $B(U-V)=0$」となる確率が -0.1（マイナス 10%）だと計算している。

ここでは，弱値の議論に深入りしない。一方で，弱値というアイディアは，空疎だという批判もあるが，ミクロの世界のありようと仕組みをより深く理解する糸口を与えてくれているように私には思える。

4　隠れた変数理論

「“隠れた変数” の理論」と呼ばれる理論がある。「隠れた “変数の理論”」ではない，念のため。英語では hidden variable theory と呼ばれる。「“隠された変数” の理論」と訳す方が正しいかもしれないが,「隠れた変数理論」と呼ばれることが多い。

本記事では隠れた変数理論について一言も述べなかったが，この補足記事の引用文献 [3], [4], [10] の題名にも hidden variable（隠れた変数）という用語が入っているし，ベルやクラウザーたちの研究 [18, 19] も，実在論が正しいか？それとも量子論が正しいか？という問題の立て方をしていたのではなく，隠れた変数理論は量子論に取って代わることができるか？という問題の立て方をしていたので，この理論について少しは言及しておいた方がよいだろう。

4.1　科学的実在論・反実在論・値の実在論

言葉使いに関する注意だが，科学哲学 [20, 21] で言う実在論（科学的実在論）と，いま問題にしている実在論は，ややニュアンスが異なる。私もよくわかっているわけではないので，哲学的用語解説への深入りは避けたいが，簡単に述べておこう。

物理学では，電磁場やゲージ場や電子やニュートリノやエントロピーやブラックホールや非可換物理量やヒルベルト空間やラグランジアンのような，人間が直接見たり触れたりできないものを想定することがあるが，たとえ目に見えなくても，またそのようなものを想定する物理理論がなくても，それらが現に存在していると信じる立場を科学的実在論という。

これに対して，電子のような抽象概念が理論上便利であることは認めるが，文字通りにそのような「もの」があると信じることを保留する立場を反実在論という。ただし，反実在論者と言えども，観測不可能な概念を想定している科学が間違っていると主張しているわけではない。「電子という概念を使うと便利なことは私も知っているが，そのことが電子の存在を信じる根拠になるわけではない。私は，電子がこの世にあるとかないとか，私の目や耳で確かめようのないことは言わない」という立場が，科学哲学でいう反実在論である。反実在

論は，控え目で慎重な立場とも言えるが，自分の感覚だけを信じて，ハイテクの観測手段はあてにしないという，わざとらしいアナクロ立論のようにも思える。一方で，物理学者は，例えば机の実在性と電子の実在性とエントロピーの実在性とが同レベルで語られるものではないことをよく知っており，それらを「実在」の一言で表そうとする方に無理があることを心得ている。結局のところ，科学的実在論 vs. 反実在論の哲学論争は，本来多義的であるはずの「実在」という言葉に一義的な定義を押し付けようとして空しい努力を続けているように私には思える。

本記事で問題にしている実在論は，我々が観測できるものは，適当な条件が満たされれば（単純に言えば，何度観測しても誰が観測しても同じ結果になることを確認する），観測していないときも観測したとおりに存在している，と信ずる立場のことである。とりわけ，いま問題にしているのは，物理量の値の実在性である。例えば，体重は物理量であり，60 キログラムというのは物理量の値である。物理量を測れば値を得るが，測っていないときも物理量の値はあるはずだ，と信ずるのが，いわば「値の実在論」の立場である。

そして，この「値の実在論」と局所性と因果律を合わせた理論はベルの不等式を導く。一方で，量子論はベルの不等式の破れを予測し，実験でもベルの不等式の破れが確認された。局所性と因果律が間違っているとは考えにくいので,「値の実在論」が現実世界では通用しないのだろう，というのが本記事の結論であった。

私は，科学的実在論と反実在論のどちらが正しいかという議論をしたいのではないし，一意的な「実在」の定義を探しているのでもない。ただ，この自然界における「実在」の奥行を感じてもらいたくて本記事を書いた。

4.2 隠れた変数理論の数学

隠れた変数理論は，ある意味，値の実在論をより明確に定式化したものだと言える。隠れた変数理論を導入しても，本記事の結論が変わるわけではないが，それなりに面白いところもあるので，ちょっとだけ説明しよう。

量子力学では，物理系の状態を特定しても物理量の値は一定値に定まらない。同じ状態の系を多数用意して，同じ物理量を測っても，同じ値になるとは限らない。量子力学が予測できるのは，この値の確率分布だけである。

隠れた変数理論は，量子力学とは異なる理論である。量子力学では物理系の状態は波動関数（状態ベクトルと呼んでもよい）ψ で指定されるが，隠れた変数理論では,「ミクロの物理系の状態は波動関数 ψ だけでは特定できない。ミクロ系は人類がまだ知らない変数 λ を隠し持っており，λ の値も指定してはじめてミクロ系の状態は一意的に特定できる」と考える。そして，系の波動関数 ψ を指定しても物理量 A の値は決まらないが，波動関数 ψ と隠れた変数値 λ を指定すれば物理量の値 $A(\psi, \lambda)$ が一意的に決まる，と考える。つまり，物理量は普通の実数値関数だとする。いまのところ我々は波動関数 ψ を知っていても，隠れた変数の値 λ を知らないから，物理量の値 $A(\psi, \lambda)$ がいくらになるのか正確に予測できないのであり，隠れた変数 λ を補えば，物理量の値はぴたりと一意的に予測できるようになるだろう，これで量子力学よりも優れた理論ができるだろう，あるいは，少なくとも量子力学で予

測できることはすべてこの理論でも予測できるだろう，というのが隠れた変数理論の構想である。

この理論から確率予測がどうやって出て来るかというと，多数のそっくり同じ系を準備すると，隠れた変数値 λ は隠れた確率分布 $P(\lambda)$ に従ってばらついていると考える。それがゆえに，物理量 $A(\psi,\lambda)$ の値も確率的にばらつき，A の平均値は

$$\langle A\rangle = \int A(\psi,\lambda)P(\lambda)d\lambda \tag{42}$$

で与えられる，というのが隠れた変数理論のやり方である。物理量が A だけでなく B, U, V のように多種類ある場合も，これらは波動関数 ψ と隠れた変数 λ の関数 $B(\psi,\lambda)$, $U(\psi,\lambda)$, $V(\psi,\lambda)$ だと考える。

要するに，隠れた変数理論は，物理量の値が隠れた変数値に支配されていると仮定する理論である。隠れた変数値は，人間が測定しなくてもその値はあるとされているので，言い換えれば，隠れた実在である。ということは，隠れた変数理論は，物理量の値の実在性を認めるのとほぼ等価である。

局所性と因果律を加味した隠れた変数理論では，ベル不等式で問題となる物理量の期待値の計算式 (32) は，

$$\begin{aligned}\langle S\rangle &= \langle AU\rangle + \langle AV\rangle + \langle BU\rangle - \langle BV\rangle \\ &= \int \Big\{A(\psi,\lambda)U(\psi,\lambda) + A(\psi,\lambda)V(\psi,\lambda) \\ &\qquad +B(\psi,\lambda)U(\psi,\lambda) - B(\psi,\lambda)V(\psi,\lambda)\Big\}P(\lambda)d\lambda\end{aligned} \tag{43}$$

で置き換えられる。式が多少煩雑になったが，$\{AU + AV + BU - BV\}$ という括弧の外に共通の確率 $P(\lambda)$ がくくり出される構造は，(32) と同じである。隠れた変数理論では，A や U は普通の ± 1 の値をとる関数であり，非可換物理量ではない。だから，本誌 p.39 の議論がそのまま使えて，$\{AU + AV + BU - BV\}$ の値は ± 2 のどちらかだと結論される。あとは，確率 $P(\lambda)$ は非負実数で，確率の合計値は 1 でなければならないという性質を使うと，(37)-(40) とまったく同じ理屈でベル不等式が導かれる。

以上で説明したのは，局所的隠れた変数理論である。局所性を放棄してしまえば，3.4 節で議論したように，遠方に瞬間的な影響が及ぶことを認めることになる。つまり，測定器のセッティングごとに隠れた確率の更新が起こり，ベル不等式は正当化できなくなる。

5　局所性と因果律は疑われないのか？

本誌記事では，マクロ古典物理の常識である実在概念・局所性・因果律を前提としてベル不等式を導いた。そして，実験ではベル不等式が破れていることが判明したので，実在概念・局所性・因果律のどれかは実際には成り立っていないはずだと指摘し，とくに実在概念を疑い，物理量の値の実在性を放棄しなければならないと結論した。さらに，量子論では物理量の掛け算は非可換であり，物理量の値がなくても正しい計算ができることを示した。しかし，これらの検討の過程で（本誌 p.41～43）局所性と因果律はあまりしつこく疑わなかった。

局所性と因果律を許容して，実在性だけを疑うのはなぜか？という疑問を持たれるのも当然だと思うので，その点について説明を補っておく。

局所性と因果律に関して次のような事実が知られている：

1) 局所性と因果律はマクロな古典世界で何度も確かめられている常識である。2) ミクロ世界の物理法則である相対論的場の量子論は局所性と因果律を尊重するようにできている。3) その理論が合わない現象はない。4) 超光速粒子（もしあれば局所性と因果律を破る）は実験家たちが探しているけれども一度も見つかっていない。

以上のような理由から局所性と因果律はおいそれと放棄するわけにはいかないのである。

それに比して,「測定しなかった物理量が，測定したときと同様に測定値を持っている」という実在概念は，古典物理の世界では一度も確かめられていない信念である。字句意義からして,「測らなかった値が，測った値に等しいかどうか」は確かめようがない。だからこそ実在概念が疑われるのである。

ベルの不等式とクラウザーたちの思考実験とアスペの実験の驚くべきところは，局所性と因果律が正しいと仮定した上で「測らなかった値が，測ったときと同じように実在しているか」という，肯定も否定もできなさそうな問いを物理実験でテスト可能にしたところにある。しかもアスペ実験は明確に否定的な答えを出した。

局所性や因果律が成り立たない世界を想定すると，我々が住み慣れた世界とはかなり異なった世界になる。そのような理論を作ってもよいが,「何でもありな理論」になりがちだ。そのような理論はアスペ実験を説明できるかもしれないが，いままでに実現したことがない奇妙な現象（テレパシーや過去への通信など）も起こってよいという予測を与えてしまう。詳しく言うと,「アスペ実験で $2\sqrt{2}$ という値が出て来ることは説明できて，$2\sqrt{2}$ よりも大きな値は出て来ないことも説明できて，その他のとんでもない現象は予測しない，量子論以外の理論」を作るのは難しい。

科学というのは保守的な学問であり，とんでもない修正なしで済ませられるなら，それにこしたことはない。「そういう判断は常識に囚われているのではないか」と言われるかもしれないが，そのとおり，本来，物理学は常識的なのである。好き好んで非常識になっているわけではない。

私の記事でも p.41〜43 あたりで，実在概念・局所性・因果律を比較して疑っていはいるが，局所性・因果律に対する疑いを長々と書いても後が続かないし，その二つは十分確かめられているので，あっさりした扱いになっている。

「アスペ実験で $2\sqrt{2}$ という値が出て，$2\sqrt{2}$ よりも大きな値は出て来ないことを説明できる理論」があるとことは，本誌に併載された木村元氏による記事の p.50〜51 に書かれている。これが従来の量子論の数学的原理ではなく，情報に基づいた原理から説明できるという点が目新しい。木村氏の記事は，量子論のような確立されたかに見える分野に関しても，基礎原理から見直そうとする機運・挑戦があることを示している。

6　波動関数の正体をめぐって

本誌 p.42 のコラムで【私は，波動関数は対象物体に備わっているものではなく，測定者のものでもなく，対象系の物理量を測定者に見える値に変換するインターフェースだと考えている。波動関数は，ミクロとマクロの世界の地平線上にあり，古典世界から量子世界を覗き見る窓のようなものだ】と私は書いたが，この考え方の提案者の名前や初出文献を挙げることはしなかった。この種の解釈はいつ誰が最初に言い出したかということは特定しにくい。そこまで厳密な記述を求められている場面ではないと思ったので，この程度の曖昧な記述にとどめておいた。

何事につけ解釈というものは，誰でも自分なりの解釈を持つものである。しかも，解釈は，そう思っている人にとっては当たり前のことに感じられてしまい，文章に書き残される機会が少ない。また，専門用語は，日常語と同じ単語を使っていても意味がずれていることがあり，そのために話が通じないことがある。実際には，大勢の人たちが少しずつ異なることを考えて議論を積み重ねていくうちに徐々に一つの解釈体系が形成され，共通認識が広がっていくものだ。また，年月が経過して，言葉や周辺の概念が変化すると，物理学上の概念と言えども意味内容や解釈が変容していくのは，歴史が示すところである。ときには一人の物理学者であってもいろいろな解釈の間を揺れ動く。

量子力学の，いわゆる「コペンハーゲン解釈」ですら，その詳細な内容については諸説ある。それがコペンハーゲンのボーアを中心として強化・唱導された論説であることは間違いないが，誰かが明確にコペンハーゲン解釈を条文として書いたわけでもない。

本誌のコラムに書いた波動関数の解釈にしても私のオリジナルアイディアではない。しかし，先人の貢献について何も言及しないのは不遜だと思うので，その点，説明を補っておきたい。

1947 年にシーゲル (Irving E. Segal) という数学者が，波動関数の拡張概念である「状態 (state)」はミクロ系に内在する非可換物理量をマクロ外界系で測定される値（期待値）に変換する写像だという明確な定義を与えた [22, 23, 24]。しかし，彼自身，論文の中で，この定義は本質的にワイル [25] およびフォンノイマン [26] が与えたものだと書いている。

遡れば，1926 年にシュレーディンガーは波動関数という概念を物理学に導入し，同年，ボルンは波動関数の確率解釈を提唱した [27, 28]。後日，アインシュタインが量子力学の確率解釈に不満を漏らしたことは有名だが，ボルンは 1954 年のノーベル賞受賞講演において，確率が振幅の 2 乗に比例するというアイディアはアインシュタインからヒントを得たと公言している [29]。アインシュタイン自身，光の明るさを光子の放出確率で説明するという考えを論文に示していたし，電磁場の振幅の 2 乗は光子の顕在確率に比例するだろうという考えも示していたのである。そんなアインシュタインが量子力学の確率解釈は気に食わなかったのは，まったく皮肉と言うほかない。

1926 年の時点では，シュレーディンガーは，電子は流体のようなものだと考え，波動関数は電子の電荷密度を表していると考えていたことが伝えられている [29]。つまり波動関数は実在物に近い概念だと思っていたらしい。

しかし，ボルンの確率解釈が物理学者たちに認められるようになった 1935 年には，シュ

レーディンガーは，後に彼の名を冠して呼ばれる猫のパラドクスを提唱した論文の中で,「波動関数とは予測目録であり，測定値の確率を予言する手段にほかならない」と書いている [30, 31]。この言い方だと，シュレーディンガーは，波動関数は原子や猫などの被観測系に備わった実体だと思っていたのか，それとも観測者の側に備わっている属性だと思っていたのか，はっきりしない。むしろ予測値を計算するための一種の通過儀礼として波動関数を捉えていたのではないかとすら思える。また，同じ論文の中で「測定によって波動関数が突発的に予見不可能な変化をすることを考えに入れると，波動関数をそのまま実在の代用物と見なすことはできない」（原文の丸写しではなく，多少語順を整えてある）と書いている。

なお,「状態はミクロとマクロの界面 (interface) の機能を果たす」という表現は小嶋泉氏の論文に初めて現れたとされている [32, 33]。たしかにこの言い回しは量子論における状態概念を的確に言い表しており，状態概念の最良の位置付けだと思われる。

いろいろ述べたが，解釈というのは，これ一つが正解と決まるものではない。かといって，どんな解釈でも受け入れてよいわけではない。まずい解釈は，現実に合わない描像を人に与えたり，不要なパラドクスを引き起こしたりするので，時を経れば排除されていくべきである。

また，物理理論における解釈とは，用語・数式と現実世界とを対応づけることであり，現実世界についての表象・イメージを形作ることである。解釈とは，たんに現実現象を人間心理に投影する受動的作業ではなく，自然界にどう働きかければどういう現象が起きるかを予測する能動的な描像・思考モデルとしての役割を果たす。だから解釈は重要なのである。

確率や状態など量子力学の基本概念について私なりの解釈は別のところでも詳しく論じたので，参考にしていただきたい [34]。

参考文献

[1] T. Isobe and S. Tanimura, “A method for systematic construction of Bell-like inequalities and a proposal of a new type of test”, Progress of Theoretical Physics **124**, 191-205 (2010), arXiv: 1005.4966.

[2] 谷村省吾「21 世紀の量子論入門」。雑誌『理系への数学』（その後『現代数学』に誌名変更）2010 年 5 月号から 2012 年 4 月号まで連載された解説記事。量子力学の入門コースとして代数的量子論の講義を試みた。この連載記事は今年中に単行本化・出版の予定。

[3] S. Kochen and E. P. Specker, “The problem of hidden variables in quantum mechanics,” J. Math. Mech. **17**, 59-87 (1967).

[4] N. D. Mermin, “Hidden variables and the two theorems of John Bell,” Rev. Mod. Phys. **65**, 803-815 (1993). 「フォンノイマンの愚かな仮定 (von Neumann’s silly assumption)」という強烈な言葉でフォンノイマンの間違いを指摘している。コッヘン・スペッカーの定理のわかりやすい解説であり，それ以上に物理量の値の非実在性を示すわかりやすい例を数多く提示している。

[5] 筒井泉「量子力学の反常識と素粒子の自由意志」(岩波書店, 2011)。量子力学のパラドキシカルな側面を現代的観点からわかりやすく解説している。

[6] Y. Aharonov, D. Z. Albert, and L. Vaidman, "How the result of a measurement of a component of the spin of a spin-$\frac{1}{2}$ particle can turn out to be 100," Phys. Rev. Lett. **60**, 1351-1354 (1988). スペクトル値が $\pm\frac{1}{2}$ しかない物理量の測定値（弱値）が 100 になることもあり得ることを示した論文。トリッキーな「なぞなぞ」のような問題提起であり，しばらくは一部のマニアの間だけで知られていたが，アハラノフが Quantum Paradoxes という本を出した 2005 年頃から次第に多くの人が注目するようになった。

[7] I. M. Duck, P. M. Stevenson, and E. C. G. Sudarshan, "The sense in which a weak measurement of a spin-$\frac{1}{2}$ particle's spin component yields a value 100," Phys. Rev. D **40**, 2112-2117 (1989). 上述の論文 [6] の謎解き・解説論文。

[8] 古田彩（著）／Y. アハラノフ（語り）／井元信之・横田一広（共著）『存在確率マイナス 1／宇宙の未来が決める現在／量子の "開かずの間" をのぞき見る』日経サイエンス 2009 年 10 月号 pp.22-35 （別冊日経サイエンス 186 号「実在とは何か？」(2012 年) pp.46-59 に再録 `http://www.nikkei-science.com/page/sci_book/bessatu/51186.html` ）。粒子がある経路を通る確率が −1 だと考えるとつじつまが合う（そう考えないとつじつまが合わない）という現象が発見され，アハラノフの弱値のアイディアを使えば −1 の確率が説明できるという報告。タイトルは奇をてらっているが，弱値そのものは数学的にきちんと定義されており，物理的にも測定方法がわかってきている。

[9] B. S. Cirel'son (Tsirelson), "Quantum generalizations of Bell's inequality," Lett. Math. Phys. **4**, 93-100 (1980).

[10] A. Fine, "Hidden variables, joint probability, and the Bell inequality," Phys. Rev. Lett. **48**, 291-295 (1982).

[11] A. Aspect, J. Dalibard, and G. Roger, "Experimental test of Bell's inequalities using time-varying analyzers," Phys. Rev. Lett. **49**, 1804-1807 (1982). 光子に抜き打ちテストを仕掛けてベル不等式を検証した実験。

[12] A. Aspect, P. Grangier, and G. Roger, "Experimental tests of realistic local theories via Bell 's theorem, " Phys. Rev. Lett. **47**, 460-463 (1981). アスペらがベル不等式を検証した初の実験。ベル不等式の検証という意味ではこれが世界初の実験ではないが，仕掛けが原理に忠実で，抜け道が少ないという意味で評判が高い。

[13] A. シモニー「実験が光をあてる量子力学の奇妙な世界」日経サイエンス 1988 年 3 月号 `http://www.nikkei-science.net/modules/flash/index.php?id=198803_044`（日経サイエンス別冊 112『量子力学のパラドックス "奇妙で怪しい深遠な世界"』に再録)。アスペの実験の解説記事。著者のシモニーは哲学と物理学の学位を持っており，クラウザー，ホーン，ホルトとともにベル不等式の拡張版を見つけたことで有名。

[14] V. Jacques, E Wu, F. Grosshans, F. Treussart, P. Grangier, A. Aspect, and J-F. Roch, "Experimental realization of Wheeler's delayed-choice gedanken experiment," Science **315**, 966-968 (2007). 光の波動性をチェックする測定器と粒子性をチェックす

る測定器の両方を用意し（ただし，一時にはどちらか一方しか測定できない），光が実験装置内を飛んでいる間に，波動性測定器・粒子性測定器のどちらに光を送り届けるかを高速スイッチで切り替えた，という実験。実験が始まってしまった後で何の測定をするかを選ぶ，という意味で遅延選択実験 (delayed-choice experiment) と呼ばれる。通常の実験は何を測定するかあらかじめ選んでから開始するので，その選択が光の性質を変えてしまう余地があるが，これはそのような余地のない抜き打ちテストである。この実験では，最終的に粒子測定を選べば，光は粒子性を示し，波動測定を選べば，光は波動性を示すことが確認された。

[15] H. F. Hofmann, “On the resolution of quantum paradoxes by weak measurements,” arXiv: 0911.0071. 弱値を使えば，負の確率を定義できて，ベル不等式の破れも説明できることを示した。「ベル不等式の破れは，局所性を否定しているのではなく，実在を否定しているのだ」という見解はこの論文にも書かれている。実在をめぐる討論に関連して，デカルト，カント，ショーペンハウアーなどが引用されている，物理学の論文としては異色な論文。

[16] H. F. Hofmann, “Complete characterization of post-selected quantum statistics using weak measurement tomography,” Phys. Rev. A **81**, 012103, 1-5 (2010). 前出の論文 [15] の主張をもう少しおとなしくした論文。

[17] B. L. Higgins, M. S. Palsson, G. Y. Xiang, H. M. Wiseman, and G. J. Pryde, “Measuring probabilities which violate “reality” in a Bell inequality experiment,” arXiv: 1112.3664. ベル不等式が破れる状況で負の確率を測定したという論文。[15] もそうだが，この論文も査読ジャーナルに掲載されていないのは，主張が過激すぎるからだろうか？

[18] J. S. Bell, “On the problem of hidden varibales in quantum mechanics,” Rev. Mod. Phys. **38**, 447-452 (1966). ベルの不等式を導いたのはこれより前の 1964 年出版の論文。

[19] J. F. Clauser, M. A. Horne, A. Shimony, and R. A. Holt, “Proposed experiment to test local hidden-variable theories,” Phys. Rev. Lett. **23**, 880-884 (1969).

[20] 戸田山和久「科学哲学の冒険—サイエンスの目的と方法をさぐる」（日本放送出版協会, 2005)。科学哲学とはどういうものか知るのによい本。

[21] 須藤 靖，伊勢田哲治「科学を語るとはどういうことか—科学者，哲学者にモノ申す」(河出書房新社，2013)。物理学者と科学哲学者の論点のすれ違いを見る本である。やはりそうなるか，という思いがした。頼まれてもいないが，私なら科学哲学についてまた別の観点から問うてみたいことがある。

[22] I. Gel’fand and M. Naĭmark, “On the imbedding of normed rings into the ring of operators in Hilbert space,” Matematicheskii Sbornik **54**, 197-217 (1943) (C*-Algebras: 1943-1993, Contemp. Math. **167**, 3 (1994) に再録). 「state」という言葉は用いられていないが，[23] における state とほぼ同義の概念が用いられている。

[23] I. E. Segal, “Irreducible representations of operator algebras,” Bull. Amer. Math. Soc. **53**, 73-88 (1947). 明確に state（状態）の概念が定義されている。state さえあれば，ヒルベルト空間は後付けで構成できることを示している。

[24] I. E. Segal, "Postulates for general quantum mechanics," Ann. Math. **48**, 930-948 (1947). 代数的量子論を明確に定式化した論文。[23] は数学の論文として書かれているが，こちらの論文の方が量子論の物理的意味を強く意識して書かれている。

[25] H. Weyl, The Theory of Groups and Quantum Mechanics (Dover, 1950). ドイツ語の初版は 1928 年。p.74 以降，第 7 節：The Conceptual Structure of Quantum Mechanics で state の概念が議論されている。1926 年に物理理論としての量子力学はほぼ出来上がり，その後は解釈と応用の研究が続くのだが，ワイルの本が書かれた年代には量子力学の数学的内容はほぼ理解されていたというスピード感は，現代の目から見て驚きである。この本の中でワイルはシュワルツ不等式を用いて位置と運動量の不確定性関係を証明している。この本を英訳したロバートソン (Robertson) は 1929 年に任意の物理量の不確定性関係を証明した。

[26] J. v. ノイマン「量子力学の数学的基礎」(みすず書房, 1957 年)。ドイツ語の初版は 1932 年。第 3 章以降のほとんどの部分は，測定と解釈に関する議論に費やされている。タイトルどおり量子力学の確固たる数学的基礎を提示しようというフォンノイマンの意気込みが感じられる本だが，意外に「数学的な本」ではない。つまり,「最初に公理と定義を掲げて，あとは淡々と定理・証明を列挙する」という公理主義的スタイルを採っておらず，物理的考察に多くの紙数を割いている。その分，物理学者の目から見るとつっこみどころが多く，いま見ると間違っている箇所もあり，それがまたこの本の魅力になっている。

[27] M. Born, "Zur Quantenmechanik der Stossvorgänge," Z. Phys. **37**, 863-867 (1926). p.865 の脚注に「校正刷りで付け足した註」として,「より注意深く考察すると，確率は波動関数の展開係数の 2 乗に比例することがわかる」と書かれている。原文はドイツ語だが，英語訳が J. A. Wheeler and W. H. Zurek, Quantum Theory and Measurement (Princeton Univ Press, 1984) に収められている。

[28] M. Born, "Quantenmechanik der Stossvorgänge," Z. Phys. **38**, 803-827 (1926). 量子力学の散乱問題を定式化した論文。p.805 (4) 式あたりに確率解釈がはっきり表れている。

[29] M. Born, "The statistical interpretation of quantum mechanics," Nobel Lecture (1954). ノーベル財団の web page に講演原稿が公開されている。`http://www.nobelprize.org/nobel_prizes/physics/laureates/1954/born-lecture.html` なお，ボルン自身は probability interpretation（確率解釈）ではなく，statistical interpretation（統計解釈）と言っている。

[30] シュレーディンガー『量子力学の現状』，湯川・井上編「現代の科学 II」（世界の名著，第 66 巻）pp.357-408 (中央公論社, 1970)。原文は 1935 年版。いわゆる「シュレーディンガーの猫のパラドクス」を初めて論じた論文。p.377, 第七節には「予測目録としての ψ 関数」という見出しが付けられ，本文には「ψ 関数とは，測定値の確率を予言する手段にほかならない」と書かれている。

[31] 湯川秀樹・江沢洋編著「岩波講座現代物理学の基礎（第 2 版）量子力学 II」(岩波書店, 1978), 16.1 節, p.256 に「状態とは予測目録 (Erwartungskatalog) である」と書かれている。

[32] 小嶋泉・岡村和哉「無限量子系の物理と数理」(サイエンス社, 2013), p.13. これも特徴があって興味深い本なのだが,「引用する＝この本に書かれていることすべてを支持している」と思われても困るので断っておくと，p.124 の，光子は媒質中で有効質量を獲得して局在化するという説は，多々難点があり，見当違いの説と思われる。原理的な問題としては，気体や固体などの媒質は静止系が定義できる系であり，ポアンカレ対称性もガリレイ対称性も破れているので，ポアンカレ群表現・ガリレイ群表現のいずれの意味でも光子の質量は定義できないし，どちらに依拠した局在化定理も意味をなさない，という難点がある。

[33] I. Ojima, "Micro-macro duality in quantum physics," pp.143-161, in Proc. Intern. Conf. "Stochastic Analysis: Classical and Quantum—Perspectives of White Noise Theory" ed. by T. Hida (World Scientific, 2005), arXiv: math-ph/0502038.

[34] 谷村省吾「21 世紀の量子論入門—第 15 回：観測問題の基本概念」理系への数学 2011 年 7 月号 pp.56-61（現代数学社）。