初公開版 2015 年 12 月 15 日
修正増補版 2016 年 3 月 2 日

多様化する不確定性関係

谷村 省吾
名古屋大学大学院情報科学研究科

1　序文

すべての物質は原子や素粒子などのミクロの粒子でできており，これらの粒子は量子論・量子力学と呼ばれる物理法則に従っている。量子論における不確定性関係は，**ミクロの系——たとえ一つの電子でさえも——が持つすべての物理量を誤差ゼロで正確に測定することは，**実用上困難であるだけでなく，**物理的原理上不可能である**ことを意味し，物理学者に限らない人々の世界観に大きな影響を与えている。

もともと不確定性関係は，量子力学の成立初期にハイゼンベルクが提唱した命題だが，その数学的形式・物理的内容については曖昧な点が残されており，しばしば論争の種になっていた。近年，小澤正直（おざわまさなお）氏によって不確定性関係が数学的に厳密に定式化され，実験で何度も検証されるに至り,「小澤の不等式」と呼ばれる数式が学界で認知されている。また，小澤の不等式の発見をきっかけに，数学的形式も物理的内容も異なった，不確定性関係のバリエーションが次々と発見されている。

物理科学雑誌『パリティ』（丸善出版）2016 年 2 月号に掲載されるコラム「メイドインジャパン物理用語：小澤の不等式」において，私は，小澤の不等式が発見された経緯の概略を解説した [143]。しかし，パリティ誌コラムでは紙幅の関係であまり詳しいことは書けなかったので，補足記事としてこのノートを書くことにした。ここでは，不確定性関係式の数学的証明や，多様な不確定性関係が見い出された歴史的経緯を詳しく述べる。このノートを書き始めた当初は，数式なしの解説文では満足できない読者のために数式の証明だけの付録を書くつもりだったのだが，書いているうちに，あれも書きたい・これも書くべきだということを次々と思い出し，結果的には，不確定性関係に関する総括報告書のようなものになってしまった。研究者が他の研究者たちの業績を紹介したところで誰に褒めてもらえるわけでもないが，この件に関しては徹底的なレポートを書いておきたかったのである。私がいつまでも少しずつ書き続けているために，完成が遅れに遅れて，それに引きずられて元のコラムの出版が全然タイムリーではなくなってしまったことはパリティ編集者に申し訳なく思う。ただ, 1927 年から 2015 年までの不確定性関係の研究の歴史を網羅した解説記事としては，今のところ世界で一番詳しく正確で公平な解説になったのではないかと勝手に自負している。

本ノートの第 10 章までは，各種の不確定性関係とそれらの証明の提示である。とくに他の書物を参照しなくても証明は読めるように書いたつもりである。第 11 章は不確定性関係の歴史についてのかなり詳しい解説である。第 12 章では不確定性関係の物理学的意義につ

いて考察する。数式に興味を持てない方は，前半は飛ばしても，後半は物語として読めるのではないかと思う。どちらかと言うと，前半の数式・証明の部分よりも，第 11 章以降の，不確定性関係についての歴史的・物理学的総括の方が読んでもらいたい部分である。

このPDFファイルには目次のしおりが付けてあるので，それを利用すれば読みたい節にジャンプできる。

2　不確定性関係のリスト

このノートではたくさんの不確定性関係式を紹介する。一度，それら全部をリストアップておこう。ただし，歴史に登場した順に並べるのではなく，意味的関連が深いものが近くになるように並べてある。以下，h はプランク定数であり，$\hbar = h/(2\pi)$ である。

ハイゼンベルクが論文に最初に書いた不確定性関係式 (11.1)：

$$p_1\, q_1 \ \sim\ h \tag{2.1}$$

ケナードの不等式（位置と運動量の不確定性関係）(5.17)：

$$\sigma(\hat{Q})\sigma(\hat{P}) \ \geq\ \frac{1}{2}\hbar \tag{2.2}$$

ロバートソンの不等式（標準偏差の不確定性関係，統計的ばらつきの関係）(5.4)：

$$\sigma(\hat{A})\sigma(\hat{B}) \geq \frac{1}{2}\left|\langle[\hat{A},\hat{B}]\rangle\right| \tag{2.3}$$

シュレーディンガーの不等式 (6.1)：

$$\sigma(\hat{A})^2\sigma(\hat{B})^2 \ \geq\ \frac{1}{4}\langle\psi|\{\Delta\hat{A},\Delta\hat{B}\}|\psi\rangle^2 + \frac{1}{4}\left|\langle\psi|[\hat{A},\hat{B}]|\psi\rangle\right|^2 \tag{2.4}$$

アーサーズ・ケリーの不等式（運動量と位置の同時測定における不偏推定量の誤差の不確定性関係）(11.19)：

$$\sigma(\hat{U}^\dagger\hat{M}_Q\hat{U})\cdot\sigma(\hat{U}^\dagger\hat{M}_P\hat{U}) \ \geq\ \left|\langle[\hat{Q},\hat{P}]\rangle\right| \ =\ \hbar \tag{2.5}$$

アーサーズ・グッドマンの不等式（同時測定における不偏推定量の誤差の不確定性関係）(8.7), (8.8)：

$$\mathcal{E}_{\mathrm{AG}}(\hat{A})\cdot\mathcal{E}_{\mathrm{AG}}(\hat{B}) \ \ \geq\ \ \frac{1}{2}\left|\langle[\hat{A},\hat{B}]\rangle\right|, \tag{2.6}$$

$$\sigma(\hat{U}^\dagger\hat{M}_A\hat{U})\cdot\sigma(\hat{U}^\dagger\hat{M}_B\hat{U}) \ \ \geq\ \ \left|\langle[\hat{A},\hat{B}]\rangle\right| \tag{2.7}$$

小澤の不等式（誤差と擾乱の不確定性関係）(7.6)：

$$\varepsilon(\hat{A})\eta(\hat{B}) + \varepsilon(\hat{A})\sigma(\hat{B}) + \sigma(\hat{A})\eta(\hat{B}) \geq \frac{1}{2}\left|\langle[\hat{A},\hat{B}]\rangle\right| \tag{2.8}$$

もう一つの小澤の不等式（同時測定における誤差のトレードオフ関係）(9.1)：

$$\varepsilon(\hat{A})\varepsilon(\hat{B}) + \varepsilon(\hat{A})\sigma(\hat{B}) + \sigma(\hat{A})\varepsilon(\hat{B}) \geq \frac{1}{2}\left|\langle[\hat{A},\hat{B}]\rangle\right| \tag{2.9}$$

北野の不等式 (11.33)：

$$\left(\frac{\varepsilon(\hat{Q})}{\sigma(\hat{Q})}\right)^2 + \left(\frac{\eta(\hat{P})}{\sigma(\hat{P})}\right)^2 \;\geq\; 1 \tag{2.10}$$

ブランシアードの不等式（誤差と擾乱のタイトな不確定性関係）(10.1)：

$$\varepsilon^2(\hat{A})\sigma^2(\hat{B}) + \sigma^2(\hat{A})\eta^2(\hat{B}) + 2\varepsilon(\hat{A})\eta(\hat{B})\sqrt{\sigma^2(\hat{A})\sigma^2(\hat{B}) - C^2} \;\geq\; C^2, \quad C := \frac{1}{2i}\langle[\hat{A},\hat{B}]\rangle \tag{2.11}$$

ブランシアードの同時測定誤差のトレードオフ関係 (10.44)：

$$\varepsilon^2(\hat{A})\sigma^2(\hat{B}) + \sigma^2(\hat{A})\varepsilon^2(\hat{B}) + 2\varepsilon(\hat{A})\varepsilon(\hat{B})\sqrt{\sigma^2(\hat{A})\sigma^2(\hat{B}) - C^2} \;\geq\; C^2 \tag{2.12}$$

渡辺・沙川・上田の推定誤差の不確定性関係 (11.31)：

$$\mathcal{E}_{\mathrm{W}}(\hat{A})\,\mathcal{E}_{\mathrm{W}}(\hat{B}) \;\;\geq\;\; \frac{1}{4}\left|\langle[\hat{A},\hat{B}]\rangle\right|^2 \tag{2.13}$$

渡辺・上田の，推定誤差と擾乱の不確定性関係 (11.32)：

$$\mathcal{E}_{\mathrm{W}}(\hat{A})\,\mathcal{D}_{\mathrm{W}}(\hat{B}) \;\;\geq\;\; \frac{1}{4}\left|\langle[\hat{A},\hat{B}]\rangle\right|^2 \tag{2.14}$$

Hirschmann-Beckner-Białynicki-Birula-Mycielski のエントロピー不確定性関係 (11.23)：

$$\tilde{H}(Q_1,\cdots,Q_n|\hat{\rho}) \;+\; \tilde{H}(P_1,\cdots,P_n|\hat{\rho}) \;\geq\; n\,\log(e\pi) \tag{2.15}$$

Deutsch（ドイッチュ）のエントロピー不確定性関係 (11.24)：

$$H(\hat{A}|\hat{\rho}) \;+\; H(\hat{B}|\hat{\rho}) \;\geq\; 2\,\log\left(\frac{2}{1+D_{AB}}\right), \quad D_{AB} := \max_{a,b}\,\left|\langle a|b\rangle\right| \tag{2.16}$$

以下の本文では，(2.2) から (2.12) までの関係式を証明する。

3　ヒルベルト空間：量子力学の言葉

不確定性関係の説明をするのにヒルベルト空間の話から解説を始めるのは，話を遡（さかのぼ）りすぎかもしれないし，すでに知っている人にしかわからない話になるかもしれないが，できるだけ自己完結的な解説をしたいのでヒルベルト空間の定義を述べておく（適切な教科書として [71] を挙げておく）。

力学では対象となる系の状態を何らかの数学的記号で表す。例えば，ニュートン力学では，質点の状態を質点の位置と速度で指定し，位置と速度を 3 次元空間の座標の実数値で表す。

量子力学では系の状態を「ヒルベルト空間のベクトル」で表す。**ヒルベルト空間** (Hilbert space) は，ベクトル空間であり，内積が備わっており，完備であるような集合である。つまり，$\mathscr{H}$ がヒルベルト空間であるための条件は，任意の 2 つのベクトル $|\psi_1\rangle, |\psi_2\rangle \in \mathscr{H}$ の**和**

$$|\psi_1\rangle + |\psi_2\rangle \;\in\; \mathscr{H} \tag{3.1}$$

と，任意の複素数 $c \in \mathbb{C}$ による任意のベクトル $|\psi\rangle \in \mathscr{H}$ の**スカラー倍**

$$c|\psi\rangle \;\in\; \mathscr{H} \tag{3.2}$$

が定まり，任意の 2 つのベクトル $|\psi\rangle, |\chi\rangle \in \mathscr{H}$ の**内積**と呼ばれる複素数値

$$\langle\chi|\psi\rangle \ \in \ \mathbb{C} \tag{3.3}$$

が定まっていて，極限操作について閉じていることである（後述）。内積 $\langle\chi|\psi\rangle$ の左側の括弧 “ $\langle$ ” をブラ (bra)，右側の括弧 “ $\rangle$ ” をケット (ket) ともいう。任意のベクトル $|\psi\rangle, |\psi_1\rangle, |\psi_2\rangle, |\chi\rangle, |\chi_1\rangle, |\chi_2\rangle$ と任意の複素数 c に対して内積は

$$\langle\chi|\psi_1+\psi_2\rangle = \langle\chi|\psi_1\rangle + \langle\chi|\psi_2\rangle \tag{3.4}$$

$$\langle\chi|c\psi\rangle = c\langle\chi|\psi\rangle \tag{3.5}$$

$$\langle\chi_1+\chi_2|\psi\rangle = \langle\chi_1|\psi\rangle + \langle\chi_2|\psi\rangle \tag{3.6}$$

$$\langle c\chi|\psi\rangle = c^*\langle\chi|\psi\rangle \tag{3.7}$$

$$\langle\psi|\chi\rangle = \langle\chi|\psi\rangle^* \tag{3.8}$$

$$\langle\psi|\psi\rangle \text{ は実数} \tag{3.9}$$

$$\langle\psi|\psi\rangle \ \geq \ 0 \tag{3.10}$$

$$\langle\psi|\psi\rangle \ = \ 0 \ \Leftrightarrow \ |\psi\rangle = 0 \tag{3.11}$$

満たす。不等式 (3.10) を内積の非負性という。これがこのノートに登場するすべての不等式の出どころである。性質 (3.10), (3.11) をあわせて内積の正定値性という。また，

$$\big\| \, |\psi\rangle \, \big\| := \sqrt{\langle\psi|\psi\rangle} \tag{3.12}$$

を，ベクトル $|\psi\rangle$ の大きさとか**ノルム** (norm) という。一般に，内積の値は複素数だが，ノルムは必ず非負の実数である。無限個のベクトルの集合 $\{|\psi_1\rangle, |\psi_2\rangle, |\psi_3\rangle, \cdots\}$ と一つのベクトル $|\psi\rangle$ が

$$\lim_{n\to\infty} \Big\| |\psi_n\rangle - |\psi\rangle \Big\| = 0 \tag{3.13}$$

という条件を満たしていれば，$\{|\psi_1\rangle, |\psi_2\rangle, |\psi_3\rangle, \cdots\}$ は $|\psi\rangle$ に**収束する** (converge) といい，$|\psi\rangle$ を収束先とか極限という。一方で，無限個のベクトルの集合 $\{|\psi_1\rangle, |\psi_2\rangle, |\psi_3\rangle, \cdots\}$ が

$$\lim_{m,n\to\infty} \Big\| |\psi_m\rangle - |\psi_n\rangle \Big\| = 0 \tag{3.14}$$

という条件を満たしていれば，この $\{|\psi_1\rangle, |\psi_2\rangle, |\psi_3\rangle, \cdots\}$ を**コーシー列** (Cauchy sequence) という。

ベクトルの列 $\{|\psi_1\rangle, |\psi_2\rangle, |\psi_3\rangle, \cdots\}$ がコーシー列ならば必ず収束先が存在するようになっておれば，$\mathscr{H}$ は**極限操作について閉じている**とか**完備** (complete) だという。

ノルム $\big\| \, |\psi\rangle \, \big\| = 1$ であるようなベクトル $|\psi\rangle$ を**単位ベクトル** (unit vector) という。**量子力学では系の状態は単位ベクトルで表される。**しかも，絶対値が 1 の任意の複素数 c に対してベクトル $|\psi\rangle$ と $c|\psi\rangle$ は物理的に同一の状態を表す。

ベクトル $|\chi\rangle$, $|\psi\rangle$ の内積が $\langle\chi|\psi\rangle = 0$ ならば $|\chi\rangle$ と $|\psi\rangle$ は**直交している** (orthogonal, perpendicular) といい，$|\chi\rangle \perp |\psi\rangle$ と書く。

4　コーシー・シュワルツの不等式

ヒルベルト空間の重要な性質である**コーシー・シュワルツの不等式** (Cauchy-Schwarz inequality) を証明しよう。ヒルベルト空間 $\mathscr{H}$ の任意のベクトル $|\phi\rangle, |\chi\rangle$ に対して

$$\langle\phi|\phi\rangle\langle\chi|\chi\rangle \geq \bigl|\langle\chi|\phi\rangle\bigr|^2 \tag{4.1}$$

が成り立つ。$\langle\chi|\chi\rangle = 0$ の場合と $\langle\chi|\chi\rangle \neq 0$ の場合に分けて証明する。

$\langle\chi|\chi\rangle = 0$ の場合は，(3.11) より，$|\chi\rangle = 0$ である。$0+0=0$ と (3.6) から，$\langle 0|\phi\rangle + \langle 0|\phi\rangle = \langle 0|\phi\rangle$ が従い，ゆえに $\langle 0|\phi\rangle = 0$ である。よって，(4.1) の両辺ともにゼロであり，等号が成立する。

$\langle\chi|\chi\rangle \neq 0$ の場合は，任意の複素数 t に対して

$$|\theta\rangle := |\phi\rangle - t|\chi\rangle \tag{4.2}$$

とおき，$\langle\theta|\theta\rangle \geq 0$ という式を展開して

$$\langle\phi|\phi\rangle - t\langle\phi|\chi\rangle - t^*\langle\chi|\phi\rangle + |t|^2\langle\chi|\chi\rangle \;\geq\; 0 \tag{4.3}$$

を得る。この式の t に

$$t = \frac{\langle\chi|\phi\rangle}{\langle\chi|\chi\rangle} \tag{4.4}$$

を代入して $\langle\chi|\phi\rangle = \langle\phi|\chi\rangle^*$ を使って整理すると

$$\begin{aligned}
\langle\phi|\phi\rangle - \frac{\langle\chi|\phi\rangle}{\langle\chi|\chi\rangle}\langle\phi|\chi\rangle - \frac{\langle\chi|\phi\rangle^*}{\langle\chi|\chi\rangle}\langle\chi|\phi\rangle + \left|\frac{\langle\chi|\phi\rangle}{\langle\chi|\chi\rangle}\right|^2\langle\chi|\chi\rangle \quad &\geq \quad 0 \\
\langle\phi|\phi\rangle - \frac{|\langle\chi|\phi\rangle|^2}{\langle\chi|\chi\rangle} \quad &\geq \quad 0
\end{aligned} \tag{4.5}$$

となり，(4.1) を得る。

コーシー・シュワルツ不等式の幾何学的意味は，ベクトル $|\phi\rangle$ を $|\chi\rangle$ に平行な成分と垂直な成分に分けて $|\phi\rangle = t|\chi\rangle + |\theta\rangle$ としたとき，垂直成分 $|\theta\rangle$ のノルムが非負だということだ。

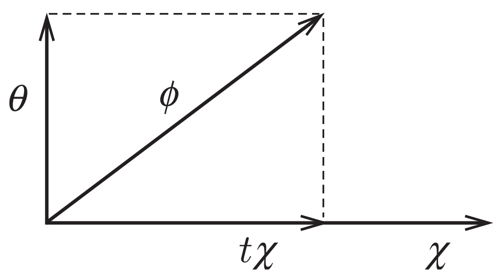

図 1: コーシー・シュワルツの不等式の幾何学的意味

コーシー・シュワルツの不等式 (4.1) の等号がどういう場合に成立するか考える。もともと，$|\chi\rangle = 0$ の場合は等号成立している。$|\chi\rangle \neq 0$ の場合は，$\langle\theta|\theta\rangle \geq 0$ を式変形して不等式 (4.1) が導かれたのだから，等号は $|\theta\rangle = 0$ のとき成立する。この式 $|\theta\rangle = |\phi\rangle - t|\chi\rangle = 0$ は $|\phi\rangle = t|\chi\rangle$ となる複素数 t の存在を意味する。言い換えると，$|\phi\rangle$ と $|\chi\rangle$ が一次従属であることが (4.1) の等号成立の必要十分条件である。

5　ロバートソンの不等式

ミクロの世界においては，同じ状態の系を多数用意して同じ物理量を測定しても，測定値は同一の値にならず，測るたびに異なった値を得ることがある。量子力学では物理量は自己共役な線形演算子 ($\hat{A} = \hat{A}^{\dagger}$) で表される。量子力学の確率解釈によれば，状態ベクトル $|\psi\rangle$ における物理量 $\hat{A}$ の測定値の平均値は

$$\langle \hat{A} \rangle := \langle \psi | \hat{A} | \psi \rangle \tag{5.1}$$

で求められる。測定値と平均値の差の 2 乗平均

$$V(\hat{A}) := \left\langle \left(\hat{A} - \langle \hat{A} \rangle \right)^2 \right\rangle = \langle \hat{A}^2 \rangle - \langle \hat{A} \rangle^2 \tag{5.2}$$

を状態 $|\psi\rangle$ における物理量 $\hat{A}$ の値の**分散** (variance) という。分散の平方根

$$\sigma(\hat{A}) := \sqrt{V(\hat{A})} = \sqrt{\langle (\hat{A} - \langle \hat{A} \rangle)^2 \rangle} \tag{5.3}$$

を状態 $|\psi\rangle$ における物理量 $\hat{A}$ の**標準偏差** (standard deviation) という。分散も標準偏差も「測定値のばらつきぐあい」の定量的な指標である。測定値が毎回同じ値なら，$V(\hat{A}) = 0$, $\sigma(\hat{A}) = 0$ になる。そうなっていれば，状態 $|\psi\rangle$ は物理量 $\hat{A}$ の値が $\langle \hat{A} \rangle$ に確定している状態だという。

なお，任意のベクトル $|\psi\rangle$ に対して $\hat{I}|\psi\rangle = |\psi\rangle$ となる $\hat{I}$ を**恒等演算子** (identity operator) という。$\hat{A} - \langle \hat{A} \rangle$ は正確には $\hat{A} - \langle \hat{A} \rangle \hat{I}$ のことである。

自己共役演算子 $\hat{A}, \hat{B}$ で表される任意の 2 つの物理量について

$$\sigma(\hat{A})\sigma(\hat{B}) \geq \frac{1}{2} \left| \langle [\hat{A}, \hat{B}] \rangle \right| \tag{5.4}$$

が成り立つ。これを**ロバートソンの不等式** (inequality of Robertson) という [10]。

この不等式を証明しよう。そのために

$$\Delta\hat{A} = \hat{A} - \langle \hat{A} \rangle \hat{I} \tag{5.5}$$

$$\Delta\hat{B} = \hat{B} - \langle \hat{B} \rangle \hat{I} \tag{5.6}$$

$$|\chi\rangle = \Delta\hat{A}|\psi\rangle \tag{5.7}$$

$$|\phi\rangle = \Delta\hat{B}|\psi\rangle \tag{5.8}$$

をコーシー・シュワルツの不等式 (4.1) に代入すると

$$\langle \psi | (\Delta\hat{A})^2 | \psi \rangle \, \langle \psi | (\Delta\hat{B})^2 | \psi \rangle \geq \left| \langle \psi | \Delta\hat{A} \, \Delta\hat{B} | \psi \rangle \right|^2 \tag{5.9}$$

を得る。左辺に関しては標準偏差の定義 (5.3) から $\langle \psi | (\Delta\hat{A})^2 | \psi \rangle = \sigma(\hat{A})^2$ である。(5.9) の右辺の中身は

$$\Delta\hat{A} \, \Delta\hat{B} = \frac{1}{2} \{ \Delta\hat{A}, \Delta\hat{B} \} + \frac{1}{2} [\Delta\hat{A}, \Delta\hat{B}] \tag{5.10}$$

と書き直される。ここで

$$\{\hat{C}, \hat{D}\} := \hat{C}\hat{D} + \hat{D}\hat{C}, \tag{5.11}$$

$$[\hat{C}, \hat{D}] := \hat{C}\hat{D} - \hat{D}\hat{C} \tag{5.12}$$

という記法を使った。$\{\Delta\hat{A}, \Delta\hat{B}\}^\dagger = \{\Delta\hat{A}, \Delta\hat{B}\}$，$[\Delta\hat{A}, \Delta\hat{B}]^\dagger = -[\Delta\hat{A}, \Delta\hat{B}]$ となり，$\{\Delta\hat{A}, \Delta\hat{B}\}$ は自己共役，$[\Delta\hat{A}, \Delta\hat{B}]$ は反自己共役なので，$\langle\psi|\{\Delta\hat{A}, \Delta\hat{B}\}|\psi\rangle$ は実数，$\langle\psi|[\Delta\hat{A}, \Delta\hat{B}]|\psi\rangle$ は純虚数になる。従って，

$$\Big|\langle\psi|\Delta\hat{A}\,\Delta\hat{B}|\psi\rangle\Big|^2 \;=\; \frac{1}{4}\langle\psi|\{\Delta\hat{A}, \Delta\hat{B}\}|\psi\rangle^2 + \frac{1}{4}\Big|\langle\psi|[\Delta\hat{A}, \Delta\hat{B}]|\psi\rangle\Big|^2 \tag{5.13}$$

となる。また，

$$[\Delta\hat{A}, \Delta\hat{B}] = [\hat{A}, \hat{B}] \tag{5.14}$$

もわかる。(5.9), (5.13), (5.14) より

$$\sigma(\hat{A})^2\sigma(\hat{B})^2 \;\geq\; \frac{1}{4}\langle\psi|\{\Delta\hat{A}, \Delta\hat{B}\}|\psi\rangle^2 + \frac{1}{4}\Big|\langle\psi|[\Delta\hat{A}, \Delta\hat{B}]|\psi\rangle\Big|^2 \;\geq\; \frac{1}{4}\Big|\langle\psi|[\hat{A}, \hat{B}]|\psi\rangle\Big|^2 \tag{5.15}$$

を得る。両辺の平方根をとると，

$$\sigma(\hat{A})\sigma(\hat{B}) \geq \frac{1}{2}\Big|\langle\psi|[\hat{A}, \hat{B}]|\psi\rangle\Big| \tag{5.16}$$

となり，(5.4) が導かれた。

とくに，$\hat{A} = \hat{Q}$ を位置演算子とし，$\hat{B} = \hat{P}$ を運動量演算子とすると，交換関係は $[\hat{Q}, \hat{P}] = i\hbar\hat{1}$ となるので，(5.16) は，

$$\sigma(\hat{Q})\sigma(\hat{P}) \;\geq\; \frac{1}{2}\hbar \tag{5.17}$$

となる。これは 1927 年にケナードが初めて数学的に厳密に証明した不確定性関係の式である [7]。ただし，ケナードのオリジナルの証明の仕方は上に示した論法とは少し異なる。

ロバートソンの不等式 (5.16) の等号成立条件を考える。これは (5.15) の二つの不等号から導かれたものなので，ロバートソン不等式において等号が成立するためには (5.15) の二つの不等号が同時に等号になればよい。(5.15) の左の不等号はコーシー・シュワルツ不等式に他ならず，その等号成立の必要十分条件は，前節の議論を参照すると，$\Delta\hat{A}|\psi\rangle = 0$ または

$$t\,\Delta\hat{A}|\psi\rangle = \Delta\hat{B}|\psi\rangle \tag{5.18}$$

となる数 $t \in \mathbb{C}$ が存在することである。さらに，(5.15) の右の等号が成立するための必要十分条件は $\langle\psi|\{\Delta\hat{A}, \Delta\hat{B}\}|\psi\rangle = 0$ である。この式と (5.18) が同時に成立すると

$$(t + t^*)\langle\psi|(\Delta\hat{A})^2|\psi\rangle = 0 \tag{5.19}$$

となる。まとめると，以下の (i), (ii), (iii) のいずれかの条件が満たされることがロバートソンの不等式 (5.16) の等号が成立するための必要十分条件である：(i) $t + t^* = 0$ すなわち t が純虚数であり，かつ関係式 (5.18) が成立する，(ii) $\sigma(\hat{A}) = 0$, (iii) $\sigma(\hat{B}) = 0$。これらの

条件のどれかを満たす状態 $|\psi\rangle$ があれば，これを**最小不確定性状態** (minimum uncertainty state) という。とくに条件 (ii) を満たす状態は物理量 $\hat{A}$ の確定値状態，条件 (iii) を満たす状態は物理量 $\hat{B}$ の確定値状態である。ただし，$\sigma(\hat{A}) \neq 0$, $\sigma(\hat{B}) \neq 0$ と条件 (i) を満たす状態 $|\psi\rangle$ があるとは限らない。

ロバートソンの不等式の物理的内容は次のように言える。同じ系を多数（例えば 100 個）用意し，それらすべてを同じ状態 $|\psi\rangle$ にセットする。それらのうちいくつか（例えば 50 個）の系に対しては物理量 $\hat{A}$ を測定し，測定値データを記録し，その平均値 $\langle\hat{A}\rangle$ と標準偏差（測定値のばらつき具合）$\sigma(\hat{A})$ を求める。残りの系（例えば 50 個）に対しては別の物理量 $\hat{B}$ を測定し，測定値データの平均値 $\langle\hat{B}\rangle$ と標準偏差 $\sigma(\hat{B})$ を求める。ただし，これらの測定は理想的な，誤差ゼロの測定だとする。同じ状態の系に対して誤差ゼロの測定をしているのに，測定ごとに異なった測定値を得るのはおかしいと思われるかもしれないが，量子系の状態をどんなに正確に調整しても，それが持つ物理量の値はゆらいでおり，そのゆらぎを反映しているのが標準偏差 $\sigma(\hat{A})$ である。状態 $|\psi\rangle$ を適切に調整すれば一つの物理量 $\hat{A}$ の標準偏差 $\sigma(\hat{A})$ をゼロに近づけることはできるが，同時に他の物理量 $\hat{B}$ の標準偏差 $\sigma(\hat{B})$ も無制限にゼロに近づけることはできず，ロバートソンの不等式 (5.4) による制約を受ける。つまり，物理量 $\hat{A}, \hat{B}$ の積が非可換（$\hat{A}\hat{B} \neq \hat{B}\hat{A}$ すなわち $[\hat{A}, \hat{B}] = \hat{A}\hat{B} - \hat{B}\hat{A} \neq 0$）の場合，$\hat{A}, \hat{B}$ の標準偏差の積が，交換子 $[\hat{A}, \hat{B}]$ による制約 $\sigma(\hat{A})\sigma(\hat{B}) \geq \frac{1}{2}\big|\langle[\hat{A}, \hat{B}]\rangle\big|$ を受ける。言い換えると，非可換な 2 つの物理量の値のゆらぎを同時に小さくすることはできない。以上がロバートソンの不等式の物理的内容である。

注意してほしいのは，ロバートソンの不等式が適用されるのは，物理量 $\hat{A}$ の測定と $\hat{B}$ の測定を別々に行う状況だということである。そこでは，$\hat{A}$ の測定行為が $\hat{B}$ の値を変えるという関係にはなっていない。物理量 $\hat{A}$ を正確に測ろうとする行為がその系の $\hat{B}$ の値をどれほど乱すかということを問題にするのが，後に記述する小澤の不等式である。

6　シュレーディンガーの不等式

ロバートソンの不等式の証明の途中で，(5.15) から (5.16) に移るとき，$\langle\psi|\{\Delta\hat{A}, \Delta\hat{B}\}|\psi\rangle^2 \geq 0$ であることを使って，この項を省いたのだが，この項を省かずに残した式

$$\sigma(\hat{A})^2\sigma(\hat{B})^2 \;\geq\; \frac{1}{4}\langle\psi|\{\Delta\hat{A}, \Delta\hat{B}\}|\psi\rangle^2 + \frac{1}{4}\Big|\langle\psi|[\hat{A}, \hat{B}]|\psi\rangle\Big|^2 \tag{6.1}$$

は**シュレーディンガーの不等式**と呼ばれることもある [12]。右辺第 1 項を定義どおりに書き換えると

$$\begin{aligned}\langle\psi|\{\Delta\hat{A}, \Delta\hat{B}\}|\psi\rangle &= \langle\psi|\Big((\hat{A} - \langle\hat{A}\rangle)(\hat{B} - \langle\hat{B}\rangle) + (\hat{B} - \langle\hat{B}\rangle)(\hat{A} - \langle\hat{A}\rangle)\Big)|\psi\rangle \\ &= \langle\psi|\Big(\hat{A}\hat{B} + \hat{B}\hat{A}\Big)|\psi\rangle - 2\langle\psi|\hat{A}|\psi\rangle \cdot \langle\psi|\hat{B}|\psi\rangle \end{aligned} \tag{6.2}$$

となり，

$$\frac{1}{2}\langle\{\Delta\hat{A}, \Delta\hat{B}\}\rangle \;=\; \frac{1}{2}\langle\{\hat{A}, \hat{B}\}\rangle - \langle\hat{A}\rangle \cdot \langle\hat{B}\rangle \tag{6.3}$$

とも書ける。物理量 $\hat{A}$ の測定値が平均値 $\langle\hat{A}\rangle$ の周りでゆらぎ，$\hat{B}$ の測定値も平均値 $\langle\hat{B}\rangle$ の周りでゆらぐが，両者のゆらぎが連動している度合いを示す指標が，この量 $\frac{1}{2}\langle\{\Delta\hat{A},\Delta\hat{B}\}\rangle$ であり，これは $\hat{A}$ と $\hat{B}$ の相関とか**共分散** (covariance) とも呼ばれる。

7　小澤の不等式：誤差と擾乱

測定とは，測定される系だけで完結する出来事ではなく，測定されるもの（対象系または被測定系）と測定器とを相互作用させて，測定器に起こる変化を読み取ることによって被測定系の状態を推測する作業である。

ロバートソンの不等式は，測定される量子系に内在する不確定性を表現しているのに対して，いまから示す小澤の不等式は，被測定系と測定器の相互作用を通して物理量の値を顕在化させようとするときの不確定性を表すものである。

普遍的に成り立つ不確定性関係を述べるためには，測定操作をできるだけ一般的に定式化する必要がある。そのような理論は**間接測定のモデル** (model of indirect measurement) と呼ばれる [83]。適切な記号と概念を導入して間接測定モデルを定式化しよう。

このモデルでは，測定される系（対象系）も測定する系（測定器）も量子力学の枠組みで記述される。$\mathscr{H}$ を対象系（被測定系）のヒルベルト空間とし，$|\psi\rangle\in\mathscr{H}$ を対象系の初期状態を表すベクトルとする。また，$\mathscr{K}$ を測定器のヒルベルト空間とし，$|\xi\rangle\in\mathscr{K}$ を測定器の初期状態を表すベクトルとする。そうすると，対象系と測定器とを併せた全体系の初期状態はテンソル積ベクトル $|\psi\otimes\xi\rangle\in\mathscr{H}\otimes\mathscr{K}$ で表される。$\hat{I}$ で $\mathscr{H}$ 上もしくは $\mathscr{K}$ 上の恒等演算子を表す。

ある時刻における対象系の物理量 $\hat{A}$ の値を知るために，対象系と測定器とを時間 t の間だけ相互作用させて，測定器の物理量 $\hat{M}$ の値を読み取って，$\hat{A}$ の値に対する推定値とする。時間 t の経過による対象系と測定器の時間発展を表す，$\mathscr{H}\otimes\mathscr{K}$ に作用するユニタリ演算子を $\hat{U}(t)$ とする。時間 t が経過したとき，メーター物理量は $\hat{M}(t)=\hat{U}^\dagger(t)(\hat{I}\otimes\hat{M})\hat{U}(t)$ に変化する。この $\hat{M}(t)$ の値を状態ベクトル $|\psi\otimes\xi\rangle$ に対して読み取ることが測定である。

正確な測定とは，本来測りたかった $\hat{A}$ の値と，読み取った $\hat{M}(t)$ の測定値とが一致するような測定である。しかし，実際の測定には多少の誤差があり，両者の差

$$\hat{E}:=\hat{M}(t)-\hat{A}\otimes\hat{I} \tag{7.1}$$

はゼロではない。$\hat{E}$ を**誤差演算子** (error operator) と呼ぶ。アーサーズとグッドマン [62] や小澤 [79] はこれを noise operator と呼んでいるが,「noise operator の期待値を error と呼ぶ」よりは,「error operator の期待値を error と呼ぶ」ほうが筋がよいような気がするし，noise だと系の外から混入した雑音・擾乱（かくらん）のようなニュアンスがあるが，いま議論しているのは，対象系と測定器とが閉じた系をなして自律的に動く場合でも狙い通りには測定器が動かないことから生ずる誤差なのだから，やはり noise ではなく error と呼ぶべきだと思われる。誤差演算子 $\hat{E}$ の 2 乗平均の平方根

$$\varepsilon(\hat{A}):=\sqrt{\langle\psi\otimes\xi|(\hat{E})^2|\psi\otimes\xi\rangle}=\sqrt{\langle\psi\otimes\xi|(\hat{M}(t)-\hat{A})^2|\psi\otimes\xi\rangle} \tag{7.2}$$

を $\hat{A}$ の**測定誤差** (error) と定める [79]。

一方で，対象系の他の物理量 $\hat{B}$ も測定過程の後には $\hat{B}(t) = \hat{U}^{\dagger}(t)(\hat{B} \otimes \hat{I})\hat{U}(t)$ に変化する。この変化の大きさ

$$\hat{D} := \hat{B}(t) - \hat{B} \otimes \hat{I} \tag{7.3}$$

を**擾乱**（じょうらん）**演算子** (disturbance operator) と呼び，その 2 乗平均の平方根

$$\eta(\hat{B}) := \sqrt{\langle \psi \otimes \xi | (\hat{D})^2 | \psi \otimes \xi \rangle} = \sqrt{\langle \psi \otimes \xi | (\hat{B}(t) - \hat{B})^2 | \psi \otimes \xi \rangle} \tag{7.4}$$

を $\hat{B}$ が受ける**擾乱** (disturbance) と定める [79]。

また，以前と同様に，物理量 $\hat{A}$ の標準偏差を

$$\sigma(\hat{A}) = \sqrt{\langle \psi \otimes \xi | (\hat{A} - \langle \hat{A} \rangle)^2 | \psi \otimes \xi \rangle} = \sqrt{\langle \psi \otimes \xi | \hat{A}^2 | \psi \otimes \xi \rangle - \langle \psi \otimes \xi | \hat{A} | \psi \otimes \xi \rangle^2} \tag{7.5}$$

と定める。

以上の記法を使って，**小澤の不等式** (inequality of Ozawa) [80] は

$$\varepsilon(\hat{A})\eta(\hat{B}) + \varepsilon(\hat{A})\sigma(\hat{B}) + \sigma(\hat{A})\eta(\hat{B}) \geq \frac{1}{2}\left| \langle [\hat{A}, \hat{B}] \rangle \right| \tag{7.6}$$

と書かれる。この不等式は**誤差と擾乱の不確定性関係** (uncertainty relation between error and disturbance) とも呼ばれる。とくに $\hat{A} = \hat{Q}$（位置演算子），$\hat{B} = \hat{P}$（運動量演算子）とおいた場合は，$[\hat{Q}, \hat{P}] = i\hbar$ から

$$\varepsilon(\hat{Q})\eta(\hat{P}) + \varepsilon(\hat{Q})\sigma(\hat{P}) + \sigma(\hat{Q})\eta(\hat{P}) \geq \frac{1}{2}\hbar \tag{7.7}$$

となる [81]。

任意の物理量に対する不等式 (7.6) を証明しよう。誤差演算子と擾乱演算子の定義式 (7.1), (7.3) を

$$\hat{U}^{\dagger}(\hat{I} \otimes \hat{M})\hat{U} = \hat{E} + \hat{A} \tag{7.8}$$

$$\hat{U}^{\dagger}(\hat{B} \otimes \hat{I})\hat{U} = \hat{D} + \hat{B} \tag{7.9}$$

と書き換える。また，$\hat{I} \otimes \hat{M}$ と $\hat{B} \otimes \hat{I}$ は可換なので，$\hat{U}^{\dagger}(\hat{I} \otimes \hat{M})\hat{U}$ と $\hat{U}^{\dagger}(B \otimes \hat{I})\hat{U}$ は可換。したがって

$$\begin{aligned} 0 &= \hat{U}^{\dagger}\,[(\hat{I} \otimes \hat{M}),\, (\hat{B} \otimes \hat{I})]\,\hat{U} \\ &= [\hat{U}^{\dagger}(\hat{I} \otimes \hat{M})\hat{U},\, \hat{U}^{\dagger}(\hat{B} \otimes \hat{I})\hat{U}] \\ &= [\hat{E} + \hat{A},\, \hat{D} + \hat{B}] \\ &= [\hat{E}, \hat{D}] + [\hat{E}, \hat{B}] + [\hat{A}, \hat{D}] + [\hat{A}, \hat{B}]. \end{aligned} \tag{7.10}$$

$[\hat{A}, \hat{B}]$ の項を移項して，状態 $|\psi \otimes \xi\rangle \in \mathscr{H} \otimes \mathscr{K}$ について両辺の期待値をとると

$$\langle [\hat{E}, \hat{D}] \rangle + \langle [\hat{E}, \hat{B}] \rangle + \langle [\hat{A}, \hat{D}] \rangle = -\langle [\hat{A}, \hat{B}] \rangle. \tag{7.11}$$

さらに絶対値をとると，任意の複素数 a, b に対して $|a| + |b| \geq |a+b|$ が成り立つから，

$$\left|\langle[\hat{E}, \hat{D}]\rangle\right| + \left|\langle[\hat{E}, \hat{B}]\rangle\right| + \left|\langle[\hat{A}, \hat{D}]\rangle\right| \geq \left|\langle[\hat{A}, \hat{B}]\rangle\right|. \tag{7.12}$$

これとロバートソンの不等式 (5.4) から

$$\sigma(\hat{E})\sigma(\hat{D}) + \sigma(\hat{E})\sigma(\hat{B}) + \sigma(\hat{A})\sigma(\hat{D}) \geq \frac{1}{2}\left|\langle[\hat{A}, \hat{B}]\rangle\right|. \tag{7.13}$$

さらに，

$$\varepsilon(\hat{A})^2 = \langle\hat{E}^2\rangle \;\geq\; \langle\hat{E}^2\rangle - \langle\hat{E}\rangle^2 = \sigma(\hat{E})^2 \tag{7.14}$$

$$\eta(\hat{B})^2 = \langle\hat{D}^2\rangle \;\geq\; \langle\hat{D}^2\rangle - \langle\hat{D}\rangle^2 = \sigma(\hat{D})^2 \tag{7.15}$$

だから，

$$\begin{aligned}
&\varepsilon(\hat{A})\eta(\hat{B}) + \varepsilon(\hat{A})\sigma(\hat{B}) + \sigma(\hat{A})\eta(\hat{B}) \\
&\geq\; \sigma(\hat{E})\sigma(\hat{D}) + \sigma(\hat{E})\sigma(\hat{B}) + \sigma(\hat{A})\sigma(\hat{D}) \;\geq\; \frac{1}{2}\left|\langle[\hat{A}, \hat{B}]\rangle\right|
\end{aligned} \tag{7.16}$$

が成り立つ。これが小澤の不等式 (7.6) である。

8　アーサーズ・グッドマンの不等式：同時測定の誤差

ロバートソンの不等式は，2 つの非可換な物理量に内在するゆらぎの関係式であった。ロバートソンの不等式の定式化は，測定器のありようを問題にしていないし，対象系から測定器にどれくらい忠実に物理量の値が写し取られるか，また，その際，どの程度の誤差が生じるかということは，まったく検討していない。

そこで，対象系に測定器をあてがって，測定器に属する 2 種類の物理量 $\hat{M}_A$ と $\hat{M}_B$ を読み取り，対象系に属する 2 種類の物理量 $\hat{A}$ と $\hat{B}$ の値を推定しようという問題設定を考える。対象系と測定器の初期状態ベクトルはそれぞれ $|\psi\rangle \in \mathscr{H}$ と $|\xi\rangle \in \mathscr{K}$ とし，合成系の状態ベクトル $|\psi \otimes \xi\rangle$ をユニタリ演算子 $\hat{U}$ によって時間変化させ，その後，測定器の物理量 $\hat{M}_A$ と $\hat{M}_B$ を読み取ろうというわけだ。このとき，2 種類の誤差演算子を

$$\hat{E}_A \;:=\; \hat{U}^\dagger(\hat{I} \otimes \hat{M}_A)\hat{U} - \hat{A} \otimes \hat{I}, \tag{8.1}$$

$$\hat{E}_B \;:=\; \hat{U}^\dagger(\hat{I} \otimes \hat{M}_B)\hat{U} - \hat{B} \otimes \hat{I} \tag{8.2}$$

と定める。$[\hat{M}_A, \hat{M}_B] = 0$ と仮定する。また，対象系の任意のベクトル $|\psi\rangle$ に対して

$$\langle\psi \otimes \xi|\hat{E}_A|\psi \otimes \xi\rangle = 0, \qquad \langle\psi \otimes \xi|\hat{E}_B|\psi \otimes \xi\rangle = 0 \tag{8.3}$$

が成り立つことを要請する。言い換えると，任意のベクトル $|\psi\rangle$ に対して

$$\langle\psi \otimes \xi|\hat{U}^\dagger(\hat{I} \otimes \hat{M}_A)\hat{U}|\psi \otimes \xi\rangle \;=\; \langle\psi \otimes \xi|\hat{A} \otimes \hat{I}|\psi \otimes \xi\rangle, \tag{8.4}$$

$$\langle\psi \otimes \xi|\hat{U}^\dagger(\hat{I} \otimes \hat{M}_B)\hat{U}|\psi \otimes \xi\rangle \;=\; \langle\psi \otimes \xi|\hat{B} \otimes \hat{I}|\psi \otimes \xi\rangle \tag{8.5}$$

が成り立っていることを仮定する。$\hat{M}_A$ は物理量 $\hat{A}$ の値を推定するためのメーターのような役割をする物理量である。できればメーター $\hat{M}_A$ の読み取り値が $\hat{A}$ の値と一致してほしいのだが，一回の測定では $\hat{M}_A$ の値が $\hat{A}$ の値と等しいとは限らない。それでも，測定を繰り返せば，$\hat{M}_A$ の読み取り値の平均は $\hat{A}$ の平均値と等しくなっていてほしい。対象系がどのような状態 $|\psi\rangle$ になっていたとしても，この意味での測定を成功させたい。式 (8.3), (8.4) はこのような要請を表しており，この要請が満たされるとき，$\hat{M}_A$ は $\hat{A}$ に対する**不偏推定量** (unbiased estimator) になっているという。また，一般に，もとの物理量 $\hat{A}$ の値の分散 $\sigma(\hat{A})^2$ よりもメーターの読み取り値の分散 $\sigma(\hat{U}^\dagger \hat{M}_A \hat{U})^2$ の方が大きくなることが示される。その差分

$$\mathcal{E}_{\mathrm{AG}}(\hat{A})^2 \;\; := \;\; \sigma(\hat{U}^\dagger \hat{M}_A \hat{U})^2 - \sigma(\hat{A})^2 \tag{8.6}$$

を**アーサーズ・グッドマンの誤差**という。

以上の設定の下で不等式

$$\mathcal{E}_{\mathrm{AG}}(\hat{A}) \cdot \mathcal{E}_{\mathrm{AG}}(\hat{B}) \;\; \geq \;\; \frac{1}{2}\left|\langle[\hat{A}, \hat{B}]\rangle\right| \tag{8.7}$$

および

$$\sigma(\hat{U}^\dagger \hat{M}_A \hat{U}) \cdot \sigma(\hat{U}^\dagger \hat{M}_B \hat{U}) \;\; \geq \;\; \left|\langle[\hat{A}, \hat{B}]\rangle\right| \tag{8.8}$$

が成立する。これら (8.7), (8.8) を**アーサーズ・グッドマンの不等式** (inequality of Arthurs and Goodman) という [62]。

アーサーズ・グッドマンの不等式を証明しよう。アーサーズとグッドマンが論文に示した証明はわかりづらいが，渡辺優が見通しのよい証明を与えているので [130]，それを参照して証明を述べる。誤差演算子の定義 (8.1) より

$$\hat{U}^\dagger(\hat{I} \otimes \hat{M}_A)\hat{U} \;=\; \hat{A} + \hat{E}_A \tag{8.9}$$

であり，

$$(\hat{U}^\dagger(\hat{I} \otimes \hat{M}_A)\hat{U})^2 \;=\; \hat{A}^2 + \hat{A}\hat{E}_A + \hat{E}_A\hat{A} + \hat{E}_A^2 \tag{8.10}$$

であるが，条件 (8.3) の $\langle\psi \otimes \xi|\hat{E}_A|\psi \otimes \xi\rangle = 0$ が任意の $|\psi\rangle$ に対して成り立つことから，

$$\langle\xi|\hat{E}_A|\xi\rangle = 0 \tag{8.11}$$

が言える。ゆえに

$$\langle\psi \otimes \xi|(\hat{U}^\dagger(\hat{I} \otimes \hat{M}_A)\hat{U})^2|\psi \otimes \xi\rangle \;=\; \langle\psi \otimes \xi|\hat{A}^2|\psi \otimes \xi\rangle + \langle\psi \otimes \xi|\hat{E}_A^2|\psi \otimes \xi\rangle \tag{8.12}$$

が成り立つ。また，(8.9) と (8.3) から

$$\begin{aligned}\langle\psi \otimes \xi|\hat{U}^\dagger(\hat{I} \otimes \hat{M}_A)\hat{U}|\psi \otimes \xi\rangle \;\; &= \;\; \langle\psi \otimes \xi|\hat{A}|\psi \otimes \xi\rangle + \langle\psi \otimes \xi|\hat{E}_A|\psi \otimes \xi\rangle \\ &= \;\; \langle\psi \otimes \xi|\hat{A}|\psi \otimes \xi\rangle \end{aligned} \tag{8.13}$$

である。条件 (8.3) より $\sigma(\hat{E}_A)^2 = \langle \hat{E}_A^2 \rangle - \langle \hat{E}_A \rangle^2 = \langle \hat{E}_A^2 \rangle$ だから，(8.12), (8.13) より

$$\begin{aligned}\sigma(\hat{U}^\dagger \hat{M}_A \hat{U})^2 &:= \langle \psi \otimes \xi | (\hat{U}^\dagger (\hat{I} \otimes \hat{M}_A) \hat{U})^2 | \psi \otimes \xi \rangle - \langle \psi \otimes \xi | \hat{U}^\dagger (\hat{I} \otimes \hat{M}_A) \hat{U} | \psi \otimes \xi \rangle^2 \\ &= \langle \hat{A}^2 \rangle + \langle \hat{E}_A^2 \rangle - \langle \hat{A} \rangle^2 \\ &= \sigma(\hat{A})^2 + \sigma(\hat{E}_A)^2 \end{aligned} \tag{8.14}$$

が成り立つ。つまり，メーターの読み取り値の分散 $\sigma(\hat{U}^\dagger \hat{M}_A \hat{U})^2$ は，もとの物理量の値の分散 $\sigma(\hat{A})^2$ よりも 2 乗誤差 $\sigma(\hat{E}_A)^2 = \langle \hat{E}_A^2 \rangle$ の分だけ大きくなっている。この分散の増分の平方根

$$\mathcal{E}_{\mathrm{AG}}(\hat{A}) \ := \ \sqrt{\sigma(\hat{U}^\dagger \hat{M}_A \hat{U})^2 - \sigma(\hat{A})^2} \tag{8.15}$$

をアーサーズ・グッドマンの誤差と呼んだ。(8.14) までの計算は

$$\mathcal{E}_{\mathrm{AG}}(\hat{A}) = \sigma(\hat{E}_A) \tag{8.16}$$

を示したことになっている。同様にして，

$$\langle \xi | \hat{E}_B | \xi \rangle = 0 \tag{8.17}$$

と

$$\mathcal{E}_{\mathrm{AG}}(\hat{B}) \ := \ \sqrt{\sigma(\hat{U}^\dagger \hat{M}_B \hat{U})^2 - \sigma(\hat{B})^2} \ = \ \sigma(\hat{E}_B) \tag{8.18}$$

も示される。また，$[\hat{M}_A, \hat{M}_B] = 0$ という仮定と (8.1), (8.2) より

$$0 \ = \ \hat{U}^\dagger [\hat{M}_A, \hat{M}_B] \hat{U} \ = \ [\hat{A}, \hat{B}] + [\hat{A}, \hat{E}_B] + [\hat{E}_A, \hat{B}] + [\hat{E}_A, \hat{E}_B] \tag{8.19}$$

であり，これから

$$-[\hat{E}_A, \hat{E}_B] \ = \ [\hat{A}, \hat{B}] + [\hat{A}, \hat{E}_B] + [\hat{E}_A, \hat{B}] \tag{8.20}$$

が従う。これと (8.11), (8.17) から

$$\langle \psi \otimes \xi | [\hat{E}_A, \hat{E}_B] | \psi \otimes \xi \rangle \ = \ -\langle \psi \otimes \xi | [\hat{A}, \hat{B}] | \psi \otimes \xi \rangle \tag{8.21}$$

が言える。式 (8.16), (8.18) と，ロバートソンの不等式 (5.4) と，いまの式 (8.21) から

$$\mathcal{E}_{\mathrm{AG}}(\hat{A}) \cdot \mathcal{E}_{\mathrm{AG}}(\hat{B}) \ = \ \sigma(\hat{E}_A) \cdot \sigma(\hat{E}_B) \ \geq \ \frac{1}{2} \Big| \langle [\hat{E}_A, \hat{E}_B] \rangle \Big| \ = \ \frac{1}{2} \Big| \langle [\hat{A}, \hat{B}] \rangle \Big| \tag{8.22}$$

が導かれる。こうして (8.7) が導かれた。さらに，

$$\sqrt{\sigma(\hat{A})^2 + \sigma(\hat{E}_A)^2} \cdot \sqrt{\sigma(\hat{B})^2 + \sigma(\hat{E}_B)^2} \geq \sigma(\hat{A})\sigma(\hat{B}) + \sigma(\hat{E}_A)\sigma(\hat{E}_B) \tag{8.23}$$

という形のコーシー・シュワルツ不等式に (8.14), (8.18) と，ロバートソンの不等式 (5.4) と，(8.21) を適用すると

$$\begin{aligned}\sigma(\hat{U}^\dagger \hat{M}_A \hat{U}) \cdot \sigma(\hat{U}^\dagger \hat{M}_B \hat{U}) &\geq \sigma(\hat{A})\sigma(\hat{B}) + \sigma(\hat{E}_A)\sigma(\hat{E}_B) \\ &\geq \frac{1}{2} \Big| \langle [\hat{A}, \hat{B}] \rangle \Big| + \frac{1}{2} \Big| \langle [\hat{E}_A, \hat{E}_B] \rangle \Big| \\ &= \Big| \langle [\hat{A}, \hat{B}] \rangle \Big| \end{aligned} \tag{8.24}$$

を得る。これでアーサーズ・グッドマンの不等式 (8.8) も証明できた。

アーサーズ・グッドマンの不等式の物理的意味を検討しよう。アーサーズ・グッドマンの誤差 (8.6), $\mathcal{E}_{\mathrm{AG}}(\hat{A})^2 = \sigma(\hat{U}^\dagger \hat{M}_A \hat{U})^2 - \sigma(\hat{A})^2$ は，物理量の真の値の分散に比べて測定値の分散が大きくなった増加分である。つまり，測定過程によって生じた誤差の増分を表している。不等式 (8.7) は，対象系の物理量 $\hat{A}, \hat{B}$ をメーター物理量 $\hat{M}_A, \hat{M}_B$ を用いて一斉に測定しようとするとき，$\hat{A}, \hat{B}$ の非可換性から来る測定誤差を免れないことを意味している。一方の測定誤差を小さくすると他方の測定誤差が大きくなるという，ある種のトレードオフの関係を表している。小澤の不等式 (7.6) が誤差と擾乱の関係であったのに対して，アーサーズ・グッドマンの不等式 (8.7) は誤差同士の関係である。

また，不等式 (8.8) は，2 つのメーター物理量 $\hat{M}_A, \hat{M}_B$ の読み取り値の標準偏差についての関係式である。ロバートソンの不等式 (5.4) は対象系の物理量 $\hat{A}, \hat{B}$ の値の標準偏差の積についての関係式だが，(5.4) に比べて (8.8) は右辺の係数が 2 倍になっている。つまり，一般に，対象系における不確定性よりも，測定値における不確定性の方が大きいことを意味している。

9　小澤の第二不等式：同時測定の誤差

2 つの物理量を 2 つのメーターを通して測定するときには，アーサーズ・グッドマンが定義した誤差 (8.15) に関する不確定性関係が成り立つが，小澤が定義した誤差 (7.2) に関しても別の不確定性関係が成り立つ。しかも，アーサーズ・グッドマンの不等式は，メーター物理量がすべての状態に対する不偏推定量になっているというかなり強い仮定 (8.3) の下で成立するが，この節で述べる同時測定の誤差に関する小澤の不等式は，$[\hat{M}_A, \hat{M}_B] = 0$ という仮定以外に特別な仮定なしに成り立つという長所がある。

第 7 節と同じ記法 (7.2), (7.5) を用いた不等式

$$\varepsilon(\hat{A})\varepsilon(\hat{B}) + \varepsilon(\hat{A})\sigma(\hat{B}) + \sigma(\hat{A})\varepsilon(\hat{B}) \geq \frac{1}{2}\left|\langle[\hat{A}, \hat{B}]\rangle\right| \tag{9.1}$$

が成り立つ [82]。この不等式は**同時測定における誤差のトレードオフ関係** (trade-off relation in simultaneous measurement errors) とも呼ばれる。

不等式 (9.1) は，(7.6) とほとんど同様に証明できる。いちおうその証明を書いておく。(7.1) で導入したように，2 つの誤差演算子を

$$\hat{E}_A := \hat{U}^\dagger(\hat{I} \otimes \hat{M}_A)\hat{U} - \hat{A} \otimes \hat{I} \tag{9.2}$$

$$\hat{E}_B := \hat{U}^\dagger(\hat{I} \otimes \hat{M}_B)\hat{U} - \hat{B} \otimes \hat{I} \tag{9.3}$$

と定める。$[\hat{M}_A, \hat{M}_B] = 0$ なので

$$0 = \hat{U}^\dagger[\hat{M}_A, \hat{M}_B]\hat{U} = [\hat{A}, \hat{B}] + [\hat{A}, \hat{E}_B] + [\hat{E}_A, \hat{B}] + [\hat{E}_A, \hat{E}_B] \tag{9.4}$$

が成り立ち，ゆえに

$$[\hat{E}_A, \hat{E}_B] + [\hat{E}_A, \hat{B}] + [\hat{A}, \hat{E}_B] = -[\hat{A}, \hat{B}], \tag{9.5}$$

したがって，状態 $|\psi\otimes\xi\rangle$ における期待値の絶対値に関して

$$\left|\langle[\hat{E}_A,\hat{E}_B]\rangle\right| + \left|\langle[\hat{E}_A,\hat{B}]\rangle\right| + \left|\langle[\hat{A},\hat{E}_B]\rangle\right| \ \geq\ \left|\langle[\hat{A},\hat{B}]\rangle\right| \tag{9.6}$$

が成り立つ。これとロバートソンの不等式 (5.4) から

$$\sigma(\hat{E}_A)\sigma(\hat{E}_B)+\sigma(\hat{E}_A)\sigma(\hat{B})+\sigma(\hat{A})\sigma(\hat{E}_B) \geq \frac{1}{2}\left|\langle[\hat{A},\hat{B}]\rangle\right|. \tag{9.7}$$

さらに，

$$\varepsilon(\hat{A})^2 = \langle\hat{E}_A^2\rangle \ \geq\ \langle\hat{E}_A^2\rangle - \langle\hat{E}_A\rangle^2 = \sigma(\hat{E}_A)^2 \tag{9.8}$$

かつ，$\varepsilon(\hat{B})^2 \geq \sigma(\hat{E}_B)^2$ だから，

$$\varepsilon(\hat{A})\varepsilon(\hat{B})+\varepsilon(\hat{A})\sigma(\hat{B})+\sigma(\hat{A})\varepsilon(\hat{B}) \geq \frac{1}{2}\left|\langle[\hat{A},\hat{B}]\rangle\right| \tag{9.9}$$

が成り立つ。こうして (9.1) が確かめられた。

10　ブランシアードの不等式

小澤の不等式は数学的に証明されているのだから，もちろん数学的に正しいのだが，最もタイト (tight) な不等式なのかどうかわからない。タイトとはどういうことかというと，例えば，実数変数 x に対して不等式 $x^2 \geq -1$ はつねに真だが，x の値をどう選んでも等号が成立することはない。$x^2 \geq c$ という形の不等式が恒真であるような c の上限値は $c=0$ である。そういう意味で，$x^2 \geq -1$ はタイトではなく，$x^2 \geq 0$ は最強にタイトである。

小澤の不等式の証明は，何重もの不等式の連鎖 $a \geq b$, $b \geq c$, $c \geq d$ から最終的な不等式 $a \geq d$ を導くような推論になっている。等式 $a=d$ が成立するためには $a=b=c=d$ の等号すべてが成立する必要があり，すべての等号が成立することがあるかどうか明らかではない。自明な場合しか等号が成立しないのであれば，小澤の不等式はタイトとは言えない。

そこで，小澤の不等式の等号成立の必要十分条件を明らかにするか，または，小澤が定義した誤差と擾乱の関数でなるべくタイトな不等式を見つけることが課題となる。ブランシアードは，小澤の不等式に替わる最もタイトな不等式を見い出し，その等号成立条件も明らかにした [120]。それが

$$\varepsilon^2(\hat{A})\sigma^2(\hat{B})+\sigma^2(\hat{A})\eta^2(\hat{B})+2\varepsilon(\hat{A})\eta(\hat{B})\sqrt{\sigma^2(\hat{A})\sigma^2(\hat{B})-C^2} \ \geq\ C^2 \tag{10.1}$$

という不等式である。ただし

$$C := \frac{1}{2i}\langle[\hat{A},\hat{B}]\rangle \tag{10.2}$$

とおいた。(10.1) を**ブランシアードの不等式** (inequality of Branciard) と呼ぶ。とくにロバートソンの不等式 (5.16) の等号 $\sigma(\hat{A})\sigma(\hat{B}) = |C|$ が成立する最小不確定性状態においては，ブランシアードの不等式は

$$\left(\frac{\varepsilon(\hat{A})}{\sigma(\hat{A})}\right)^2 + \left(\frac{\eta(\hat{B})}{\sigma(\hat{B})}\right)^2 \ \geq\ 1 \tag{10.3}$$

となる。つまり，標準偏差で規格化された誤差と擾乱が，半径 1 の円の外にあるべしという不等式になる。

ブランシアードの不等式の証明はいくぶん複雑である。複素数を係数とするヒルベルト空間と実数を係数とするユークリッド空間との関係を微妙に使いこなすのがブランシアードの証明方法である。そのためにいくらか準備をする。なお，ブランシアードの原論文 [120] とは若干異なった記法を用いる。

ヒルベルト空間のベクトルは適当な基底を用いれば複素数を並べた数ベクトルで表される：

$$|\chi\rangle = \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ \vdots \\ w_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_1 + iv_1 \\ u_2 + iv_2 \\ \vdots \\ u_n + iv_n \end{pmatrix}, \qquad |\phi\rangle = \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ \vdots \\ z_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 + iy_1 \\ x_2 + iy_2 \\ \vdots \\ x_n + iy_n \end{pmatrix}. \tag{10.4}$$

こういう書き方もする：

$$\mathrm{Re}\,|\phi\rangle = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \qquad \mathrm{Im}\,|\phi\rangle = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}, \qquad |\phi\rangle = \mathrm{Re}\,|\phi\rangle + i\,\mathrm{Im}\,|\phi\rangle. \tag{10.5}$$

縦ベクトルを転置して横ベクトルを定める：

$$(\mathrm{Re}\,|\phi\rangle)^\top = (x_1, x_2, \cdots, x_n), \qquad (\mathrm{Im}\,|\phi\rangle)^\top = (y_1, y_2, \cdots, y_n), \tag{10.6}$$

$$\langle\phi| = (\mathrm{Re}\,|\phi\rangle)^\top - i(\mathrm{Im}\,|\phi\rangle)^\top. \tag{10.7}$$

ここでは有限次元のベクトルであるかのように書いたが，無限次元でもかまわない。さらに，

$$\vec{\chi} = \begin{pmatrix} -\mathrm{Im}\,|\chi\rangle \\ \mathrm{Re}\,|\chi\rangle \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -v_1 \\ -v_2 \\ \vdots \\ -v_n \\ u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix}, \qquad \vec{\phi} = \begin{pmatrix} \mathrm{Re}\,|\phi\rangle \\ \mathrm{Im}\,|\phi\rangle \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \\ y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \tag{10.8}$$

という記法も導入する。そうすると，

$$\begin{aligned} \langle\chi|\phi\rangle &= (\mathrm{Re}|\chi\rangle - i\,\mathrm{Im}|\chi\rangle)^\top(\mathrm{Re}|\phi\rangle + i\,\mathrm{Im}|\phi\rangle) \\ &= (\mathrm{Re}|\chi\rangle)^\top(\mathrm{Re}|\phi\rangle) + (\mathrm{Im}|\chi\rangle)^\top(\mathrm{Im}|\phi\rangle) \\ &\quad -i(\mathrm{Im}|\chi\rangle)^\top(\mathrm{Re}|\phi\rangle) + i(\mathrm{Re}|\chi\rangle)^\top(\mathrm{Im}|\phi\rangle) \end{aligned} \tag{10.9}$$

となり，ユークリッド空間の内積とヒルベルト空間の内積が

$$\vec{\phi}\cdot\vec{\phi} = (\mathrm{Re}|\phi\rangle)^\top(\mathrm{Re}|\phi\rangle) + (\mathrm{Im}|\phi\rangle)^\top(\mathrm{Im}|\phi\rangle) = \langle\phi|\phi\rangle \tag{10.10}$$

$$\vec{\chi}\cdot\vec{\phi} = -(\mathrm{Im}|\chi\rangle)^\top(\mathrm{Re}|\phi\rangle) + (\mathrm{Re}|\chi\rangle)^\top(\mathrm{Im}|\phi\rangle) = \mathrm{Im}\langle\chi|\phi\rangle = \frac{1}{2i}\Big(\langle\chi|\phi\rangle - \langle\phi|\chi\rangle\Big) \tag{10.11}$$

のように関係づけられる。とくに自己共役演算子 $\hat{A}$, $\hat{B}$ に関して $|\chi\rangle = \hat{A}|\psi\rangle$, $|\phi\rangle = \hat{B}|\psi\rangle$ である場合,

$$\vec{\chi}\cdot\vec{\phi} = \frac{1}{2i}\left(\langle\hat{A}\psi|\hat{B}\psi\rangle - \langle\hat{B}\psi|\hat{A}\psi\rangle\right) = \frac{1}{2i}\langle\psi|(\hat{A}\hat{B}-\hat{B}\hat{A})|\psi\rangle \tag{10.12}$$

が成り立つ。

ブランシアードの不等式の証明の過程で使う 2 つの不等式を導入する。ユークリッド空間の単位ベクトル $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{x}$, $\vec{y}$ について，$\vec{a}\cdot\vec{b} = \gamma$ とおき,

$$a_\perp := \sqrt{1-(\vec{a}\cdot\vec{x})^2}, \qquad b_\perp := \sqrt{1-\left(\vec{b}\cdot\vec{y}\right)^2} \tag{10.13}$$

とおくと，$\vec{x}\cdot\vec{y} = 0$ ならば

$$a_\perp^2 + b_\perp^2 + 2\sqrt{1-\gamma^2}\,a_\perp b_\perp \;\;\geq\;\; \gamma^2 \tag{10.14}$$

が成り立つ。また，単位ベクトルとは限らないが互いに直交するベクトル $\vec{X}$, $\vec{Y}$ について

$$\|\vec{a}-\vec{X}\|^2 + \|\vec{b}-\vec{Y}\|^2 + 2\sqrt{1-\gamma^2}\,\|\vec{a}-\vec{X}\|\cdot\|\vec{b}-\vec{Y}\| \;\;\geq\;\; \gamma^2 \tag{10.15}$$

が成り立つ。不等式 (10.14), (10.15) をブランシアードの補題と呼ぶ。

ブランシアードの補題 (10.14) を証明しよう。$\vec{a}\cdot\vec{b} = \gamma$ について $|\gamma| \neq 1$ ならば

$$\vec{a}_\perp^{(b)} := \frac{1}{\sqrt{1-\gamma^2}}\left(\vec{b} - \gamma\vec{a}\right) \tag{10.16}$$

とおく。このとき $\|\vec{a}_\perp^{(b)}\| = 1$ である。もしも $|\gamma| = 1$ ならば $\vec{a}_\perp^{(b)} = 0$ とおく。いずれにしても

$$\vec{b} = \gamma\vec{a} + \sqrt{1-\gamma^2}\,\vec{a}_\perp^{(b)}, \qquad\qquad \vec{a}\cdot\vec{a}_\perp^{(b)} = 0 \tag{10.17}$$

が成り立つ。また，$(\vec{a}\cdot\vec{x})^2 \neq 1$ ならば

$$\vec{a}_\perp^{(x)} := \frac{1}{\sqrt{1-(\vec{a}\cdot\vec{x})^2}}\left(\vec{x} - (\vec{a}\cdot\vec{x})\,\vec{a}\right) \tag{10.18}$$

とおく。このとき $\|\vec{a}_\perp^{(x)}\| = 1$ である。もしも $(\vec{a}\cdot\vec{x})^2 = 1$ ならば $\vec{a}_\perp^{(x)} = 0$ とおく。いずれにしても

$$\vec{x} = (\vec{a}\cdot\vec{x})\,\vec{a} + \sqrt{1-(\vec{a}\cdot\vec{x})^2}\,\vec{a}_\perp^{(x)}, \qquad\qquad \vec{a}\cdot\vec{a}_\perp^{(x)} = 0 \tag{10.19}$$

が成り立つ。いま，$\vec{b}$ は単位ベクトルであり，$\vec{x}, \vec{y}$ は互いに直交する単位ベクトルなので,

$$1 \;=\; \|\vec{b}\|^2 \;\geq\; \left(\vec{b}\cdot\vec{x}\right)^2 + \left(\vec{b}\cdot\vec{y}\right)^2 \tag{10.20}$$

が成り立つ。(10.13), (10.20), (10.17), (10.19) より

$$\begin{aligned}
b_\perp \;&=\; \sqrt{1-\left(\vec{b}\cdot\vec{y}\right)^2} \\
&\geq\; \left|\vec{b}\cdot\vec{x}\right| \\
&=\; \left|\left(\gamma\vec{a} + \sqrt{1-\gamma^2}\,\vec{a}_\perp^{(b)}\right)\cdot\left((\vec{a}\cdot\vec{x})\,\vec{a} + \sqrt{1-(\vec{a}\cdot\vec{x})^2}\,\vec{a}_\perp^{(x)}\right)\right| \\
&=\; \left|\gamma(\vec{a}\cdot\vec{x}) + \sqrt{1-\gamma^2}\sqrt{1-(\vec{a}\cdot\vec{x})^2}\,\vec{a}_\perp^{(b)}\cdot\vec{a}_\perp^{(x)}\right| \\
&\geq\; |\gamma(\vec{a}\cdot\vec{x})| - \sqrt{1-\gamma^2}\sqrt{1-(\vec{a}\cdot\vec{x})^2}
\end{aligned} \tag{10.21}$$

を得る。最後の行への式変形のとき，$\vec{a}_\perp^{(b)}$, $\vec{a}_\perp^{(x)}$ は単位ベクトルまたは零ベクトルであることを使った。第 1 の不等号の等号は，ベクトル $\vec{b}$ が $\vec{x}$, $\vec{y}$ の張る平面上にあるときに成立する。第 2 の不等号の等号は，ベクトル $\vec{a}$ が $\vec{x}$, $\vec{b}$ の張る平面上にあるときに成立する。したがって，等号成立の必要十分条件は，ベクトル $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{x}$, $\vec{y}$ が同一平面上にあることである。(10.21) を式変形すると

$$
\begin{aligned}
b_\perp &\geq |\gamma(\vec{a}\cdot\vec{x})| - \sqrt{1-\gamma^2}\sqrt{1-(\vec{a}\cdot\vec{x})^2} \\
\left(b_\perp + \sqrt{1-\gamma^2}\sqrt{1-(\vec{a}\cdot\vec{x})^2}\right)^2 &\geq |\gamma(\vec{a}\cdot\vec{x})|^2 \\
\left(b_\perp + \sqrt{1-\gamma^2}\,a_\perp\right)^2 &\geq \gamma^2(1-a_\perp^2) \\
b_\perp^2 + (1-\gamma^2)a_\perp^2 + 2\sqrt{1-\gamma^2}\,a_\perp b_\perp &\geq \gamma^2 - \gamma^2 a_\perp^2. \qquad (10.22)
\end{aligned}
$$

これは (10.14) に他ならない。

ブランシアードのもう一つの補題 (10.15) を証明しよう。単位ベクトルとは限らないが互いに直交するベクトル $\vec{X}$, $\vec{Y}$ について $\vec{X}\neq 0$, $\vec{Y}\neq 0$ ならば対して

$$
\vec{x} := \frac{\vec{X}}{\|\vec{X}\|}, \qquad \vec{y} := \frac{\vec{Y}}{\|\vec{Y}\|} \qquad (10.23)
$$

とおく。$\vec{X} = 0$ ならば $\vec{x}$ は $\vec{Y}$ に直交する任意の単位ベクトルとする。$\vec{Y} = 0$ ならば $\vec{y}$ は $\vec{X}$ に直交する任意の単位ベクトルとする。また，(10.13) と同様に $a_\perp := \sqrt{1-(\vec{a}\cdot\vec{x})^2}$, $b_\perp := \sqrt{1-(\vec{b}\cdot\vec{y})^2}$ とおく。そうすると $\vec{a}-(\vec{a}\cdot\vec{x})\vec{x}$ は $\vec{x}$ に垂直，$(\vec{a}\cdot\vec{x})\vec{x}-\vec{X}$ は $\vec{x}$ に平行なので

$$
\begin{aligned}
\|\vec{a}-\vec{X}\|^2 &= \|\vec{a}-(\vec{a}\cdot\vec{x})\vec{x}+(\vec{a}\cdot\vec{x})\vec{x}-\vec{X}\|^2 \\
&= \|\vec{a}-(\vec{a}\cdot\vec{x})\vec{x}\|^2 + \|(\vec{a}\cdot\vec{x})\vec{x}-\vec{X}\|^2 \\
&\geq \|\vec{a}-(\vec{a}\cdot\vec{x})\vec{x}\|^2 \\
&= 1-(\vec{a}\cdot\vec{x})^2 \\
&= a_\perp^2 \qquad (10.24)
\end{aligned}
$$

が成り立つ。とくに等号は $(\vec{a}\cdot\vec{x})\vec{x}-\vec{X}=0$ のとき成立。同様にして

$$
\|\vec{b}-\vec{Y}\|^2 \geq b_\perp^2 \qquad (10.25)
$$

が成り立つ。これらと (10.14) から

$$
\begin{aligned}
&\|\vec{a}-\vec{X}\|^2 + \|\vec{b}-\vec{Y}\|^2 + 2\sqrt{1-\gamma^2}\,\|\vec{a}-\vec{X}\|\cdot\|\vec{b}-\vec{Y}\| \\
\geq\ & a_\perp^2 + b_\perp^2 + 2\sqrt{1-\gamma^2}\,a_\perp b_\perp \geq \gamma^2 \qquad (10.26)
\end{aligned}
$$

となり，(10.15) が導かれた。(10.26) の等号成立の必要十分条件は，ベクトル $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{x}$, $\vec{y}$ が同一平面上にあり，$(\vec{a}\cdot\vec{x})\vec{x}=\vec{X}$ かつ $(\vec{b}\cdot\vec{y})\vec{y}=\vec{Y}$ が成り立つことである。

以上で証明できたブランシアードの補題 (10.15) を用いて本題のブランシアードの不等式 (10.1) を証明しよう。小澤の不等式の定式化のときと同様に，$|\Psi\rangle = |\psi\otimes\xi\rangle \in \mathscr{H}\otimes\mathscr{K}$ を

対象系と測定器を併せた系の初期状態とする。$\hat{A}, \hat{B}$ を測定系の物理量とし，$\hat{\mathcal{A}}, \hat{\mathcal{B}}$ を測定過程後の物理量とする。誤差と擾乱の不確定性関係を導く場合は

$$\hat{\mathcal{A}} = \hat{U}^\dagger(\hat{I} \otimes \hat{M})\hat{U}, \qquad \hat{\mathcal{B}} = \hat{U}^\dagger(\hat{B} \otimes \hat{I})\hat{U} \tag{10.27}$$

とおく。後に，同時測定の誤差の不確定性関係を扱う場合は

$$\hat{\mathcal{A}} = \hat{U}^\dagger(\hat{I} \otimes \hat{M}_A)\hat{U}, \qquad \hat{\mathcal{B}} = \hat{U}^\dagger(\hat{I} \otimes \hat{M}_B)\hat{U} \tag{10.28}$$

とおく。どちらの定義を採用するにしても，重要なのは，$\hat{\mathcal{A}}$ と $\hat{\mathcal{B}}$ は可換だという事実である。$\hat{A}$ の測定誤差は，(7.2) と同じく

$$\varepsilon(\hat{A}) := \sqrt{\langle\Psi|(\hat{\mathcal{A}} - \hat{A})^2|\Psi\rangle} \tag{10.29}$$

で定義される。$\hat{B}$ が受ける擾乱（測定誤差にも読み替えられる）は，(7.4) と同じく

$$\eta(\hat{B}) := \sqrt{\langle\Psi|(\hat{\mathcal{B}} - \hat{B})^2|\Psi\rangle} \tag{10.30}$$

で定義する。期待値の定義はいままでどおり，$\langle\hat{A}\rangle = \langle\Psi|\hat{A}|\Psi\rangle$ であり，標準偏差 $\sigma(\hat{A}), \sigma(\hat{B})$ の定義も (7.5) と同じである。以上の設定の下，

$$|\Psi_a\rangle := \frac{1}{\sigma(\hat{A})}(\hat{A} - \langle\hat{A}\rangle)|\Psi\rangle, \tag{10.31}$$

$$|\Psi_b\rangle := \frac{1}{\sigma(\hat{B})}(\hat{B} - \langle\hat{B}\rangle)|\Psi\rangle, \tag{10.32}$$

$$|\Psi_X\rangle := \frac{1}{\sigma(\hat{A})}(\hat{\mathcal{A}} - \langle\hat{A}\rangle)|\Psi\rangle, \tag{10.33}$$

$$|\Psi_Y\rangle := \frac{1}{\sigma(\hat{B})}(\hat{\mathcal{B}} - \langle\hat{B}\rangle)|\Psi\rangle \tag{10.34}$$

とおく。このとき $\langle\Psi_a|\Psi_a\rangle = 1$, $\langle\Psi_b|\Psi_b\rangle = 1$ である。さらに，ユークリッド空間のベクトルを

$$\vec{a} := \begin{pmatrix} -\mathrm{Im}|\Psi_a\rangle \\ \mathrm{Re}|\Psi_a\rangle \end{pmatrix}, \qquad \vec{b} = \begin{pmatrix} \mathrm{Re}|\Psi_b\rangle \\ \mathrm{Im}|\Psi_b\rangle \end{pmatrix}, \tag{10.35}$$

$$\vec{X} := \begin{pmatrix} -\mathrm{Im}|\Psi_X\rangle \\ \mathrm{Re}|\Psi_X\rangle \end{pmatrix}, \qquad \vec{Y} = \begin{pmatrix} \mathrm{Re}|\Psi_Y\rangle \\ \mathrm{Im}|\Psi_Y\rangle \end{pmatrix} \tag{10.36}$$

と定める。このとき，

$$\vec{a} \cdot \vec{a} = \langle\Psi_a|\Psi_a\rangle = 1, \tag{10.37}$$

$$\vec{b} \cdot \vec{b} = \langle\Psi_b|\Psi_b\rangle = 1 \tag{10.38}$$

であり，$\hat{\mathcal{A}}, \hat{\mathcal{B}}$ が可換であるという仮定と公式 (10.12) から

$$\begin{aligned}
\vec{X} \cdot \vec{Y} &= \frac{1}{2i\,\sigma(\hat{A})\sigma(\hat{B})}\langle\Psi|[(\hat{\mathcal{A}} - \langle\hat{A}\rangle), (\hat{\mathcal{B}} - \langle\hat{B}\rangle)]|\Psi\rangle \\
&= \frac{1}{2i\,\sigma(\hat{A})\sigma(\hat{B})}\langle\Psi|[\hat{\mathcal{A}}, \hat{\mathcal{B}}]|\Psi\rangle \\
&= 0
\end{aligned} \tag{10.39}$$

となる。したがって補題 (10.15) が成立する条件がそろっている。(10.15) に現れる各項を計算すると，

$$\|\vec{a}-\vec{X}\|^2 = \frac{1}{\sigma(\hat{A})^2}\langle\Psi|(\hat{A}-\hat{\mathcal{A}})^2|\Psi\rangle = \frac{1}{\sigma(\hat{A})^2}\varepsilon(\hat{A})^2, \tag{10.40}$$

$$\|\vec{b}-\vec{Y}\|^2 = \frac{1}{\sigma(\hat{B})^2}\langle\Psi|(\hat{B}-\hat{\mathcal{B}})^2|\Psi\rangle = \frac{1}{\sigma(\hat{B})^2}\eta(\hat{B})^2, \tag{10.41}$$

$$\begin{aligned}\gamma = \vec{a}\cdot\vec{b} &= \frac{1}{2i\,\sigma(\hat{A})\sigma(\hat{B})}\,\langle\Psi|[(\hat{A}-\langle\hat{A}\rangle),(\hat{B}-\langle\hat{B}\rangle)]|\Psi\rangle \\ &= \frac{1}{2i\,\sigma(\hat{A})\sigma(\hat{B})}\,\langle\Psi|[\hat{A},\hat{B}]|\Psi\rangle \;=\; \frac{1}{\sigma(\hat{A})\sigma(\hat{B})}\,C\end{aligned} \tag{10.42}$$

となる。これらを (10.15) に代入するとブランシアードの不等式 (10.1) になり，ブランシアードの不等式の証明が完了する。

ブランシアード自身が示していることだが，ブランシアードの不等式から小澤の不等式を導くこともできる（論文 [120] の付録 Supporting Information D）。小澤の不等式 (7.6) の左辺の 2 乗は

$$\begin{aligned}&\Big(\varepsilon(\hat{A})\eta(\hat{B})+\varepsilon(\hat{A})\sigma(\hat{B})+\sigma(\hat{A})\eta(\hat{B})\Big)^2\\ \geq\;& \Big(\varepsilon(\hat{A})\sigma(\hat{B})+\sigma(\hat{A})\eta(\hat{B})\Big)^2\\ =\;& \varepsilon(\hat{A})^2\sigma(\hat{B})^2+\sigma(\hat{A})^2\eta(\hat{B})^2+2\varepsilon(\hat{A})\eta(\hat{B})\sigma(\hat{A})\sigma(\hat{B})\\ \geq\;& \varepsilon(\hat{A})^2\sigma(\hat{B})^2+\sigma(\hat{A})^2\eta(\hat{B})^2+2\varepsilon(\hat{A})\eta(\hat{B})\sqrt{\sigma(\hat{A})^2\sigma(\hat{B})^2-C^2}\\ \geq\;& C^2\end{aligned} \tag{10.43}$$

を満たす。最後の行の不等式はブランシアードの不等式 (10.1) である。よって，ブランシアードの不等式から小澤の不等式 (7.6) が導かれ，明らかにブランシアードの不等式の方が小澤の不等式よりもタイトである。

また，ここまでの定式化は，(10.27) の $\hat{\mathcal{B}}=\hat{U}^\dagger(\hat{B}\otimes\hat{I})\hat{U}$ という定義を採用して，(10.30) の小澤の擾乱 $\eta(\hat{B})=\{\langle\Psi|(\hat{\mathcal{B}}-\hat{B})^2|\Psi\rangle\}^{1/2}$ に関する不等式を導いたが，(10.28) の $\hat{\mathcal{B}}=\hat{U}^\dagger(\hat{I}\otimes\hat{M}_B)\hat{U}$ の定義を採用すれば，$\eta(\hat{B})$ が $\hat{B}$ に対する誤差 $\varepsilon(\hat{B})=\{\langle\Psi|(\hat{\mathcal{B}}-\hat{B})^2|\Psi\rangle\}^{1/2}$ に置き換えられるだけで，その後の推論はいっさい変更されず，(10.1) の代わりに

$$\varepsilon^2(\hat{A})\sigma^2(\hat{B})+\sigma^2(\hat{A})\varepsilon^2(\hat{B})+2\varepsilon(\hat{A})\varepsilon(\hat{B})\sqrt{\sigma^2(\hat{A})\sigma^2(\hat{B})-C^2}\;\geq\;C^2 \tag{10.44}$$

が結論される。これを**ブランシアードの誤差トレードオフ関係**という。

11 歴史的経緯

ここまでで不確定性関係の数学的定式化・証明は終わりにして，本稿の残りのページでは不確定性関係の発見・発展の歴史と，物理学における意義について議論しよう。なお，1970 年頃までに不確定性関係を巡って物理学者・科学哲学者たちが考えていたことについては，ヤンマーの本 [46] に詳しく書かれている。

11.1　ハイゼンベルクの不確定性関係に至るまでの歴史

不確定性関係をめぐる科学史を振り返ってみよう。不確定性関係の歴史を語るためには，原子論と量子論の歴史に触れないわけにはいかない。粗雑にではあるが，これらの経緯を概観しよう。

「すべての物質は**原子** (atom) と呼ばれる微小粒子の集合体である」とする原子論は，いまから 2 千 4 百年ほど前に古代ギリシャで考え出されたらしいが，当時の原子の概念は，実験・観察によって確かめられたものというよりは，頭の中だけにある思弁的産物であった。その後，2 千年ほどは，原子論はほとんど忘れられていたと言ってよい。19 世紀後半になると,「原子が存在すると考えると，いろいろな現象をうまく説明できる（しかも，原子論に頼らずに説明するのは難しい)」という状況証拠がしだいに蓄積されていったが，それでも，原子論を支持する物理学者と原子論を不要と考える物理学者との間で意見の対立があった。20 世紀に入ると，いよいよ原子は実在すると考えざるをえない科学的証拠が次々と見い出されてきた [50]。また，原子はプラスの電荷を持つ**原子核** (nucleus) と，マイナスの電荷を持つ**電子** (electron) からできているらしいということもはっきりしてきた。また，原子は光を吸収したり，放射したりするものだということもわかってきた。そうすると，原子の構造や，原子と光が関わる現象を説明・予測する理論がほしくなるわけだが，その答えとして創り出された理論が量子論であり，量子力学である。

量子論 (quantum theory) は一人の天才によって短期間にこしらえられた理論ではなく，25 年余りの年月をかけて多くの人々によって少しずつ手を加えられて築かれた理論である。とくに 1925 年にハイゼンベルク，ボルン，ヨルダンが作った理論は完成度が高く，彼らはこの理論を**量子力学** (quantum mechanics) と名付けた。ほぼ同時期にディラックも，より抽象度の高い非可換代数に基づく量子力学を作った。1926 年にシュレーディンガーは，ハイゼンベルクたちのものとは大いに見かけの異なる理論を作り，その理論は**波動力学** (wave mechanics) と呼ばれた。波動力学との違いを強調して，ハイゼンベルクたちの理論を**行列力学** (matrix mechanics) と呼ぶこともある。しかし，これらすべての理論は数学的に同等だということがわかり,「量子力学」はこれらの理論の総称になった（このあたりの経緯は論文集 [34] や本 [87] に詳しく書かれている。誰が何を発見したかということの伝承には多少の混乱があることを私は記事 [101] に書いた)。

行列力学は，電子の位置や運動量を**行列** (matrix) という抽象的な数学記号で表す。一方で，波動力学は，電子の状態を**波動関数** (wave function) という関数で表す。波動関数の値は複素数だが，物理量が複素数になるとは考えにくいので，波動関数の物理的意味についてはしばらく議論が続いたが，波動関数の絶対値の 2 乗は確率密度に等しいという**統計解釈（確率解釈）** (statistical interpretation) をボルンが提案した [2, 3, 117]。そのおかげで，波動関数に物理的意味がつけられるようになった。波動力学は「電子は雲や波動のようなもの」というイメージを与えてくれるので，行列力学よりは物理的描像を抱きやすい。意外と思われるかもしれないが，物理学者にとってイメージというものは大切で，電子についても何らかのイメージを抱けないとわかった気がしないのである。そこにいくと，抽象的な行列力学は当初は大多数の物理学者たちに不人気であった [87]。

また，現代の理系学生にしてみれば意外と思われるだろうが，当時は，行列の数学は理系の必須科目ではなく，ハイゼンベルク自身，数学の行列を知らなかったと言っているくらいマイナーな存在であった。ハイゼンベルクは，1963 年のインタビュー [27] で，I had never heard the lecture on matrices; ... I simply had never learned. So when Born told me that this was really an example for matrix multiplication, I was very interested, but it was new to me. と答えている。また，行列力学の端緒とされる 1925 年の論文 [1, 34] の中でも，行列で表される物理量の積に関して $xy = yx$ が成り立たないことを A significant difficulity arises と書いている。インタビュー [27] でも in my first paper on the quantum mechanics this fact that xy was not equal to yx was very disagreeable to me. I felt this was the only point of difficulty in the whole scheme, otherwise I would be perfectly happy. と答えている。つまり，ハイゼンベルクは行列の積に相当するものを計算していながら，行列という概念を知らなかったし，行列の積が非可換であることに気づいていながら，これが量子力学の本質だとは見抜いておらず，自分の理論にとって不都合な点だと感じていた。

それに対し，波動方程式などの微分方程式は，量子力学の構築以前から物理学者にとって十分慣れ親しんだ道具であった。何と言っても，物理的な運動や現象は連続的で滑らかに変化する出来事だという観念は抜き去りがたく，その意味でも波動力学はなじみやすい。つまりは，行列力学か波動力学のどちらを支持するかという選択は，ある程度は「慣れ」の問題であったと言える。

そういった事態に焦りを感じたのはハイゼンベルクである。行列という抽象的な数学記号で表される電子の位置や運動量とはいったい何だろう，行列にどのような物理的意味を与えたらよいのだろうと考えた。

経験事実としては，電子の位置や運動量は紛れもなく測れるように見える。例えば，霧箱という装置は，電子やイオンが空中を飛んだ飛跡を人間の目に見える形に変換する仕掛けだ。しかし，そうは言っても，霧箱で電子の位置のように見えているものは，厳密に言えば，電子が種になってできた水滴の位置である。測定器という間接的手段を通してでしか電子の物理量を知ることができないのであれば，測定の正確さに関して原理的な限界はあるのか見極めようとハイゼンベルクは考えたようだ。

そしてハイゼンベルクは，いくつかの思考実験を経て，電子のようなミクロの対象の測定には限界があるという結論に達した。その考察をまとめた論文を 1927 年に発表している [6]。とくに有名な思考実験は，電子の位置を測るガンマ線顕微鏡である。この想像上の顕微鏡は，電子にガンマ線（光子）を当て，跳ね返ってくる光子を見ることによって電子の位置を知る装置だが，この過程で電子の運動量が制御不能な変動を受けることを，彼は明らかにした。ハイゼンベルクが論文に最初に書いた式は

$$p_1\, q_1 \;\sim\; h \tag{11.1}$$

である。ここで，q_1 は電子の位置の平均誤差であり，p_1 は電子の運動量の変動であるとハイゼンベルクは書いている。(11.1) の式中の「$\sim$」が何であるか，ハイゼンベルクは書いていないが,「おおよそ等しい」とか「2, 3 倍程度の違いしかない」という意味だろう。ハイゼンベルクは,「この関係 (11.1) が交換関係 $\hat{P}\hat{Q} - \hat{Q}\hat{P} = h/2\pi i$ と直接的な数学的つながりに

あることは後に示されるであろう」と書いているが，この論文中ではそのよう直接的数学的つながりは示されていない。そもそもガンマ線顕微鏡に (11.1) のような限界がある理由をハイゼンベルクは論文の中で説明していない（1930 年に出版された本 [11] では論証している）。証明と言えるものとしては，ハイゼンベルクは，ガウス型の波動関数について

$$p_1\,q_1 \;=\; \frac{h}{2\pi} \tag{11.2}$$

という関係が成り立つことを計算によって示している。現代の記法では $p_1 = \sqrt{2}\,\sigma(\hat{P})$, $q_1 = \sqrt{2}\,\sigma(\hat{Q})$ である。

同じ論文 [6] の中でハイゼンベルクは，シュテルン-ゲルラッハの装置を用いて原子のエネルギー差を測る思考実験を検討し，エネルギーと時間の間にも不確定性関係

$$E_1\,t_1 \;\sim\; h \tag{11.3}$$

が成立することを示している（本ノート付録 A を参照）。ただし，エネルギーと時間の不確定性関係の定式化や物理的内容に関しては曖昧な点が残されており，これについても多様な定式化が提案されてはいるが，決定版はない [76, 124, 126] （[124, 126] に対するコメントが [125, 127] にある）。例えば，Busch はエネルギーと時間の不確定性関係についての詳しい解説論文 [76] を書いているが，その冒頭で

> **The time-energy uncertainty relation $\Delta T\,\Delta E \geq \frac{1}{2}\hbar$ has been a controversial issue since the advent of quantum theory, with respect to appropriate formalisation, validity and possible meanings.** Already the first formulations due to Bohr, Heisenberg, Pauli and Schrödinger are very different, as are the interpretations of the terms used. A comprehensive account of the development of this subject up to the 1980s is provided by a combination of the reviews of Jammer, Bauer and Mello, and Busch. More recent reviews are concerned with different specific aspects of the subject. The purpose of this chapter is to show that **different types of time energy uncertainty relation can indeed be deduced in specific contexts, but that there is no unique universal relation that could stand on equal footing with the position-momentum uncertainty relation.** To this end, we will survey the various formulations of a time energy uncertainty relation, with a brief assessment of their validity, and along the way we will indicate some new developments that emerged since the 1990s.

と書いている（太字強調は谷村による）。つまり，量子論の出現以来，時間とエネルギーの不確定性関係については適切な定式化・正当性・意味をめぐる論争があることを認め，特定の文脈ごとにさまざまなタイプの時間とエネルギーの不確定性関係を導出することはできるが，位置と運動量の不確定性関係と対等であるような普遍性と一意性を備えた時間とエネルギーの不確定性関係は見つかっていないことを認めている。また，同じ論文の中で Busch

は，モデルとエネルギー測定の定義次第では任意の短い時間で任意の精度でエネルギーを測れることも認めている。

註： 限りなく短い時間で誤差ゼロでエネルギーを測れるとするモデルも提案されている [26, 70]。これは私の意見だが，そのようなモデルは，対象系のハミルトニアンを特別なものに限定していて普遍性に欠けるか，あるいは，現実には実装できそうにないものに見える。例えば，Aharonov, Bohm [26] のモデルの一つは，

$$\hat{H} = \hat{H}_1 + \hat{H}_2 + \hat{V} = \frac{1}{2m_1}\hat{P}_1^2 + \frac{1}{2m_2}\hat{P}_2^2 + g(t)\hat{P}_1\hat{X}_2 \tag{11.4}$$

というハミルトニアンで規定され，系 1, 2 の相互作用により物理量 $\hat{P}_2$ が

$$\hat{P}_2(t) - \hat{P}_2(0) = -\hat{P}_1(0)\int_0^t g(s)ds \tag{11.5}$$

の分だけ変化するので，$\hat{P}_2(t)$ の値を読み取ることによって $\hat{P}_1(0)$ の値がわかり，結果的に系 1 のエネルギー $\hat{H}_1 = \frac{1}{2m_1}\hat{P}_1^2$ の値がわかるというモデルである。関数 $g(s)$ を調節すれば，$t \to 0$ の極限で $\int_0^t g(s)ds$ をゼロでない有限値に収束させることができるので，これで際限なく短い時間でエネルギーを正確に測れるというのである。しかも系全体のハミルトニアン $\hat{H}$ は $\hat{H}_1$ と可換なので，この測定過程で $\hat{H}_1$ の値は擾乱を受けることなく，反復測定が可能だという長所がある。

私の見解としては，このモデルは素朴に期待される時間とエネルギーの不確定性関係が成り立たない例としての意義はあるが，現実の系は $\hat{H}_1 = \frac{1}{2m_1}\hat{P}_1^2$ という運動エネルギーだけのハミルトニアンに従うわけではないので，このようなモデルの有効性には疑問が持たれる。むしろ，現実的な系は $\hat{H}_1 = \frac{1}{2m_1}\hat{P}_1^2 + U(\hat{X}_1)$ のように互いに非可換な運動エネルギーと位置エネルギーを項とするハミルトニアンに従うので，ハミルトニアンの関数形がわかっていたとしても，引数となっている物理量は同時測定できず，引数の各物理量を個別に測定してもエネルギーの値を測ったことにはならない。

対象系 1 のエネルギーをより直接的な形で測定するモデルとして Omnès [70] は

$$\hat{H} = \hat{H}_1 + \hat{V} = \hat{H}_1 + g(t)\hat{H}_1\hat{P}_2 \tag{11.6}$$

というハミルトニアンで規定されるモデルを示している。$\hat{P}_2$ は正準変数であり，実体としては運動量でもよいし位置でもよい。このモデルでは $\hat{P}_2$ に共役な変数 $\hat{X}_2$ が

$$\hat{X}_2(t) - \hat{X}_2(0) = \hat{H}_1\int_0^t g(s)ds \tag{11.7}$$

の分だけ変化するので，$\hat{X}_2(t)$ の値を読み取ることによって $\hat{H}_1$ の値がわかることになる。そうすると，Aharonov-Bohm のモデルと同じ理由で，際限なく短い時間でエネルギーを正確に測れることになる。しかも，このモデルはハミルトニアン $\hat{H}_1$ の関数形を特定する必要がないという長所がある。

このモデルに対して私は，$\hat{V} = g(t)\hat{H}_1\hat{P}_2$ という相互作用は実装可能か，という疑問を持つ。系 1, 2 の合成系の任意の状態は

$$|\Psi\rangle = \int_{-\infty}^{\infty} f(P_2)\,|\phi_{P_2}\rangle \otimes |P_2\rangle\, dP_2 \tag{11.8}$$

と書ける。ここで，$f(P_2)$ は複素数値関数，$|\phi_{P_2}\rangle$ は値 P_2 ごとに選ばれた系 1 の状態ベクトル，$|P_2\rangle$ は系 2 の $\hat{P}_2$ の固有ベクトルである（連続スペクトルに属する固有ベクト

ルは数学的には存在しないが，Dirac 流の記法で書いている）。Omnès モデル (11.6) のような相互作用があれば，この系の状態は

$$e^{-i\hat{H}t/\hbar}|\Psi\rangle = \int_{-\infty}^{\infty} f(P_2)\, e^{-i(1+g(t)P_2)\hat{H}_1 t/\hbar}|\phi_{P_2}\rangle \otimes |P_2\rangle\, dP_2 \tag{11.9}$$

に従って時間変化する。つまり，系 2 の物理量の固有値 P_2 に応じて，系 1 は

$$\hat{H}_{\text{eff}} = \big(1 + g(t)P_2\big)\hat{H}_1 = \big(1 + c(t)\big)\hat{H}_1 \tag{11.10}$$

というハミルトニアンに従うことになる。また，系 1, 2 の特徴的な時間スケールが大きく異なっていて系 2 の時間発展が比較的遅い場合には，系 2 の物理量演算子 $\hat{P}_2$ を古典的な力学変数（たいていの場合は期待値）で置き換えることができて，やはり系 1 は近似的に

$$\hat{H}_{\text{eff}} = \Big(1 + g(t)\langle\hat{P}_2(t)\rangle\Big)\hat{H}_1 = \big(1 + c(t)\big)\hat{H}_1 \tag{11.11}$$

というハミルトニアンに従う。そうすると，パラメータ $c(t)$ を調整することによって系 1 のエネルギー固有値は

$$\hat{H}_1|\psi_n\rangle = E_n|\psi_n\rangle \quad \to \quad \hat{H}_{\text{eff}}|\psi_n\rangle = \big(1 + c(t)\big)E_n|\psi_n\rangle \tag{11.12}$$

のように一斉に $(1 + c)$ 倍されることになる。このような制御は現実に行われることはあるだろうか？　それができるなら，原子や分子のエネルギー準位を一斉に等倍できることになる。通常，原子や分子に電場や磁場を印加することによってエネルギー準位の縮退を解いたり，準位間隔を変化させることはできるが，原子のエネルギー準位を一斉に等倍する制御方法は珍しい（本ノート付録 B を参照）。そのような方法があるとすれば，重力による赤方偏移または青方偏移くらいしか私は思いつかない。この意味では，Einstein と Bohr の光子箱をめぐる論争 [73, 74, 114, 124] で Bohr が重力に目をつけたのは，よい線を行っていたと言えるかもしれない。なお，Unruh, Opat は 1979 年の論文 [51] で

$$\hat{H} = \hat{H}_{\text{c}} + (M + a\hat{H}_{\text{c}})g\hat{X}_2 + \hat{H}_{\text{ext}} \tag{11.13}$$

というハミルトニアンで規定されるモデルを考察している。ここで，$\hat{H}_{\text{c}}$ は時計の内部運動に関するハミルトニアン，$\hat{H}_{\text{ext}}$ は時計の重心運動に関するハミルトニアン，M は時計の質量，g は重力加速度，a は定数である。これは Omnès のモデル (11.6) に似ている（出版は Unruh-Opat の方が早い）。Unruh と Opat の主眼は，このモデルが成立するためにはエネルギーが重力質量を持っていることが十分で，エネルギーが慣性質量を持っている必要はない，等価原理も必要ない，この意味で光子箱の議論で Bohr が等価原理を持ち出す必要はなかった，ということを指摘する点に置かれている。いずれにしても，私が言いたかったことは，「Omnès のモデル (11.6) のような相互作用を実装し，パラメータ $g(t)$ を時間的に変化させて，最終的には $g \to \infty$ とすることは，現実には困難と思われる」ということである。Unruh-Opat のモデル (11.13) で重力加速度 g または係数 a（じつは $a = 1/c^2$ で c は光速である）を無限大にする極限操作は，より一層現実味がないように思われる（Unruh, Opat はそのような極限が現実に可能だとは言っていない）。つまり，**数学的なモデルをいろいろ書くことは禁じられてはいないが，物理法則として利用可能な相互作用の種類や可変なパラメータの範囲は限られており，物理法則の制約の範囲で実現可能なモデルを吟味すべきではないか**，というのが私の論点である。

位置と運動量などのたいていの物理量に関しては，数学的にも物理学的にも意味の明瞭な不確定性関係が整えられているのに対して，時間とエネルギーの不確定性関係がはっきりしていない背景には，そもそも時間とエネルギーそのものが，他の物理量に比して異質な物理量であることが関係している。

時間の特殊性は，よく指摘されることだが，力学理論において時間は物理系に備わった力学変数ではなく系の外部で規定されるパラメータ・座標として導入される。そのために「時間の不確定性」という概念が何を指すのかはっきりしておらず，たいていの場合,「明確に，あるいは，およその目安として定義された時間間隔」と「エネルギーの不確定性」の関係を論じることになる。

エネルギーの特殊性としては，物理的に安定に存在する系ならエネルギーには下限値があることが要請されることが挙げられる。ちなみに Omnès のモデル (11.6) は，$\hat{P}_2$ のスペクトルが実数全体なので，$\hat{H}_1$ が恒等的にゼロでなければ，$\hat{H}$ のスペクトルも実数全体になる。このことからも，Omnès のモデルは非現実的だと言える。また，運動量や角運動量といった物理量は代数関係だけからその演算子表現が決まるのに対して，ハミルトニアンの具体形は一般には決まっておらず，むしろハミルトニアンを決めることがモデルを規定することになっている。また，角運動量のスペクトルは代数の表現で決まってしまうが，原子や分子のエネルギースペクトルは電場や磁場などの摂動ですぐに変わってしまう。そういった事実を知ると，数学的なモデルハミルトニアン演算子を測定するモデルを考えることと，現実のエネルギースペクトルを測定することは，等価な対応になっているのか，という疑問が湧く。また，二つの系を合併させるとき，一般に，エネルギーは単純な足し算則には従わず，相互作用エネルギーという新たな項が付け加わる。電荷や運動量は単純に加法的であるのに，エネルギーは単純加法的ではない。しかも，付け加わる相互作用ハミルトニアンが元のハミルトニアンと非可換であることは，エネルギーを測る測定器に限ったことではなく，たいていの測定器との相互作用において起こることである。

また，これはエネルギーに限らず，他の物理量についても言えることだが，エネルギーは差しか測れない物理量である。例えば，シュテルン-ゲルラッハの装置はスピンの向きによるエネルギー差で動作が決まる装置であり，原子の運動エネルギーや内部エネルギーの絶対値を測っているわけではない。そもそもハミルトニアンの定義そのものに定数の付加項の不定性がある。そうすると，部分系のハミルトニアン $\hat{H}_i$ に定数付加項を付け加えて $\hat{H}_i + c_i$ で置き換えても観測可能量は変わらないことを要請するのは合理的であるように思われる。ゆえに，エネルギーの絶対値を測れるかのようなモデルの実装可能性には疑問が持たれる。ちなみに，電荷は荷電共役対称性から電荷ゼロの原点が定まるし，角運動量は代数の表現から原点が定まる。しかし，エネルギーの原点を定める理由はとくに見当たらない。特殊相対論では真空状態を運動量とエネルギーの原点に定めるのが通例だが，それも便宜的な選択である。一般相対論を持ち出せばエネルギーの絶対値が測れるかもしれないが，その一般相対論ですら真空エネルギーに関する問題は決着していない。

ここまで言ってしまうと，私はエネルギーを測る手段はないと言っているかのようだが，エネルギーの差は測れると認めている。また，光子や真空中の電磁場内を動く荷電粒子などは，素性のよくわかっているハミルトニアンに従うと考えられており，実際の実験はこういった系を参照系として対象系のエネルギー差を推定していると理解できる（分光学などがこれにあたる），と私は考えている。

以上のようなさまざまな事情があり，不確定性関係を論ずるにも，そもそも時間とエネルギーはどういう観測可能量なのかという点からよく考えて定式化・分析しないといけないのであろう。論説 [126] で『私は，是が非でも時間とエネルギーの不確定性関

係が成立すべきだと考えているのではない．人々が「時間とエネルギーの不確定性関係」と呼んでいるところのものはけっきょく何なのだろうか？と問うて文献を調べたり自分で考えたりしただけである．もしも,「時間とエネルギーの不確定性関係」などというものはないということがはっきりしたなら，それはそれでかまわない．もしも,「時間とエネルギーの不確定性関係」が多義的ならば，多義的なありように応じた定式化と意味を知りたい，というのが私の姿勢である』と私は述べたが，いまもそのままの姿勢である。

なお，エネルギーの不確定性とエネルギー保存則の破れとが混同されることもあるようだが，両者はまったく別の問題である。運動量の不確定性があっても運動量保存則が破れているわけではないのと同じ理屈である。運動量とエネルギーの違いは，運動量はつねに加法的な量であるのに対し，相互作用している系のエネルギーは加法的ではない点と，相互作用ハミルトニアンは部分系のハミルトニアンと非可換なので，その分の不確定性があるという点である [126]。保存則と不確定性関係は互いに矛盾するものではなく，保存則がある場合，不確定性関係はよりいっそう限定された形になることが知られている [25, 78, 84, 102, 118]。（時間とエネルギーの不確定性関係についての註おわり）

個人的な感想だが，ハイゼンベルクの論文 [6] は，語義や論証が曖昧，筋立てが不明瞭，文章が冗長で，何を言おうとしているのかわかりにくく，正直言って読みにくい。論文の書き方としては模範的ではないと思う。なお，この論文中でハイゼンベルクは「不確定性関係」や「不確定性原理」という言葉は使っていない。また，誤差・擾乱といった概念を正確に定義してもいない。

11.2 不確定性関係の厳密化

ハイゼンベルクは，いくつかの思考実験と計算例を通して (11.1), (11.3) のような関係を見い出したものの，いかなるミクロ系のどのような状態にも通用するような不確定性関係を証明したわけではなかった。そもそもハイゼンベルクが書いた式 (11.1), (11.3) に登場している p_1 や q_1 は明確に定義された量ではなく，運動量や位置の「不確かさの大きさの目安」でしかない。したがって，これらの式は等式でも不等式でもない，おおよそこの程度の大きさだということを示す記号「∼」で結ばれた頼りない関係式であった。

ハイゼンベルクの論文が発表されたのと同じ 1927 年に，ケナードが，どのような状態の粒子においても，位置と運動量の不確定性について，(5.17) に掲げた

$$\sigma(\hat{Q})\sigma(\hat{P}) \;\geq\; \frac{1}{2}\hbar \tag{11.14}$$

という関係が成り立つことを証明した [7]。ここで $\sigma(\hat{Q})$, $\sigma(\hat{P})$ は数学的に明確に定義された，位置と運動量の標準偏差である。ケナードは波動関数の変換理論を使ってこの不等式を証明した。

1929 年に数学者ワイルは『群論と量子力学』と題する本 [8] をドイツ語で出したが，この本の中でワイルはシュワルツの不等式を使って位置と運動量の不確定性関係式 (11.14) を証明した（本 [8] の付録 1）。なお，この本の中でワイルは，この命題をパウリから教えてもらったかのようなことをコメントしている（[8], p.77 に I am indebted to W. Pauli for this remark と書かれている）。ワイルの本を英訳したロバートソンは，ワイルの証明方法を拡張して，任意の物理量について成立する不等式 (5.4),

$$\sigma(\hat{A})\sigma(\hat{B}) \geq \frac{1}{2}\left|\langle[\hat{A}, \hat{B}]\rangle\right| \tag{11.15}$$

を証明した [10]。

パウリはドイツ語の Handbuch der Physik の一項目として量子論についての解説を書いた。この本の初版は 1926 年に出版され，1933 年には改訂版が出版された [15]。1933 年版の解説は「不確定性原理と相補性」と題する節で始まっており，第 2 節にはハイゼンベルクやボーアのやり方に従って不確定性関係を導く思考実験が書かれている。第 3 節にはケナード・ワイルの流儀の位置と運動量の不確定性不等式 (11.14) の証明が書かれている。

1929 年にハイゼンベルクは，アメリカのシカゴ大学で量子力学に関する講義を行い，その内容を英語の本として 1930 年に出版している [11]。この本では「不確定性関係 (uncertainty relation)」という言葉もはっきりと用いられている。また，ガンマ線顕微鏡の思考実験について関係式 (11.1) の導出が書かれている。それ以外にもさまざまな思考実験が提案され，どの場合でも不確定性関係が成立することが示されている。ハイゼンベルクは，まさに手を替え，品を替えて，不確定性関係が真実であることを説得しようとしているようである。また，この本では，ケナードの方法に従って位置と運動量に関する不確定性関係が証明されている。

なお，いま見ると，**ハイゼンベルクのガンマ線顕微鏡の考察では，光の波動的性質（波長と分解能の関係）と粒子的性質（光子の運動量）を使って，電子の位置と運動量の不確定性関係が導かれており，この論証では電子に関する量子力学は不要であり，電子は古典力学的粒子として扱われているように見える。**このことは渡辺優が鋭く指摘していた [130]。そうすると，ハイゼンベルクの論証で本当に量子力学から電子についての不確定性関係が導かれたと言えるのかという疑問がいまでも残っている。

じつは，ハイゼンベルクの不確定性関係の発見以前に，ディラックとヨルダンは，位置と運動量の演算子が非可換であることの帰結として，位置と運動量の値が同時に確定した状態は存在しないことに気づいていた [4, 5]。ディラックは論文 [4] p.623 に One cannot answer any question on the quantum theory which refers to numerical values for both the q and the p と書いている。ただ，彼らは，一般の状態において位置と運動量がどの程度不確定になるかという定量的評価はしていなかった。ディラックとヨルダンが気づいていた “定性的” 不確定性関係を “定量的” 不確定性関係に推し進めたのがハイゼンベルクだとも言える。

11.3　ハイゼンベルクがしたこと

1930 年に出版されたハイゼンベルクの本 [11] では，多数の思考実験が提示され，そのつど不確定性関係を表す数式が書かれているが，現代の目から見ると，その中には，誤差と擾乱の不確定性関係と解すべきものもあるし，誤差同士のトレードオフ関係のように見えるものもあるし，標準偏差のようなゆらぎの関係式と解すべきものもある。しかし，**いずれにし**

ても，ハイゼンベルク自身は，誤差・擾乱・ゆらぎといった諸概念を厳密には区別していない。それでいて，それぞれの場合については，正しい式を書いている。

また，ハイゼンベルクが検討したのは，位置と運動量，時間とエネルギー，電場と磁場の不確定性関係に限られており [6, 11]，任意の物理量 $\hat{A}$, $\hat{B}$ の誤差と擾乱の不確定性関係式

$$\varepsilon(\hat{A})\eta(\hat{B}) \quad \geq \quad \frac{1}{2}\left|\langle[\hat{A},\hat{B}]\rangle\right| \qquad \text{（この式をハイゼンベルクは書いていない）} \tag{11.16}$$

を記してはいない。この本 [11] では，ケナードの論文が引用され，ケナードの不等式 (11.14) の証明も解説されているが，ロバートソンの論文は引用されておらず，ロバートソンの不等式 (11.15) も書かれていない。

ハイゼンベルクがやっていることは，いろいろな場合に不確定性関係が成立しますよねというケース・スタディである。そういうケース・スタディを通じて，量子力学的物理観を養おうとしているのである。何度も言うが，ハイゼンベルクは不確定性関係に現れる「不確かさ」の指標を厳密に定義していないし，普遍的に成立する不確定性関係式を証明してもいない。だからといって私はハイゼンベルクを揶揄（やゆ）する気にはなれない。

当時はまだ量子力学そのものができたばかりで，概念整理ができていなかった。そもそも，原子・電子のミクロの世界という未知の世界に人類が踏み込み始めた時代であった。しかも原子や電子は人間の目には直接には見えず，手に触れていることもわからないような対象であり，ミクロ世界はそれ以前に培われてきた古典物理学の常識が通用しない世界であった。実験から得られる断片的な手がかりと，古典物理学のうち何とか使えそうな概念と，斬新なイメージと，抽象的な数学を動員して，ミクロの世界の物理法則を何とかして明らかにしようとして創られた理論が量子論であり，量子力学である。量子力学全体が，はじめから解釈や描像が定まっていたものではない。だいたい，粒子と波動という両立し得ない描像の対立を抱えて量子力学はスタートしている。解釈は，量子力学が数学的理論としていちおうの体裁を整えた後で考えるものであったし，いまでも解釈について論争が続いているありさまである。別に，それは，いけないことではない。

なお，ハイゼンベルクの業績は不確定性関係にとどまらない。行列を用いた量子力学の定式化，強磁性の研究（なぜ物質は強力な磁石になるのか当時は謎だった），相対論的場の量子論の創始（パウリとの共同研究），S-matrix 理論の発展，原子核の陽子・中性子モデル（アイソスピン）の提唱，オルト・パラ水素分子異性体の発見など，素晴らしい研究を次々と行っている。

余談ではあるが，ハイゼンベルクは 1933 年に「量子力学の創造，とりわけ，その応用が水素分子の異性体の発見を導いた量子力学 (for the creation of quantum mechanics, the application of which has, inter alia, led to the discovery of the allotropic forms of hydrogen)」という功績を称えられてノーベル物理学賞を受賞した（正確に言うと，1932 年の分のノーベル賞を 1933 年に受賞した）が，受賞講演 [16] において彼は水素分子異性体の話には一言も触れていない。ハイゼンベルク自身はオルト・パラ水素の研究が自分の最高の業績だとは評価していないように見える。この背景には，ノーベル賞を与えた側と受ける側の間に価値観のずれがあったように思われる。

11.4　物理理論の受け止め方

解釈・イメージが万人に共有されていないことは，何も量子力学に限った話ではない。例えば，ニュートン力学の解釈は，変更や多様性の余地はないと思われているかもしれないが，**ニュートンが生きていた時代の力学の理解のしかたと現代人の力学の理解のしかたは相当に違うし，現代人の間ですら理解のしかたが統一されているわけではない。**

少しだけ例を挙げると，現代の多くの物理学者は，物体が受ける力から物体の軌道を決めるのが運動方程式だと理解しているが，**ニュートンは，力から軌道を求める課題よりも，軌道から力を決める課題のほうが先行すると考えていたし，そのように本に書いている** [72]。ニュートンは，惑星が楕円軌道を描くことから，惑星に作用する引力は惑星と太陽を結ぶ距離の 2 乗に反比例することを導いたのであり，その逆ではない。

また，力学の第 1 法則（力を受けていない物体は等速度運動するという慣性の法則）と第 2 法則（加速度は力に比例するという法則）は独立な法則か，それとも第 2 法則から第 1 法則は導かれるものか，という点に関しては，物理学者の間でも意見の不一致が見られる。

ちなみに私は，力学の第 1 法則と第 2 法則は独立な命題だと思っている。現代風に言えば，第 1 法則は位置や時刻を記述する座標系を限定する条件であり，座標系が定まったのちに物体の加速度を記述できるようになり，第 2 法則が使えるようになるのであって，第 1 法則は第 2 法則の帰結だとは言えない。

第 2 法則から第 1 法則を導けるという人は，運動方程式に「力＝ゼロ」を入れれば「加速度＝ゼロ」が出て来るので第 1 法則が導けたと言うが（例えば [131] p.57），加速度というのは座標系に依存した概念であり，どの座標系で計算するのか決めないと値が決まらない。例えば極座標や回転座標系では，自由粒子の運動ですら等速直線運動に見えない。また，時計の進み方が一様でなければ，等速度のはずのものが等速度に見えない。だから第 2 法則をうんぬんする前に，第 1 法則が成立するようにものさしと時計を調整しておかなければならない。

しかし，これはあくまで現代的な描像にもとづいた「ものいい」である。ニュートンの時代には，物体が等速直線運動するためには物体に「内在する慣性力」が働いていると考えられ，加速運動するためには「外からの駆動力」が働かなければならないと考えられていたのである。そういう描像があったからこそニュートンは第 1 法則と第 2 法則とを並記したとみるべきだと山本 [72] は論じている。

話が量子力学からずれたが，ともかく，**物理学の理論と言えども，何のイメージもなしに無心に書かれたものではなく，世界に対する描像・表象があって書かれているのであって，意味づけから解き放たれているわけではない。**それでいて，理論にどういう意味を見い出すかは，各時代・各人の意味体系の中に理論がどのように着地するかという問題なので，意味・解釈を共有することには自ずと限界がある。

ときとして，後の時代の観点からすれば「あれは間違っていた，あるいは，不適切だった」と言われるような描像を抱いている人が正しい理論を作ってしまうこともある。そんな例はいくつでも見い出せる。例えば，カルノーは，熱の本性について「熱素」という後世から見れば不適当な描像を持っていたが，それでも熱力学の重要な法則を見い出した [45]。プラン

クやアインシュタインは黒体輻射の問題を扱うときに，電磁波と物質の間に「共鳴子」というものがあって，それがエネルギーの受け渡しを仲介しているという，現代物理学者の目から見ればヘンテコな描像を抱いていたが，それでも熱輻射の正しい理論を書くことができた [43]。ディラックは「真空を満たす負エネルギーの電子の海」に空いた孔が正電荷と正エネルギーを持つ粒子のように見えると考えて，電子の反粒子の存在を予言したが [13]，当初は電子の反粒子は陽子だと誤って解釈していたし，現代の場の量子論では「負エネルギーの電子の海」という概念は不要になってしまった。だいたいボース粒子に対しては「ディラックの海の孔」の流儀では反粒子を説明できない。現代の目からみると，ディラックが反粒子について思い浮かべた描像は当たっていなかったが，反粒子の存在予言は当たっていた。

だからと言って,「理論の解釈は研究者の世界観しだいでどうとでもなるものであり，科学的に正しいとされることは各時代の社会的合意事項にすぎない」というような極論に走るのもどうかしていると私は思う。現実世界にフィットするような描像・解釈と，どう考えてもフィットしない描像・解釈があり，それらは程度の差という広がりを持っていることを認めるべきだと思う。

科学哲学の論理実証主義や道具主義などの諸説は,「このような手続きを経て得られた知識は科学的に正しい」と保証できる条件や,「科学のこういう部分は信用してよい（あるいは，これより先は理論に書いてあることを文字通りに受け止めてはいけない)」というような「頼れる科学」の特徴づけを望んでいるように見える。その種の探求をする哲学者たちは,「科学的に正しい」という語を「絶対に正しい・安心して身を任せてよい」という意に解して，それにふさわしい科学の条件を求めようとしているように見えるが，それは無理をねだっているように思われる。科学は「正しい知識」や「現実世界のありように肉薄する世界像」を得ることを目指してはいるが，本当に達せられることは「妥当な」知識，あるいは,「うまく機能する解釈」くらいのものだと私は思う。

今後も我々は概念創造・概念整理を続けて，自然界について「よりいっそう妥当な」描像を持てるように努力を続けていけばよいのである。ハイゼンベルクは，そのための重要な一歩を進めたのである。ハイゼンベルクよりも前にディラックとヨルダンは位置と運動量の間に不確定性関係のようなものがあることに気づいてはいたが，その関係を表す数式には行き着かなかった。ハイゼンベルクが不確定性関係を明示すると，ケナード，ワイル，ロバートソンといった人たちが不確定性関係を一般的に成り立つ数式に仕上げていった。ただ，**そうやって問題を人から人へバトンタッチしていく途上で，概念の中身が入れ替わり，換骨奪胎されていった面もある。**それはそれでしかたないのではないかと私は思う。「新しい不確定性関係が発見・検証され，ハイゼンベルクが間違っていたことが明らかとなった」という類の言説をしばしば見聞するが，**ハイゼンベルクは自分が扱った問題の範囲では間違ったことは書いていない。ハイゼンベルクはその時代の概念体系の中で正しく言えることを言っていたと評されるべきであろう。**

11.5　量子論の論争の時代

ハイゼンベルク・ボルン・ヨルダンの行列力学，ディラックの非可換代数，シュレーディンガーの波動力学など複数の量子力学の定式化が登場したのち，ボルンが波動関数の確率解釈を提案し，ディラックとヨルダンが変換理論を整えて量子力学の多様な定式化を統一し，ハイゼンベルクが不確定性関係を唱えて量子力学がどういうものかわかってくると，量子力学を物理学全般に応用する研究は快進撃と言ってよいほど発展したし，量子力学の基礎に関する研究も地道に進んでいった。

フォン-ノイマンは量子力学の数学的基礎を整えて，物理学者たちが使っていたあぶなっかしい計算方法（無限次元行列の対角化など）に論理的保証を与えた。しかもフォン-ノイマンは量子力学の数学的形式を整えることだけに専念したのではなく，その物理学的内容にもかなりのこだわりを示し，本 [14] の中で量子力学の観測問題に関してかなりのページを費やして議論している。彼は，ロバートソンの流儀で不確定性関係を再導出し，ハイゼンベルクのガンマ線顕微鏡を少し改変した思考実験を考案・検討して，

$$\varepsilon(\hat{Q})\,\eta(\hat{P})\ \sim\ h \tag{11.17}$$

という関係式を導出している ([14] pp.192-195)。この場面でフォン-ノイマンは ε を「座標測定の誤差の尺度」，η を「（光子と対象物の間で交換される）運動量の不確定さの尺度」と呼んでいる。不確定性の指標量を ε, η という記号で表す流儀はフォン-ノイマンに始まるが，彼は誤差・擾乱・標準偏差といった不確定性の尺度の種類を記法の上では区別していない。また，フォン-ノイマンは測定のモデルの一例を定式化しており ([14] pp.346-352)，後にこれが一般化されて**間接測定モデル**と呼ばれることになる。

また，アインシュタインは光量子仮説の提唱者であり量子論の立役者の一人でありながら，出来上がった量子力学に対しては承服しなかったことはよく知られている。とくに，アインシュタインがいろいろな思考実験を思いついては量子力学の欠陥を指摘するような問答を次々とボーアに仕掛け，ボーアは量子力学を擁護すべく反論したというエピソードは有名である [74, 119]。たいていの場合，ボーアは不確定性関係を巧みに使ってアイシュタインの攻撃をはねのけた ([74] p.227, 234, 246 など)。

ボーアが不確定性関係を盾にして量子力学を守ることができなかった唯一の戦いは，アインシュタイン・ポドルスキー・ローゼン（Einstein, Podolsky, Rosen の頭文字をとって EPR）のパラドクスだけだと思われる [17, 18, 43, 74]。1935 年の EPR 論文の主旨は「量子力学による物理的実在の記述は不完全だ」という主張である。彼らの原論文とは少し異なった問題の立て方になるが，不確定性関係を軸とするなら EPR の問題提起は以下のように言い換えられる。

電子と陽子のような，異なる 2 つの粒子に注目する。2 つの粒子 A, B の相対距離が一定 ($Q_{\mathrm{B}} - Q_{\mathrm{A}} = c$) であり，かつ，2 つの粒子の運動量が足してゼロ ($P_{\mathrm{A}} + P_{\mathrm{B}} = 0$) であるような状態の存在を，量子力学は許容する。具体的には

$$\psi(q_{\mathrm{A}}, q_{\mathrm{B}})\ =\ \delta(q_{\mathrm{B}} - q_{\mathrm{A}} - c)\ =\ \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dp}{2\pi\hbar}\, e^{ip(q_{\mathrm{B}} - q_{\mathrm{A}} - c)/\hbar} \tag{11.18}$$

という波動関数で表される状態のことである。この状態の 2 粒子系に対して，粒子 A の位置 Q_{A} を測れば，粒子 B の位置 $Q_{\mathrm{B}} = Q_{\mathrm{A}} + c$ を正確に推測できる。また，B の運動量 P_{B} を測れば，A の運動量 $P_{\mathrm{A}} = -P_{\mathrm{B}}$ を正確に推測できる。粒子 A と B は互いに遠く離れており，一方に施した測定行為が他方に影響を及ぼすことはないと信じられる。そうすると，Q_{A} と P_{B} を正確に測れば，Q_{B} と P_{A} も正確に推定できて，結果的には $Q_{\mathrm{A}}, P_{\mathrm{A}}$ の両方が正確に測れたことになる。これは不確定性関係に反するのではないか，という問題である。

これに対するボーアの答えは，かなり難解である。ボーアは**相補性** (complementarity) という考えを持ち出し，**粒子 A に対する測定行為が粒子 B そのものに力学的な影響を及ぼすわけではないが**，A の位置の測るためには測定器を固定する必要があり（測定器自体がぐらついているようでは，粒子の位置を正確に記録することができないだろう），そのように固定された機器と粒子が相互作用すると運動量保存則 $P_{\mathrm{A}} + P_{\mathrm{B}} = 0$ を保てなくなる（測定器が固定されて動かないことは，測定器は運動量を吸収する「蓄積器」のような役割を持つことを意味する）。つまり，A の位置を測る行為は結果的に B の運動量の正確な推測を不可能にしてしまう。そういう意味で，**A に対する測定行為は，その後でやりたかった推測が成立するための「条件」に影響を及ぼすのだ**，と趣旨のことを言っている ([74] p.114)。アインシュタインがボーアの答えに納得したかどうか，私にはわからない。

私なら EPR の問題にこう答える。2 つの粒子の運動量の和 $P_{\mathrm{A}} + P_{\mathrm{B}}$ と P_{B} とは可換であり，ゆえに両者の間に不確定性関係はなく，$P_{\mathrm{A}} + P_{\mathrm{B}} = 0$ を保ちながら P_{B} を正確に測ることができる。このとき $P_{\mathrm{A}} = -P_{\mathrm{B}}$ と言ってよい。しかし，2 つの粒子の運動量の和 $P_{\mathrm{A}} + P_{\mathrm{B}}$ と Q_{A} は非可換であり，ゆえに不確定性関係にあり，どのように実験装置を工夫しても $P_{\mathrm{A}} + P_{\mathrm{B}} = 0$ を保ちながら Q_{A} を測る装置は作れない（そのような装置が存在しないことが証明できる）。つまり，相補性に訴えるよりも，非可換物理量の観測可能性の判定条件を使って EPR のパラドクスを解く方が論旨がすっきりしていると思う。

註：上の記述では，不確定性関係の成否を議論するために EPR の問題設定を改作してある。EPR の原論文の論旨は次のようなものである：粒子 A の位置を測れば $Q_{\mathrm{B}} - Q_{\mathrm{A}} = c$ の関係を通して B の位置 Q_{B} が決まり，粒子 A の運動量を測れば $P_{\mathrm{A}} + P_{\mathrm{B}} = 0$ を通して B の運動量 P_{B} が決まる。どちらの測定を行うにしても粒子 B には直接手を触れていないので B の状態を擾乱していないはずだ。こうして Q_{B} と P_{B} の値を確実に予測できるのだから，Q_{B} と P_{B} の値はどちらも客観的な物理的実在とみなされるべきだ。しかるに，量子力学は Q_{B} と P_{B} の両方の値をいっぺんに記述することができない。ゆえに量子力学による記述は不完全だ，というのが EPR のもともとの主張である。

EPR の論では，直接の測定行為は粒子 A に対して行うとされている。しかし，このやり方だと，どのみち粒子 A の位置と運動量をいちどきに測ることはないので，位置と運動量の両方の値をいっぺんに記述できない量子力学は不完全だという EPR の批判は当たらないのではないかと私は思った。それで私は，A の位置と B の運動量という実際に同時測定可能なものを使って論を組み立て直した。

なお，本論から逸れるので述べなかったが，EPR が想定した 2 粒子の量子状態においては，A の位置の確実な予測はできず，Q_{A} は $-\infty$ から $+\infty$ まであらゆる値を等確率でとり得る。同様に $Q_{\mathrm{B}}, P_{\mathrm{A}}, P_{\mathrm{B}}$ も確率分布は均一である。にもかかわらず，$Q_{\mathrm{B}} - Q_{\mathrm{A}} = c$, $P_{\mathrm{A}} + P_{\mathrm{B}} = 0$ という関係はつねに保たれているのである。2 つの粒子がこのように連動・相関することは古典力学では不可能であり，この種の相関は**量子もつれ**とか**エンタング**

ルメント (entanglement) と呼ばれている。

11.6 静かな発展

EPR 論文以降は，量子力学の解釈をめぐる論争は表面的には沈静化し，解釈問題は一部の研究者たちだけの話題になっていった。また，量子力学の代替理論を探す研究も地道に続けられたし，代替理論と量子力学のどちらが正しいか検証する方法も模索され，そういった研究の中から，ベルの不等式 [29] のような重要な，しかし人目を惹くのには時間のかかるアイディアも生み出されていった。

ケナード流の位置と運動量の不確定性関係は，例えば，中性子ビームの直径を絞るとビームが横方向に広がるという形で 1969 年にシャルの実験で確認されている [37]。シャルは，さまざまな中性子実験の功績に対して 1994 年にノーベル物理学賞を受賞した人である。

理論研究としては，アーサーズとケリーが，位置と運動量の同時測定における誤差同士の不確定性関係を研究し，位置測定用のメーター $\hat{M}_Q$ と運動量測定用のメーター $\hat{M}_P$ の読み取り値の標準偏差の積の下限値

$$\sigma(\hat{U}^\dagger \hat{M}_Q \hat{U}) \cdot \sigma(\hat{U}^\dagger \hat{M}_P \hat{U}) \;\geq\; \left|\langle [\hat{Q}, \hat{P}] \rangle\right| \;=\; \hbar \tag{11.19}$$

がケナードの不等式の下限値 (11.14) の 2 倍になることを 1965 年に示した [31]。これを一般の物理量に対して拡張したものが，1988 年に公表されたアーサーズ・グッドマンの不等式 (8.8) である [62]。

じつは，石川史郎が，アーサーズ・グッドマンの不等式 (8.7), (8.8) と同等な不等式を証明している [66, 67, 68]。石川の一連の論文のうち最初の論文 [66] は 1989 年に受理され，1991 年に出版されている。論文 [66] 中の Theorem 2, (11) 式および Theorem 3, (12) 式がアーサーズ・グッドマンの不等式と同等の結果である。しかも石川は，後に小澤が導入した (7.2) と同等な誤差の定義も与えており（論文 [66], Definition 5, (10) 式），不偏推定という条件 (8.3) のもとでアーサーズ・グッドマンの誤差と小澤の誤差とが一致するという式 (8.16)

$$\mathcal{E}_{\mathrm{AG}}(\hat{A}) \;=\; \langle \hat{E}_A^2 \rangle^{\frac{1}{2}} \tag{11.20}$$

も示している（論文 [66], Lemma 2 (iii)）。しかも論文 [68] の謝辞では，研究会で小澤氏からアーサーズ・グッドマンの論文を教わったことに感謝している。しかし，石川の論文 [68] は不確定性関係そのものよりも量子力学の解釈問題や測定の公理に焦点を当てており，残念ながら不確定性不等式に関する石川の研究結果は広くは知られていないようである。

また，一方で，通信技術やコンピュータの発展に伴って情報理論という新種の数学分野が勃興すると，**不確かさ・わからなさの指標**として**エントロピー** (entropy) が導入され，量子力学の不確定性関係もエントロピーを使って表されるようになった。確率変数 X が値 x_i をとる確率が $p(x_i)$ である場合，この確率変数に対する**シャノンエントロピー** (Shannon entropy) は

$$H(X) \;:=\; -\sum_i p(x_i) \log p(x_i) \tag{11.21}$$

で定義される。ここで log はネイピア数 $e = 2.71828\cdots$ を底とする対数関数である。もし確率変数 X が確率 $p(x_1) = 1$ で確定値 x_1 をとるならば，シャノンエントロピーはゼロである。また，X が確率密度関数 $\omega(x)$ に従う確率変数である場合，

$$\tilde{H}(X) \;:=\; -\int \omega(x) \log \omega(x)\, dx \tag{11.22}$$

によって**微分エントロピー** (differential entropy) を定める。

量子力学の文脈では，1957 年に Hirschmann（名前の読み方はわからない）が最初に位置と運動量に関するエントロピーが満たす不等式を証明した（論文 [24] (3) 式）。1975 年には Beckner がタイトな不等式を証明し（論文 [47] (19) 式），同年，Białynicki-Birula と Mycielski は，任意の量子状態（純粋状態）$\hat{\rho} = |\psi\rangle\langle\psi|$ と n 個の位置変数 $Q_1, \cdots, Q_n$ と運動量変数 $P_1, \cdots, P_n$ のエントロピーが満たす不等式

$$\tilde{H}(Q_1, \cdots, Q_n|\hat{\rho}) \;+\; \tilde{H}(P_1, \cdots, P_n|\hat{\rho}) \;\geq\; n\,\log(e\pi) \tag{11.23}$$

を証明した（論文 [48] (1) 式）。不等式 (11.23) は，位置と運動量の不確かさ（エントロピー）を両方いっぺんに減らすことに対する限界を示している。その意味で，この不等式を**エントロピー不確定性関係** (entropic uncertainty relation) ともいう [95]。この式の証明は文献 [48] を見ていただきたい。

また，1983 年に Deutsch（ドイッチュ）は有限次元のヒルベルト空間上の任意の純粋状態 $\hat{\rho}$ と物理量 $\hat{A}$, $\hat{B}$ の値の確率分布に関するエントロピーの関係式

$$H(\hat{A}|\hat{\rho}) \;+\; H(\hat{B}|\hat{\rho}) \;\geq\; 2\,\log\left(\frac{2}{1 + D_{AB}}\right) \tag{11.24}$$

を証明した [57]。ここで，演算子 $\hat{A}$ の固有値を a，規格化された固有ベクトルを $|a\rangle$，$\hat{B}$ の固有値を b，規格化された固有ベクトルを $|b\rangle$ とし，

$$D_{AB} \;:=\; \max_{a,b} \left|\langle a|b\rangle\right| \tag{11.25}$$

で D_{AB} を定めた。演算子 $\hat{A}$, $\hat{B}$ の同時固有ベクトルが存在すれば，$D_{AB} = 1$ であり，(11.24) の右辺はゼロになる。この場合は，2 つのエントロピー $H(\hat{A}|\hat{\rho})$, $H(\hat{B}|\hat{\rho})$ をいっぺんにゼロにすることができる。そうでなければ，2 つのエントロピーをいちどきにゼロにすることはできず，物理量 $\hat{A}$ と $\hat{B}$ の間に不確定性関係がある。

11.7　見過ごされた問題

ケナードの不確定性関係 (11.14) にしても，フォン-ノイマンの不確定性関係 (11.17) にしても，重大な特徴は，位置と運動量のどちらか一方の不確定さをゼロに近づけると，もう一方の不確定さは無限大に発散するということである。つまり，ケナードの式 (11.14) からは $\sigma(\hat{Q}) \to 0$ とすると $\sigma(\hat{P}) \to \infty$ になるし，フォン-ノイマンの式 (11.17) からは $\varepsilon(\hat{Q}) \to 0$ とすると $\eta(\hat{P}) \to \infty$ になる。つまり，一方の量を正確に測ると他方の量は際限なく不確定に

なったり，無限大の擾乱を受けてしまうはずである。果たして単純にそう考えてよいのかということが後々問題になるので，覚えておいてほしい。

もっと重大な問題は，そもそも不確定性関係は何についての関係かという問題である。**ケナード・ロバートソンの不確定性関係 (5.4) は，「一つの系に対するある量の測定行為が，その系の別の量の値を乱す」という事象を表していない**ことは 5 節で指摘したとおりである。つまり，ケナード・ロバートソンの不確定性関係が適用できる状況は，**同じ系を多数用意し，それらすべてを同じ状態にセットして**，それらのうち半数に対して（誤差ゼロの理想的な測定方法によって）物理量 $\hat{A}$ を測定し，**残りの半数に対しては**別の物理量 $\hat{B}$ を測定するというような状況である。このとき，測定値のばらつき具合の指標として標準偏差 $\sigma(\hat{A})$ と $\sigma(\hat{B})$ を定めると，(5.4) の関係式 $\sigma(\hat{A})\sigma(\hat{B}) \geq \frac{1}{2}\left|\langle[\hat{A},\hat{B}]\rangle\right|$ が成り立つ。結局のところ，**ケナード・ロバートソン流の不確定性関係は，測定過程とは無関係に系に内在する「ゆらぎ」の関係式である。**そういう言い方なら嘘はないのだが，これを「一つの測定における誤差と，その測定が引き起こす擾乱との関係」であるかのように語ると，論旨のすり替えになってしまう。

実際，物理学者でも，学生だった頃に量子力学を学んだ際に，「ミクロの系は繊細なものであり，測定行為は不可避的にミクロ系の状態を乱してしまう」というような不確定性関係の説明を受けたあとでケナード・ロバートソン流の不確定性関係 (5.4) の証明を見せられると，「測定された系が擾乱を受ける」ことを意味する式になっていないことにうすうす気づいて，話をすり替えられたような印象を持った，と言う人はしばしばいる。

そこにいくと，**当初のハイゼンベルクのガンマ線顕微鏡の思考実験で導かれた式 (11.1) やフォン-ノイマン流の関係式 (11.17) は，位置を正確に測ることが運動量を大きく乱すという関係を表してはいるが，思考実験という一つのケース・スタディで確かめられただけで，いつでも成り立つことが証明されたわけではない。**

湯川らの量子力学の本 [44]（初版 1972 年発行）は，我が国における量子力学の代表的教科書だと思われるが，この本の中に「不確定性関係のふたつの解釈」と題する節（初版では 22.2 節，第 2 版では 20.2 節）がある。著者（この部分を書いたのは湯川秀樹）は，ケナード・ロバートソンが扱っている不確定性関係を**「アンサンブル（ensemble，集団）に対する不確定性関係」**と呼び，同一の系に対する測定が引き起こす擾乱と誤差の関係を**「単一対象に対する 1 回きりの測定における不確定性関係」**と呼んで，両者を区別している。そして「単一対象における不確定性関係」こそハイゼンベルクの原初の意味での不確定性関係だとしている。つまり，湯川は不確定性関係を使い分けるべきだということにしっかりと気づいていたとみられる。

ラムは 1969 年の論文 [38] の中で，ケナード・ロバートソンの不確定性関係は同一の系の二つの物理量を同時に測る状況を扱っているわけではないことを指摘している。

そんなふうに，不確定性関係の多義性は物理学者たちに気づかれていながら，意味づけに見合った定式化・証明が出そろっていない期間が長く続いた。しかし，このような「ねじれ」が表立って問題視されることはなかった。

11.8　蒸し返された論争

EPR のパラドクス以降も粛々と研究は進み，アーサーズ・ケリー，アーサーズ・グッドマンの不確定性関係や，エントロピー不確定性関係も定式化されて不確定性関係のバリエーションが追加されていった。しかし，そのような発展に並行して，不確定性関係の現実的な役割が真剣に見直されるきっかけがあった [87]。

きっかけは重力波検出実験の可否の検討である。一般相対性理論は，重力の正体は時空の曲がりであるとする理論であり，時空のひずみが波動となって光の速さで伝わる重力波の存在を予測する。重力波は 2 つの大質量天体が高速回転するときなどに発生すると考えられている。重力波は空間の伸び縮みの振動として現れるので，それを検出する方法の一つとして，地上に巨大な（数 km 規模の）マイケルソン干渉計を作って東西方向と南北方向に鏡を置いて光を往復させて，東西と南北の長さの変化をモニターするという方法が考えられたが，そのとき不確定性関係が問題になったのである。重力波による鏡の位置の変化はきわめて微小なので，鏡の位置を正確に測る必要があるのだが，その測定が鏡の運動量を変えてしまい，結果的に鏡の運動を正確に追跡できなくなってしまうおそれがある。

そこで，1980 年前後にブラジンスキー，ケイヴズ，ソーンといった物理学者たちがケナードの不確定性関係に基づいて鏡の位置変化の測定精度の限界を見積もった [28, 52]。彼らの見積もり方はこんなふうである。重力波検出に使われる鏡は，外力を受けていない質量 m の物体と見なせる。時刻 t の物体の位置 $\hat{Q}(t)$ は時刻 0 の位置 $\hat{Q}(0)$ と運動量 $\hat{P}(0)$ を使って

$$\hat{Q}(t) = \hat{Q}(0) + \frac{t}{m}\hat{P}(0) \tag{11.26}$$

と表される。時刻 $t\,(\geq 0)$ における，この物体の位置の標準偏差は

$$\langle \Delta\hat{Q}(t)^2 \rangle \;=\; \langle \Delta\hat{Q}(0)^2 \rangle + \frac{t^2}{m^2}\langle \Delta\hat{P}(0)^2 \rangle + \frac{t}{m}\Big\langle \Delta\hat{Q}(0)\Delta\hat{P}(0) + \Delta\hat{P}(0)\Delta\hat{Q}(0) \Big\rangle \tag{11.27}$$

に等しい。最後の項 $\langle \Delta\hat{Q}(0)\Delta\hat{P}(0) + \Delta\hat{P}(0)\Delta\hat{Q}(0) \rangle$ は $\hat{Q}(0)$ と $\hat{P}(0)$ の共分散だが，何らかの理由でこの項は正またはゼロだとする（後に，そのような仮定は成り立たないことが指摘される）。そうすると，相加平均 $\geq$ 相乗平均とケナードの不等式 (11.14) より，

$$\begin{aligned}\langle \Delta\hat{Q}(t)^2 \rangle_{\mathrm{SQL}} \;&\geq\; \langle \Delta\hat{Q}(0)^2 \rangle + \frac{t^2}{m^2}\langle \Delta\hat{P}(0)^2 \rangle \\ &\geq\; \frac{2t}{m}\sqrt{\langle \Delta\hat{Q}(0)^2 \rangle \langle \Delta\hat{P}(0)^2 \rangle} \;\geq\; \frac{t\hbar}{m}\end{aligned} \tag{11.28}$$

が導かれる。したがって，鏡の位置をこれより精度よく測ることはできないと考えられる。この精度限界は**標準量子限界** (standard quantum limit) と呼ばれた [52]。この見積もりからマイケルソン干渉計を用いて重力波を検出することは無理そうだという結論が導かれ，重力波検出には他の方法を使うべきだという見解が物理学者たちの間で優勢であった。

しかし 1983 年にユエン (Yuen) という物理学者が，**フォン-ノイマン流の単純な測定モデルではない測定過程を用いれば，標準量子限界の導出に使われていた仮定が成り立たない可能性がある**ことを指摘し [59]，そこから標準量子限界の正否を巡る論争が起きた [61]。

フォン-ノイマンの間接測定モデルは，ある粒子の位置をメーターを使って測る思考実験だが，これを使うと粒子の位置の測定誤差 $\varepsilon(\hat{Q})$ と粒子が受ける運動量の擾乱 $\eta(\hat{P})$ に関して

$$\varepsilon(\hat{Q})\,\eta(\hat{P}) \;\geq\; \frac{1}{2}\hbar \qquad \text{（フォン-ノイマンモデルの結果）} \tag{11.29}$$

という関係式が導かれる。これは小澤 [79] が明示した式だが，ケイヴズ [61] も重力波検出の限界について自説を擁護するために同じモデルを分析して同等の結果を導いている。この式を使うと確かにケイヴズの標準量子限界の式が正しいことになるのだが，これは一つのモデルのみで示された結果だということを強調しておかなければならない。

小澤は，重力波の検出限界をめぐる問題を丁寧に分析し，1988 年には標準量子限界を打ち破る測定モデルを具体的に構成して見せた [63, 64]。

また，不確定性関係から標準量子限界を導びく推論の途中で根拠のない仮定を使ってしまっていたので，標準量子限界が否定されたからと言って不確定性関係が否定されたとは言えなかった。そこで小澤は 2002 年には誤差と擾乱を明確に定義し（ただし，石川史郎も小澤の定義と同等な誤差を 1989 年に定式化していた [66]），ハイゼンベルク・フォン-ノイマン流の不確定性関係 (11.29) に対する反例を提示した [79]。すなわち，フォン-ノイマン流の不確定性関係 (11.29) によれば，測定誤差 $\varepsilon(\hat{Q})$ をゼロに近づければ運動量の擾乱 $\eta(\hat{P})$ は無限大に発散するはずだが，**小澤のモデルでは，誤差 $\boldsymbol{\varepsilon(\hat{Q})}$ はゼロであり，擾乱 $\boldsymbol{\eta(\hat{P})}$ は有限値にとどまった。**

さらに 2003 年に小澤は，**一般の物理量に対する誤差と擾乱の不確定性不等式 (7.6) を証明した** [80]。さらに，位置の誤差と運動量の擾乱についての正しい不等式 (7.7) を証明し，その物理的内容を詳しく分析してみせた [81]。ここに至って,「ある物理量を正確に測ろうとする行為は，その系の他の物理量の値を乱してしまう」という意味内容の不確定性関係が，ようやく正確に述べられるようになった [85]。

11.9　小澤の不等式以降の展開

さて，ケナード・ロバートソン流の不確定性関係やエントロピー不確定性関係は，多数の同一状態系における物理量の値の統計的ゆらぎ・ばらつきに関する関係式である。アーサーズ・ケリー・グッドマン流の不確定性関係は，一つの系に対して二つの物理量を同時に測ったときの誤差の関係式である。小澤の不確定性関係は，一つの系に対する測定に伴う誤差と擾乱の関係式である。これで不確定性関係と呼べるものは出揃った感がある。

しかしそれでも研究者の世界は落着しなかった。とくに，小澤が定義した誤差 (7.2) と擾乱 (7.4) の値は実際に測定できるか，という点が問題とされた。例えば，Werner は 2004 年の論文 [86] で

> The ‘perturbation of momentum’ by the measurement is then represented by the difference of the momentum operators before and after the measurement interaction, and quantified by the expectation of the square of this operator.

> This is definitely a departure from the operational approach to quantum mechanics, since this difference of non-commuting operators is not accessible in the given experiment.

と述べている。ここで Werner は，小澤が定めた運動量の擾乱 $\eta(\hat{P})^2 = \langle(\hat{P}(t) - \hat{P})^2\rangle$ を問題にして，測定過程前の運動量 $\hat{P}$ と測定過程後の運動量 $\hat{P}(t)$ とは非可換なので，一つの実験で両者を測ることはできないということを指摘している。また，同じ論文で Werner は，

> Nevertheless, there are interesting aspects in Ozawa's approach. In particular, his analysis applies to every input state separately, whereas our figures of merit involve a supremum over all input states. Further relationships remain to be clarified.

と述べて，小澤の定式化の意義も認めている。

また，越野(こしの)和樹と清水明は 2005 年の論文 [89] p.225 で，小澤が定めた誤差 (7.2) について

> Although this quantity has good mathematical properties, its physical meaning is not clear enough. For example, suppose that we are given two pieces of apparatus A and $\mathrm{A}^{\mathrm{ideal}}$ which perform general and ideal measurements, respectively. By performing two experiments, one using A and the other using $\mathrm{A}^{\mathrm{ideal}}$, we can measure all of $\delta r_{\mathrm{bias}}, \delta r_{\mathrm{sd}}, \delta r_{\mathrm{sd}}^{\mathrm{ideal}}$ and $D(P_R^{\mathrm{ideal}}|P_R)$, for any states. However, it is impossible to measure the quantity of Eq. (132) using A and $\mathrm{A}^{\mathrm{ideal}}$ for general states.

と述べている。ここで彼らが Eq. (132) と呼んでいるのは，小澤が定めた誤差 (7.2) の $\varepsilon(\hat{A})^2$ にあたる量である。彼らの論文と私のノートでは記法が異なっているが，我々の記法で書くと，$\delta r_{\mathrm{bias}} = \langle\hat{M}(t)\rangle - \langle\hat{A}\rangle$, $\delta r_{\mathrm{sd}} = \sigma(\hat{M}(t))$, $\delta r_{\mathrm{sd}}^{\mathrm{ideal}} = \sigma(\hat{A})$ であり，$D(P_R^{\mathrm{ideal}}|P_R)$ は $\hat{M}(t)$ の読み取り値の確率分布に対する $\hat{A}$ の理想的測定値の確率分布の相対エントロピーである。越野・清水は，対象系の物理量 $\hat{A}$ を正確に測る理想的な装置 (apparatus) $\mathrm{A}^{\mathrm{ideal}}$ と，メーター物理量 $\hat{M}(t)$ を測る装置 A とがあれば，これらを別々に使って測れる物理量の例をいくつか挙げ，小澤の誤差はこれらの装置を別々に使ったのでは測れないことを指摘している。また，彼らは同じ論文の p.234 で多様な不確定性の定義と多様な関係式が可能なことを述べ，Recently, Ozawa have found certain universal relations among them, using the rather mathematical definition (132) と述べている。

私なら次のようなことを論点としただろう：小澤の誤差の定義式 (7.2) は数学的には明確だが，その式の中に入っている演算子 $\hat{M}(t)$ と $\hat{A}$ は一般には非可換であり，一般の状態においては結合確率分布が存在しない，つまり，$\hat{M}(t)$ と $\hat{A}$ とを一つの装置で測定することは不可能である，両者を別々に測ったデータを集めても，引き算の 2 乗 $(\hat{M}(t) - \hat{A})^2$ の平均値を求めることはできないので，小澤の不等式は物理的に検証できないものについて語っているように見える。同様の批判は，擾乱の定義式についても言える。擾乱の定義式 (7.4) は互いに非可換な物理量の差 $\hat{B}(t) - \hat{B}$ を含んでおり，普通の方法ではこれを測ることは不可能だと思われる。

しかし，小澤の 2004 年の論文 [83] の p.387, (189) 式には，3 通りの状態を使って測定データを集めれば誤差 (7.2) を計算できる公式が書かれている。擾乱に関しても，2012 年の長谷川実験の論文 [103] の p.5, (8) 式に，3 通りの状態を使って測定データを使って擾乱 (7.4) を計算するための公式が示されている。これらの方法は **3 状態法** (three-state method) とも呼ばれる。こうして誤差と擾乱は，いちおう間接的には測定可能な量になった。ただ，非常に巧妙な数式を組み合わせた測定方法になり，定義どおりの誤差や擾乱を測っている気がしないという不満は残る。また，3 状態法はすべての物理量に対して使えるわけではない。スピンに対しては適用可能だが，位置と運動量に関しては適用できないと，いまでも思われる。

いま，私が 2005 年の越野・清水の論文 [89] を読むと，彼らが仮定した二つの装置を別々に使うという方法では小澤の誤差を測れないことだけを評価したのは制約条件が強すぎた感がある。実際，小澤は，小澤の誤差を測る方法（後に 3 状態法と呼ばれる方法）を 2004 年の時点で提示していたのだから，越野・清水はこの方法も検討してもよかったのにと思われる。

なお，2012 年の小澤・長谷川論文 [103] p.2 には

> As the output operator O_A and the observable A to be measured are not simultaneously measurable, their difference is not a directly detectable quantity, and neither is the change of the observable B. On this ground, the notions of the error $\varepsilon(A)$ and the disturbance $\eta(B)$ have been often claimed to be experimentally inaccessible[19,22].

と書かれており，Werner の論文 [86] と越野・清水の論文 [89] を引用している。ここで，O_A はこのノートの記法の $\hat{M}(t)$ に相当する。しかし，越野・清水は「二つの物理量が同時測定不可能だから，いかなる方法によっても小澤の誤差は測定できない」と書いたわけではないので，小澤・長谷川の越野・清水論文の引用のしかたは忠実・正確とは言い難い。これらの事例を観察して私が感心するのは，**研究者といえど他人のすべての論文を正確・詳細に把握・検討しているわけではなく，相手の主張の一部分を自分の文脈において解釈している**ということである。自戒を込めて強調しておく。

誤差と擾乱を測る別の方法として，**弱値** (weak value)・**弱測定** (weak measurement) を使う方法が 2010 年に Lund, Wiseman によって提案された [96]。より正確に言うと，以前は数式は書かれていても測定はできないと思われていた量が，弱値の概念を使えば測れる（測定データから計算できる）ことに彼らは気づいたのである。

長谷川祐司らは，中性子のスピンを対象とした実験を行い，3 状態法を使ってデータを分析することによって誤差と擾乱を算出し，素朴に期待されていた不確定性関係

$$\varepsilon(\hat{A})\eta(\hat{B}) \quad \geq \quad \frac{1}{2}\left|\langle[\hat{A},\hat{B}]\rangle\right| \qquad \text{（一般には成立しない）} \tag{11.30}$$

は成立しないが，小澤の不確定性関係 (7.6) はつねに正しく成立していることを実証した [103]。長谷川らの実験結果は 2012 年に発表され，ハイゼンベルクの不確定性原理が修正されたとの報道が世間を驚かせた [105, 115]。

Steinberg らは光子の経路と偏光を対象とした実験を行い，弱測定法によって誤差と擾乱を測定し，素朴な不確定性関係 (11.30) は間違っており，小澤の不確定性関係 (7.6) は正しいことを検証した。その論文は 2012 年に発表された [113]。

枝松圭一らは，光子の経路と偏光を対象とした実験を行い，3 状態法を使って誤差と擾乱を測定し，小澤の不確定性関係が正しく成立していることを検証した [121]。Steinberg たちの論文投稿が 2012 年 7 月 4 日，枝松たちの投稿が同年 8 月 7 日であった。枝松たちは，さらに弱測定法を使って誤差と擾乱を測定し，ブランシアードの不確定性関係も正しく成立していることを検証した [128, 129]。

これらの検証実験の前に，渡辺優らは**推定理論** (estimation theory) [36, 49] の考え方に基づいて推定誤差と擾乱という新たな指標量を導入し，これらの間に

$$\mathcal{E}_{\mathrm{W}}(\hat{A})\,\mathcal{E}_{\mathrm{W}}(\hat{B}) \;\geq\; \frac{1}{4}\left|\langle[\hat{A},\hat{B}]\rangle\right|^2 \tag{11.31}$$

という関係が成り立つことを証明した（2011 年の論文 [99]）。ただし，$\mathcal{E}_{\mathrm{W}}(\hat{A})$ は物理量 $\hat{A}$ の期待値の量子的推定誤差とでも呼ぶべきもので，渡辺優・沙川貴大・上田正仁が定義した。渡辺は，小澤が定義した誤差は物理的に意味があるだろうかという疑問を呈し，それに代わる誤差の定義を提案したのである [105, 107]。渡辺らの不等式 (11.31) を証明したり，推定誤差 $\hat{A}$ の定義を説明したりするには，量子推定理論が必要であり，その解説は大掛かりになってしまうので，ここでは説明抜きで結果だけを書いた。渡辺の学位論文 [130] ではこれらが詳細に解説されているので，興味のある方はぜひそちらを参考にしてほしい。また，彼らの流儀で定義された擾乱 $\mathcal{D}_{\mathrm{W}}(\hat{A})$ についても

$$\mathcal{E}_{\mathrm{W}}(\hat{A})\,\mathcal{D}_{\mathrm{W}}(\hat{B}) \;\geq\; \frac{1}{4}\left|\langle[\hat{A},\hat{B}]\rangle\right|^2 \tag{11.32}$$

という不等式が成り立つことを渡辺らは証明した [100, 130]。これなら形式的にハイゼンベルク流の不確定性関係 (11.30) によく似た関係式が正しく成立する。もちろん小澤の不等式と渡辺の不等式は数学的定義も物理的内容も異なる式であり，どちらか一方のみが正しくて他方は間違っているというような対立命題ではない。なお，渡辺らの不確定性不等式は有限次元のヒルベルト空間上の物理量に関して証明されたものであり，無限次元とくに連続スペクトルの物理量への拡張は自明ではないように思われる。また，渡辺の不等式の等号成立条件はまだ完全には解明されていない。

小澤の不等式に話を戻すと，どういう場合に小澤の不等式 (7.6) の等号が成立するか？というのは当然疑問が持たれるポイントである。北野正雄は，位置と運動量の不確定性関係について小澤の不等式の等号成立条件を調べた。北野は，小澤の不等式の等号は $\varepsilon(\hat{Q})=0$ または $\eta(\hat{P})=0$ という両極端の場合しか成立しないことを見い出した。さらに北野は，小澤の不等式の替わりに

$$\left(\frac{\varepsilon(\hat{Q})}{\sigma(\hat{Q})}\right)^2 + \left(\frac{\eta(\hat{P})}{\sigma(\hat{P})}\right)^2 \;\geq\; 1 \tag{11.33}$$

という下限値が存在することを見い出した (2008 年の論文 [91] (28) 式)。これはのちに発見されたブランシアードの不等式の特別な場合 (10.3) になっている。

Busch, Lahti, Werner [122] は，小澤に反論して，ハイゼンベルク流の不確定性関係 $\varepsilon(\hat{Q})\eta(\hat{P}) \geq \frac{1}{2}\hbar$ がつねに成立すると論じたが，小澤は Busch らの主張の欠陥を指摘している [123]。また，小澤は真の値と測定値とが等しいとはどういうことかという定義を与えているが [90]，この定義もなかなか人々に理解してもらえないようである [141]。さらに，誤差と擾乱のどのような定義が適切かという点に関してはその後も議論が続いている [132]。

Buscemi, 小澤らは，測定過程を取り入れた誤差・擾乱のエントロピー不確定性関係を定式化した [133, 134]。早速これも長谷川らによって実験検証されている [136]。また，ブランシアードの不等式は純粋状態について成り立つものだが，小澤は，混合状態の場合についても成り立つタイトな不等式を見つけている [135]。

また，小澤は 2015 年に，ハイゼンベルク自身による不確定性関係の導出過程を数学的に再構築してみせた [137]。より正確に言えば，ハイゼンベルクの時代の物理学者たちが暗黙に想定していた量子測定の公理を明示的に定式化すれば，(11.29) 式の $\varepsilon(\hat{Q})\,\eta(\hat{P}) \geq \frac{1}{2}\hbar$ が特定のモデルによらずに証明されることを小澤は示している。

これはおまけのようなものだが，私も角度と軌道角運動量の不確定性関係を研究して，ケナード・ロバートソンの流儀を拡張した不確定性関係を見い出した [138, 139]。角度という量は自己共役演算子では表せないので，普通の不確定性関係の論法が使えなかった点で拡張が必要だった。

2015 年に李(り)幸河(ちぇは)と筒井泉は弱値を用いて，測定と推定の両方に関わる新しい不確定性不等式を定式化・証明した [142]。これも不確定性関係と弱値の意味を掘り下げた研究と言える。

このように，小澤の不確定性不等式は，批判に鍛えられ，実験検証を無事通過し，弱値のような新しいアイディアを試す場も提供し，不確定性関係の代替案や改良案をも生み出す研究発展の刺激・シーズになっている。何度も言うが，ハイゼンベルク自身は不確定性関係について間違った数式を一度も書いていない。ただ，数式化される概念の定義・解釈を突き詰めて考えていなかった点のみにハイゼンベルクの甘さが認められるのである。概念整理がなされていなかった当時としてはそれが限界であったと言うべきだろう。小澤の不確定性関係の発見の意義は,「ハイゼンベルクは間違っていた」と囃(はや)してハイゼンベルクの至らぬ点を非難することよりも，量子系における測定・推定を数理的に記述する理論の進歩を促し，誤差と擾乱の明確な定義を与えて不確定性関係の定量的な検証や改良を可能にしたことにあると評すべきだろう。そういう意味で，小澤は**「不確定性関係学」**と呼ばれてもよいような新分野を切り拓いたとも言える。

なお，小澤氏の研究成果については，小澤氏自身による論文や解説記事が多数ある。こちらも参照していただきたい [84, 88, 93, 94, 104, 111, 112]。

12　物理学的意義

12.1　不確定性関係の意義

もう一度，不確定性関係の物理学上の意義について議論しよう。言葉づかいとして，**物理量** (observable) という概念と，**値** (value) という概念を区別して使うことにする。例えば，

「電荷」は物理量であり,「100 クーロン」は電荷のとり得る値である。しかし電荷の値を知らなくても「電荷」という物理量について語ることはできるし，系 1, 2 の電荷をそれぞれ $\hat{Q}_1, \hat{Q}_2$ として，それらの値を知らなくても物理量としての電荷の和 $\hat{Q}_1 + \hat{Q}_2$ について語ることができるし，$\hat{Q}_1$ が $\hat{Q}_1 - \Delta\hat{Q}$ に変わるとき $\hat{Q}_2$ が $\hat{Q}_2 + \Delta\hat{Q}$ に変わるといったことを値を抜きにして記述できる。物理量 $\hat{A}$ の値が a になることを $\hat{A} = a$ と書くことにする。

ケナード・ロバートソン流の不確定性関係は，**一つの系の二つの非可換物理量の値が確定した状態は一般には存在しない**ことを意味する。エントロピー不確定性関係も，基本的には同じ内容である。もう少し正確に言うと，二つの非可換物理量 $\hat{A}, \hat{B}$ について，一方で $\hat{A} = a$ であるような状態があり，他方，$\hat{B} = b$ であるような状態があったとしても，$\boldsymbol{a, b}$ **の値しだいで「$\boldsymbol{\hat{A} = a}$ かつ $\boldsymbol{\hat{B} = b}$ であるような同時確定状態」は存在しないことがある。**また，同一の状態に関して $\hat{A} = a$ となる確率を測定することができるし，それとは別に $\hat{B} = b$ となる確率も測定することができるが，**「$\boldsymbol{\hat{A} = a}$ かつ $\boldsymbol{\hat{B} = b}$ となる確率（数学では同時確率とか結合確率という）」を非負実数として定義できないことがある**（ただし，このような場合，物理量 $\hat{A}$ と $\hat{B}$ の値を一斉に測ることはできないようになっており，同時確率が存在しないからといって，矛盾をきたすことはない）。

この路線をさらに突き詰めると，**二つ以上の物理量の値が同時に実在すると思ってはいけない例**を量子論の枠組み内で示すことができる。そのような極端な例が（本稿では紹介しなかったが），コッヘン・スペッカーの定理であり [33, 69]，ベル不等式の破れである [29, 65, 97, 116]。これらは物理量の値がたんに確定しない（不確定性）というだけでなく，そもそも測定していないときに物理量の値が実在すると思ってはいけない（非実在性），とか，何を測定するかという文脈ごとに何の実在を認めるのか使い分けて考えなければならない（文脈依存性）といったことを含意しており，不確定性関係をさらに掘り下げた意味内容を持っている [98]。

また，もともとハイゼンベルクが意図し，小澤が定式化した不確定性関係は，**一つの系のある物理量を正確に測ることがその系の他の物理量の値を制御不能なやり方で乱してしまう**ことを意味する。

アーサーズ・ケリー・グッドマン流の不確定性関係は，誤差と擾乱の関係ではなく，誤差同士の関係であるが，ミクロ系単独の性質ではなく，**測定器を使って二つの非可換物理量を同時に正確に測ろうとするときの精度の限界を表している。**

渡辺らの不確定性関係は，小澤が扱った問題とは少し設定が違っている。渡辺らが扱っているのは，量子系の物理量の期待値（平均値）を推定しようという状況である。測定器を有限回使う限り，測定値には統計的ばらつきがあり，測定値の平均値を求めても，物理量の真の期待値とは一致しないことがある。**測定データから求めた推定値と真の期待値との不一致の程度に関する関係式**が，渡辺の不確定性不等式である。

それぞれに性格の異なる不確定性関係ではあるが，いずれにしても古典力学の客観的・決定論的物理観を否定する内容を持っている。**ニュートン力学に代表される古典物理学では，我々は外的観測者として，対象系の状態を乱すことなく，対象の物理量の値をいくらでも高い精度で観測できると想定されている。**そのような物理観をここでは**客観的**と呼んでいる。さらに，**古典力学は，ある時刻における対象系の状態を正確に知りさえすれば，系の未来は**

一意的に予測・決定できるような仕組みになっている。そのような物理観を**決定論的**と呼んでいる。

ところが，**量子力学の不確定性関係は，ミクロの系の状態に不測の変動を与えることなしにミクロ系の物理量の値を正確に知ることは不可能であり，結果的に未来の確実な予測も不可能だということを意味し，客観的・決定論的物理観を打ち砕く。**これが不確定性関係の最も強力なインパクトであろう。

ただし，量子論の確率解釈を認めるならば，**量子力学は，未来に各事象が起こる確率は正確に予測できる仕組みになっている。**100 パーセント確実に何が起こるという断言は，量子力学では，一般にはできない。

12.2　波束の収縮仮説と量子測定理論の役割

重力波検出の限界を決める数式はいかなるものかという問題をめぐって，ユエンが引き起こした論争があり，それが不確定性関係を真剣に見直すきっかけになって小澤の不等式の発見に至ったことを 11.8 節で述べたが，なぜユエンや小澤の主張が他の物理学者たちにすんなり受け入れられなかったのかということに関して，背景事情を少し説明しよう。

政治的な背景事情は別として，物理学の問題としては,「波束の収縮仮説」，より正確には「反復可能性仮説」と呼ばれる量子論の仮説がユエンや小澤の主張が認められるのを邪魔をしていた，と言える。

波束の収縮仮説を説明するにも準備が必要である。**量子力学では，測定前の状態における物理量の値は一つの値に確定していないとされている。**量子力学によれば，物理量の値は確率的に分布しているのであり，ベル不等式の破れのように，測定されていない物理量の値の存在を否定するような現象も起こる [69, 97, 98, 116]。

それでは，**測定後は物理系はどんな状態になっているのか？** ケナードの不確定性関係によれば，位置と運動量の値が同時に定まった状態はないのだから，例えば，粒子の運動量を測った後で，その粒子の位置を測り，その後でもう一度，運動量を測れば，最初と同じ運動量の値を得る保証はない。つまり，**測定の前後で系の状態は変化すると考えざるを得ない**。では，測定後の状態はいかなる状態か？という問題が生じる。

目に見え手に持つことができるようなマクロの物体の世界では，測定行為が対象系の状態を急変させてしまうことはないと考えられている。いわば，我々は，対象となる物に影響を与えることなく，自然物のありのままの姿をこっそりと客観的に観察することができるというのが，古典物理の世界の常識であった。ところが，ミクロの量子物理の世界では，自然物を観察するその行為が，対象系に変化をもたらしてしまう。しかも，どの物理量を，どんな方法で測って，どんな測定結果を得るかということに依存してさまざま状態変化が起こる。この意味で，**不確定性関係は，観測行為に依存しない客観的性質の存在という信念を揺るがす。**

そうは言っても，例えば電子を観察しても電子がなくなってしまうわけではないので，観察後の電子の状態を決める何らかのルールがほしい。そこで考え出されたのが，波束の収縮仮説である。

波束の収縮仮説 (hypothesis of wave function collapse) とは，次のような主張である。物理量 $\hat{A}$ を測って a という値を得たなら，測定直後の系は，物理量 $\hat{A}$ の値が a に確定している状態，すなわち，物理量 $\hat{A}$ の固有値 a に属する固有状態になっているはずだ，という仮説である。例えば，体が伸び縮みする虫がいたとして，体長を測って 5 cm という値を得た後，間をおかずに，すぐさまもう一度身長を測れば，やはり 5 cm という値を得るだろう，というような，かなり常識的な仮説である。これが成り立たないことがあれば，何のための測定をしたのかわからないというものだろう。時間間隔を限りなくゼロに近づけて二度目の測定をすれば同じ測定値を得るはずだ，という意味から，上に述べたことは**反復可能性仮説** (repeatability hypothesis) とも呼ばれる。

誰が最初にこの仮説を言い出したかは，はっきりしていないが，少なくともフォン-ノイマンの本 [14] には書かれている。この仮説を数学的にどのように定式化するかという問題に関しては，フォン-ノイマンが間違った答えを出しており，それよりもましな答えはリューダース (Lüders) という人が出した [21]。物理量 $\hat{A}$ のスペクトル分解（スペクトル分解とは何かということに関しても説明が必要だが，省略させていただく）が，固有値 a と射影演算子 $\hat{E}_A(a)$ の集合によって

$$\hat{A} = \sum_a a\,\hat{E}_A(a) \tag{12.1}$$

となっていて，対象系の状態が規格化された密度行列 $\hat{\rho}$ で表されているなら，物理量 $\hat{A}$ を測ったときに測定値として a を得る確率は

$$\mathrm{Prob}(\hat{A} = a) \;=\; \mathrm{Tr}(\hat{E}_A(a)\,\hat{\rho}) \tag{12.2}$$

に等しく，この測定値を得たとき，系の状態を表す密度行列は

$$\hat{\rho} \;\mapsto\; \hat{\rho}' = \hat{E}_A(a)\,\hat{\rho}\,\hat{E}_A(a) \tag{12.3}$$

（規格化されていない密度行列）へと変化する，というのがリューダースが提案した波束の収縮仮説である。もしも系の初期状態を表す密度行列 $\hat{\rho}$ がベクトル $|\psi\rangle$ で $\hat{\rho} = |\psi\rangle\langle\psi|$ と与えられていれば，この仮説は，測定前の状態ベクトル $|\psi\rangle$ が，測定値 a を得た後には

$$|\psi\rangle \;\mapsto\; |\psi'\rangle = \hat{E}_A(a)\,|\psi\rangle \tag{12.4}$$

へと変化するという規則と同等である。測定によって状態ベクトルが固有値 a の固有空間に射影されることから，**射影仮説** (projection postulate）とも言われる。むしろ，波束の収縮自体は曖昧な概念であり，それを明確に定式化したものが反復可能性仮説あるいは射影仮説だと思ってほしい。

波束の収縮仮説は,「長さを測定して 5 cm という値が出たのなら，少なくともその直後は，本当に対象系は 5 cm になっているのだろう」という常識的信念をそのまま表しているが，いろいろなパラドクスの温床でもある。波束の収縮はいつ起こるのか？ 誰が観測したときに測定値が確定するのか？ 意識を持った人間が観測しないと波束の収縮は起きないのか？ 観測した途端に不連続な状態変化が起こるのか？ この状態変化はシュレーディンガー方程

式では表せないプロセスなのか？といった，物理学の範疇に収まるかどうかもわからないような問いを波束の収縮仮説は呼び込む。私自身は，これらの奇妙な問いは，状態ベクトルというものを客観的な実在物と思うことから生じた擬似問題にすぎないと考えている [117]（本当は問題ではないことを，言葉の意味の取り違えや思い込みのせいで問題視することを「擬似問題」(pseudo problem) という）。

とくに 1 次元空間を動く粒子の状態は波動関数 $\psi(x)$ で表されるが，この粒子が $a \le x \le b$ の区間に見つかる確率は

$$\mathrm{Prob}(a \le x \le b) \;=\; \int_a^b \left|\psi(x)\right|^2 dx \tag{12.5}$$

に等しく，この測定をした直後の粒子の波動関数は

$$\psi'(x) \;=\; \begin{cases} \psi(x) & (a \le x \le b) \\ 0 & (x < a \text{ または } b < x) \end{cases} \tag{12.6}$$

になるはずだと射影仮説は教える。測定前の粒子はいろいろな位置 x に存在確率があったのだが，位置を測定して $a \le x \le b$ の間にいるということがわかった途端に，それ以外の場所の波動関数の値はゼロになる，つまり，広がっていた波動関数が急に $a \le x \le b$ の範囲に縮まったように思えることから，この波動関数の変化は「波束の収縮」と命名されたのである。

このように粒子の存在範囲が狭まれば，粒子の位置の拡がりの程度を表す標準偏差 $\sigma(\hat{Q})$ は小さくなり，ケナードの不確定性関係 (5.17), $\sigma(\hat{Q})\sigma(\hat{P}) \ge \frac{1}{2}\hbar$, によって運動量の標準偏差 $\sigma(\hat{P})$ は大きくなるはずである。つまり，測定過程によって波束の収縮が起きて，粒子の位置の不確定さが小さくなるのだから，運動量の不確定さは大きくなるはずだ，という推論が成り立つ（このような推論は [81] で明示された）。とくに，粒子の位置をピンポイントで確定すれば位置の不確定さは $\sigma(\hat{Q}) = 0$ になり，運動量の不確定さは $\sigma(\hat{P}) = \infty$ になるだろう。こういう直観的議論から，運動量の擾乱を小さく抑えつつ位置を正確に測ることは不可能だ，と信じられていたのであり，重力波検出の限界もこの線の推論によって決まるはずだと考えられていたのである。

もしもこの推論が間違っているとしたら，どこに間違いを求めるべきか？　不確定性関係としては，数学的に正しいケナードの不確定性関係が使われていたのだから，それに文句をつけるべきではない。では，他のどこに間違いが見い出されるかというと，反復可能性を要求した波束の収縮仮説が間違っていたのである。また，誤差と擾乱の定義も曖昧にしていたことが問題である。

例え話で恐縮だが，虫の体長を測ったとして，ものさしの目盛りが 4.9 cm から 5.1 cm の間のどこかを指していたとしたら，虫の真の長さも 4.9 cm から 5.1 cm の間だと信じてよいだろうか？（このように，測定値の誤差の範囲内に真の値もあるはずだ，という仮説を小澤 [81] は「同程度予測可能性の仮説」(equipredictivity hypothesis) と呼んだ。）ものさしの当て方を間違えていたら，あるいは目盛りの読み方を間違えていたら，虫の真の長さは 5.2 cm から 5.4 cm の間なのに測定者が誤って 4.9 cm から 5.1 cm の間だと判断しているかもしれない。しかも，測定器の読み取り値の誤差幅が小さかったとしても，正確な測定とは断言できない。別の例として，虫の体重を測るのに，はかりが壊れていて，はかりの針が

ずうっと 10 g の目盛りを指していたとしたら，虫の重さはちょうど 10 g だと言えるかと考えたら，そんなばかなことはない。つまり，測定器の読み取り値と，真の値は，等しいとは限らないし，読み取り値のばらつきの幅が，真の値のばらつきの幅に等しいという保証もない。このような例を思い浮かべただけでも,「測定器の値を読み取った瞬間に，対象系の真の値も測定値に収縮する」という反復可能性仮説（射影仮説）の考え方がばかげていることがわかる。「ばかげている」という表現が強すぎるなら,「理想的なことができたとしたらそうなるべきであろう」というのが反復可能性仮説の正しさの程度である。

いまの例え話は，原子や電子のようなミクロの世界の話ではなく，虫というマクロな物体の話だが，ミクロの世界に行くと話はもっと深刻である。我々は電子の位置を測るときに，電子そのものを見てその位置を知るのではなく，電子がいろいろな装置にぶつかって光を出したり，電気信号を生じたりするところの出来事が起きた位置を推定しているのである。**電子が装置に当たったときに，電子の状態がどう変化するか知りたければ，電子と装置をひっくるめた系全体の状態変化を量子力学に従って考えるべきであり，反復可能性仮説のような信念に頼って電子の状態を決めつけるのは，まったくあてにならない話である。**

測定というプロセスは，絶対的な約束事のようなものではなく，力学的な現象である。我々が何かを測るときは，長さ・重さ・速度・温度など何を測るにしても，何らかの物理的な過程を利用している。例えば，重さを測る体重計は，物体と地球の間に働く重力によってバネが変形し，バネの変形が体重計の指針の位置を変え，針には光が当たって跳ね返って，針の位置が人間の眼に見えるといった何段階もの物理的過程を経て，重さを数値に変換している。ナマの物理量から測定値への変換過程は，普通の力学法則に従う運動であり現象である。

量子力学的な系に対する測定も，えいやと物理量がいきなり数値に化けるわけではなく，測定過程それ自体が量子力学の法則にのっとった現象である。それは，射影仮説のような「おまじない」で記述される現象ではない。測定過程もシュレーディンガー方程式やハイゼンベルク方程式に従って起きる運動のはずである。

実際に行われている測定は，よく考えると反復可能でないものが多い。例えば，光子の個数を数える実験装置があるが，この種の装置は光を吸収するのが通例で，光子をカウントした後には，その光子はなくなってしまっている。つまり，もう一度同じ個数を数えることはできない。本当に射影仮説を満たしている測定の例は意外に少ない。

射影仮説に頼らずに測定過程を数学的にきちんと記述しようという努力を，一部の数理物理学者たち（名前だけ挙げると，Stinespring [23], Haag, Kastler [30], Ludwig [35], Helstrom [36], Hellwig, Kraus [39, 40], Davies, Lewis [41], 町田，並木 [53, 54], 荒木 [55], Zurek [56]）が長年続けていた。現実の測定器は多種多様であるし，測定器自体が 1 兆の 1 兆倍程度の個数の原子で構成されているので，測定器の挙動を量子力学を使って分析することは絶望的に困難であるように思える。そこで，測定器を抽象化・概念化して，すべての測定器に共通な性質を数学的に定式化しようという研究が行われた。そうやって作られたのが**量子測定理論** (quantum measurement theory) と呼ばれる理論である。そんな一般論で何か具体的なことが予測できるのかと思われるだろうが，たしかに量子測定理論は具体的な問題を計算するような理論ではない。ただ，どのような測定過程があり得るか，ということを一

般的に特徴づけるのである。

小澤は，Stinespring, Davies, Lewis の路線をさらに発展させて，測定による状態変化を記述する CP インスツルメントという概念を定式化し，どのような CP インスツルメントも量子力学の枠組み内で表現できることを証明した [60, 83, 112]。小澤の定理は，おおざっぱに言えば，次のような内容である：よっぽど変わった測定器を想像しても，それが物理学的に当然と思える条件を満たすものであれば，その測定器が対象のミクロ系に引き起こす状態変化は，測定器と対象系をひっくるめた全体系のユニタリ時間発展の式で記述できる，つまり間接測定モデルで表される，というのである。しかも，**小澤の定理は，反復可能性仮説（射影仮説）を満たさない測定過程も許容し，そのような状態変化も間接測定モデルで記述できることを保証する。**

量子測定理論の後ろ盾があるので，反復可能性仮説を満たさない測定過程を使って物体の位置を測定することを考えてもよいことになる。実際，小澤が重力波検出の標準限界を打ち破ることを示したモデル [63] は，反復可能性仮説が成り立たないものだった。また，小澤が新しい不確定性関係を証明したときに，(11.29) の素朴な不確定性関係 $\varepsilon(\hat{Q})\,\eta(\hat{P}) \geq \frac{1}{2}\hbar$ を打ち破るモデルも小澤は作って見せたが [79, 81]，それもまた反復可能性仮説が成立しないものであった。それゆえに，**反復可能性仮説を信じている物理学者には受け入れがたい結果だったのである。**「粒子の位置を測れば，波束の収縮が起きて，位置測定の誤差の範囲内に粒子の存在範囲が狭まり，ケナードの不確定性関係に従って運動量の不確定性が大きくなるはずだ」というイメージは，反復可能という形で波束の収縮を信じている物理学者にはわかりやい。だから，このイメージを崩すような理論を見せられると，理論の方がおかしいと言いたくもなるのであろう。

さらに言えば，小澤流の誤差の定義が物理学者の直観になじまなかった点も，小澤の不等式の受容が難航した原因であろう。誤差と擾乱の定義に関しては，いまでも論争が続いているありさまなのだから [132]。

小澤は，量子測定理論を知っていたし，自分自身が量子測定理論を作った立場でもあり，しかも数理論理学を専門として，暗黙の仮定や推論の穴を見抜く力を持っていたので，反復可能性仮説に囚われることなく，ともかく量子力学の枠組みを忠実に使って重力波検出限界も不確定性関係も調べればよいという立場を貫くことができたのであろう [141]。

12.3　原理か，関係か？

最後に，不確定性関係は不確定性原理とも呼ばれるが,「原理 (principle)」と呼ぶのが適切か，それとも「関係 (relation)」と呼ぶのが適切か，という学問上の習慣に関する事柄について議論しよう。これは言葉づかいの問題である。平たい言い方をすると,「原理」と呼ぶ方が格好いい気がして,「関係」というと単なる数式・関係式のことのような気がするが，どちらがよいか？というような問題である。

大概の物理学者は，言葉の選び方に対して冷淡であり，紛れのない用語だったらどちらでもよい，というのが正直なところだろう。たんなる言葉の気取りの問題だったら，どうでもよいと私も思うのだが,「不確定性原理か，不確定性関係か？」という名前の選び方は，人に

よっては譲れない問題になりもするし,「原理」はそれなりに力強い言葉なので，原理という言葉で何を意味するかよく検討した上で使った方がよいだろう。また，物理学者たちの習慣を無視して勝手に名前を変更することもできないので，なるべく客観的に，歴史的立場や現代的立場を踏まえて，この問題を分析しておきたい。

数学では，定義・公理・定理といった用語の区別は比較的はっきりしている。定義は概念・用語を定める条件文であり，公理は仮定文であり，定理は定義と公理から演繹証明された命題である。ただ，公理は定義に書き換えられる場合があるので,「区別は比較的はっきりしている」と遠慮気味に表現にした。また，補題・定理・系といった用語は，論理構成上の助演・主役・おまけを指して使い分けられているようだが，やや気まぐれに使われている感がある。また，命題という用語もあるが，これは必ずしも真ではない命題を指すのに使われる。

科学全般においては，原理という言葉は，明確な使い方は定まっていないと思われる。原理という言葉がどう使われているか用例を見てみよう。最も緩い使い方としては，社会的通念やものごとの方針全般を原理と称することがある。「市場経済原理」,「会社の経営原理」のような言い方がそういう例である。自然現象・機械の仕組みを原理ということもある。「カメラの原理」など。物理学でも「古典論と量子論の対応原理」のように，理論構築の方向性や基本理念を原理と呼んでいることがある。「解析力学の変分原理」や「最小作用の原理」のように理論の大まかな枠組みのことを原理と呼んでいることもある。変分原理は適用範囲の広い方法論であり,「変分法」とも呼ばれる。古代の物理学の「テコの原理」,「アルキメデスの浮力の原理」などは，自然規則に関する知恵を述べたものであり，後の時代の力学では論理的に演繹される命題である。化学の「ルシャトリエの原理」も，いまとなっては定性的な経験則を覚えやすい形に述べたものであり，物理化学や統計力学によって演繹できる命題である。熱力学の「クラウジウスの原理」は，低温物体から高温物体に熱がひとりでに移動することはないという主張である。これは経験的によく確かめられた事実であり，熱力学全体の前提であって，こういう命題こそ原理と呼ぶのにふさわしい気がする。特殊相対性理論の「光速不変の原理」や「相対性原理」も，直接的に実験検証可能な主張であり，相対論の基礎となる前提であって，原理の名がふさわしい。ところが，数学では，例えば「最大値原理」は偏微分方程式の解の性質であり，他の定理を証明するのに便利な性質ではあるが，とくに理論全体を演繹する公理になっているわけではない。つまり，数学において原理と呼ばれているものはじつは定理であったりする。

このような事例を集めると，**科学全般において，原理という言葉は，数学の公理のような，そこから理論全体を演繹構築できるような基本命題を指してはいない**と言える。何となく覚えやすい，広い適用範囲を持った法則を，おおらかに「原理」と呼んでいるのである。発見当初は「原理」と呼ばれ重宝された法則も，時代が下がって，演繹的な理論体系が出来上がってしまえば，証明済みの「定理」に格下げされてしまうことがある。数学や物理学のように理論体系化の進んだ科学分野では，そもそも「原理」などという曖昧な言葉を使うべきではないと私は思う。

さて，不確定性 “原理” に話を戻す。**これは，ハイゼンベルクが初めて唱えたときから，公理として提案された命題ではなく，量子力学の枠組み内の思考実験によって演繹された命題**

である。ハイゼンベルクの演繹の仕方は一般性を欠いてはいたが，ハイゼンベルクが不確定性原理を量子力学の新たな仮定として追加したわけではない。

歴史的には，ハイゼンベルクは 1927 年の論文 [6] の中では自分の発見した数式に特別の名前を与えていない。この論文の中身は，思考実験と，簡単なモデルの数学的分析と，量子力学の物理的意味の検討である。1927 年のケナードの論文（ドイツ語） [7] には Unbestimmtheitsrelation（非決定性関係）, Unbestimmtheitsgesetz（非決定性の法則）といった用語が見られる。1929 年のコンドンの論文 [9] やロバートソンの論文 [10] では uncertainty principle と書かれている。1930 年に出版された英語版の本 [11] の中ではハイゼンベルクはこれらの式を uncertainty relations と呼んでいる。

スタンフォード大学の哲学教室は大規模な哲学辞典をウェブで公開している。この辞典には The Uncertainty Principle という標題の項目があり，Uncertainty relations or uncertainty principle? と題する小項目も掲げられている [77]。ここには，Heisenberg never seems to have endorsed the name ‘principle’ for his relations. （ハイゼンベルクは自分が発見した関係式を「原理」と呼ぶことをよしとしたことはなさそうだ）と書かれている。ハイゼンベルク自身は inaccuracy relations (独：Ungenauigkeitsrelationen, 不正確さの関係) とか indeterminacy relations (独：Unbestimmtheitsrelationen, 非決定性の関係) と呼ぶことを好んだそうである。

科学哲学者として有名なポパー (Popper) は，1935 年という比較的早い時期に，

> we can derive the uncertainty formulae from Schrödinger’s wave equation (which is to be interpreted statistically), but not this latter from the uncertainty formulae. （シュレーディンガーの波動方程式から不確定性の関係式は導かれるのであって，その逆ではない。）

と述べている [19, 46]。ただし，これは,「不確定性関係から波動関数の確率解釈は導かれる」とする主張（不確定だから確率的なのだ，という考え方）に対する反論としてポパーが書いた言葉である。厳密なことを言うと，波動関数ないし状態ベクトルや演算子の数学的性質と確率解釈とから不確定性関係式は導かれ意味づけられるのであって，シュレーディンガーの波動方程式という特定の方程式に依存して導かれるわけではない。ゆえに，ポパーの書き方は少し的外れではある。しかし，不確定性関係式が量子力学の前提条件になっているわけではない，というポパーの主張に誤りはない。

スタンフォード大学哲学辞典には，1967 年にポパーが

> the uncertainty relations cannot be granted the status of a principle on the grounds that they are derivable from the theory, whereas one cannot obtain the theory from the uncertainty relations. （不確定性関係は理論から導かれるものであって，それから理論全体を導くことはできないのだから，不確定性関係は原理の地位を与えられない。）

という意味のことを述べた，と記されている。ただし，それでも，ポパーの言い方は，物理理論において「原理」と呼ばれるものの意義を適切に反映していないと辞書の項目の著者

Hilgevoord と Uffink は評している [77]。

朝永振一郎は彼の教科書（初版は 1952 年発行） [22] の中に「不確定性原理」と題する節（2 巻 63 節）を設け，かなりの紙数を費やして不確定性原理について検討・解説している。その一部分を抜粋してみる：

> 上のような考察をいろいろ考えの上で可能な実験装置について行ってみると，いつも前ページで述べたような結論に到達する。あらゆる可能な装置を全部吟味することはもちろん不可能であるが，それらの結果から一般的に次のようなことを結論することができそうである。（中略）これら，何々はあり得ない，という否定的な原理は，それがあらゆる場合を吟味し尽くして得られたのではなくても，それの一般性を仮に認め，それから導かれたところのより精密化された理論，すなわちエネルギー保存の原理とかエントロピー増大の原理とか，相対性原理とかいうものを定式化し，その定式の生み出したもろもろの結論が実験結果を説明するかどうかということを調べれば，それらが限られた経験からだけしか導出されないなどという心配をふき飛ばしてしまうのである。これらの例にはげまされて，われわれは $\Delta x \cdot \Delta p_x \approx h$ の関係を一般的な原理として採用する。そしてこれを**不確定性原理**と名づける。

つまり朝永は，不確定性原理は他の物理原理から一般的に証明された命題ではないことを認めた上で，これを積極的に物理の原理として採用することを提唱している。さらに朝永は「量子的粒子」と題する節（2 巻 64 節）で，次のように述べている：

> 不確定性原理は，スリットを用いる実験にも，顕微鏡を用いる実験にも共通に現れて，スリットの組成や顕微鏡の構造に無関係である。そして，この原理で結論されるばらつきを，物質粒子や光子を支配する何らかの究極的法則から導き出すような理論を立ててみても，その理論の当否を実験的に検証することはできない。その種の検証が可能になるためには，一つでもよいから不確定性関係を破るような装置が必要である。

ここで「物質粒子や光子を支配する何らかの究極的法則」と呼ばれているものは，量子力学や場の量子論，あるいはそれに取って代わる理論を指すと解してよいであろう。

ファインマンは，20 世紀中盤を代表する物理学者の一人であり，“The Feynman Lectures on Physics” という世界中で読まれている教科書 [32]（初版は 1965 年）を書いた。この本の中で彼は「不確定性原理」という節（1-8 節）を設け，もしも位置と運動量を同時に正確に測れる装置があったら，電子がダブルスリットのどちらの窓を通ったかを知りつつ，スクリーンに干渉縞を観測することができてしまい，量子力学と矛盾する実験が可能になってしまうことを示している。このことを要約してファインマンは次のように述べている：

> The uncertainty principle “protects” quantum mechanics.
> （不確定性原理は，量子力学を “防衛” するものである。）

つまり，不確定性原理があるおかげで量子力学はぼろを出さずに済んでいるというのである。論理的には,「A ならば B」が言えていれば，すなわち，命題 A から命題 B が導かれる

のであれば，B が偽であれば A も偽になってしまう。「A= 量子力学」,「B= 不確定性原理」と考えれば，B が間違っていれば A も成り立たないことになってしまう。論理的にはそういうことだが，ファインマンが言っていることはたんなる命題間の論理関係ではなく，B のおかげで A はうまく立ち回ることができているという意図が読める。私なりの言葉で言えば，**不確定性原理は，量子力学の論理的前提ではないけれども，現実と照らし合わせて量子力学がうまく機能するために欠かせない仕掛けなのだ**，といったところであろうか。実験装置のスリットも顕微鏡の光も不確定性原理に従うからこそ，ミクロ粒子の性質が量子力学で矛盾なく説明できるというファインマンの理解の仕方は，朝永の立場にも近い。私は，不確定性関係が，いまや定理であることを認めた上で，何通りかある不確定性関係のうち，どの不確定性関係が粒子と波動の相補性を擁護しているか，という問いを立てて研究したことがある [92, 106, 140]。

しかし，時代が下がるにつれて，物理学者は量子力学の理論体系に確信を持つようになり，不確定性関係もドライな受け止め方をするようになってくる。科学史家であるカーオはその著書 [75]（原著は 1999 年発行）の中で次のように述べている（訳本 pp.269-270）：

> ハイゼンベルクが不確定性関係を哲学的教義として述べたわけではなく，量子力学からそれを導き，思考実験によってその意義を示したのだということを認識しておくのは重要である。**それは量子力学の帰結だったのであり（今でもそうである），理論の概念的基盤ではなかった。**

太字部分は谷村が太字にした。

上田正仁は 2012 年に「新時代の量子力学教育」と題する記事の中で次のように述べている [108]：

> 授業では（中略）不確定性関係など量子論のほとんどすべての基本事項が体系的に導けることを示し，**不確定性原理が実は定理であることを指摘する**。

（太字部分は谷村が太字にした。）2010 年代の大学では不確定性原理は理論の前提ではなく定理であるというふうに教えるべきだ，と現役の物理学教授が言っているのである。

かつて（1947 年に）伏見康治は,「不確定性関係だけから量子力学の基本的特徴は全部導き出せるはずだ」と湯川秀樹・山内恭彦・渡辺慧の前で言ってしまった手前，不確定性関係から量子力学の結果を導くような**不確定算術**という方法を実践したことがあった [20, 109]。例えば，調和振動子のエネルギーは，相加平均 $\geq$ 相乗平均と不確定性関係 $\Delta P \cdot \Delta Q \geq \frac{1}{2}\hbar$ より

$$E_{\mathrm{osc}} = \frac{P^2}{2m} + \frac{1}{2}kQ^2 \;\geq\; 2\sqrt{\frac{P^2}{2m}\cdot\frac{1}{2}kQ^2} \;\geq\; 2\cdot\frac{1}{2}\sqrt{\frac{k}{m}}\,\Delta P\cdot\Delta Q \;\geq\; \frac{1}{2}\hbar\omega \tag{12.7}$$

という下限値を持つべきことがわかる。ただし $\sqrt{\frac{k}{m}} = \omega$ とおいた。これから調和振動子の基底状態エネルギーは $E = \frac{1}{2}\hbar\omega$ であることが見当がつく。同様に（話をわかりやすくするために伏見のオリジナルの推論を改作したやり方で示すが），水素原子のエネルギーについ

ても，$p \cdot r \geq \hbar$ という関係が成り立っていれば

$$E_{\mathrm{atom}} = \frac{p^2}{2m} - \frac{e^2}{r} \;\geq\; \frac{p^2}{2m} - \frac{e^2}{\hbar}p \;=\; \frac{1}{2m}\left(p - \frac{me^2}{\hbar}\right)^2 - \frac{me^4}{2\hbar^2} \;\geq\; -\frac{me^4}{2\hbar^2} \tag{12.8}$$

という不等式が成り立ち，水素原子の基底状態エネルギーは $E = -\frac{me^4}{2\hbar^2}$ であることが見当がつく。これは普通の量子力学の結果と一致する。しかし，このような方法では励起状態のエネルギーは求められないし，複雑なハミルトニアンに対してはほとんど無力である。使った条件式 $p \cdot r \geq \hbar$ の係数も答えが合うように選んである。こういった算法は，オーダー見積もりに使えるし，零点振動エネルギーがなぜあるのか，とか，水素原子のエネルギーの下限値がなぜあるのか，といったことを定性的に理解する助けにはなるが，それ以上に頼りになるものではない。つまり，不確定性関係は理論の基礎とは言えない。

以上の議論をまとめる。歴史的には，量子力学的世界の原子や電子がどんなものであるかということに関してイメージを得るために，不確定性関係が見い出された。電子は位置と運動量を同時には決められないものなんだよ，とか，位置を正確に測ろうとすると運動量が乱れてしまうようなものなんだよ，とか，そもそも電子は位置と運動量の値が同時あると思ってはいけないようなものなんだよ，といった表象イメージを作る上で，不確定性関係は今日でも重要な役割を演じている。また，不確定性関係は，現実世界との対応において量子力学のぼろが出ることを防いでいる助け役であり,「たしかに量子力学はうまく出来ている」と言いたくなるような面である。また，不確定性関係は，オーダー見積り・定性的説明の役にも立つ。ところが，量子力学の理論体系が数学的に整えられて，不確定性が明確に定義されてしまえば，不確定性関係は，標準的な量子力学の枠組みの中で証明済の定理に格下げされてしまう。しかも，物理的内容の異なる，数多くの不確定性関係式が続々と現れてきている。**もはや不確定性関係を一つの原理と呼ぶのは適当ではない**と考える方が合理的である。おそらく現代の物理学者の大部分がこの立場に同意することであろう。

原理から定理になったからといって，何も落胆することはない。不確定性関係が証明されるということは，それだけミクロの世界がよくわかってきたという証しなのだから。

さて，現代の立場において，不確定性関係の前提となる原理は何かと尋ねられたなら，どう答えるべきだろうか？ 量子力学の原理は直接経験によって確認されるものでなくてもよいのであれば，私は**物理量の非可換性**が根本原理だと答えたい [110, 116]。物理量が非可換であるがゆえに，すべての物理量が確定値を持つことが不可能であったり，統計的ばらつきが生じたり，物理量の測定に擾乱が伴ったり，干渉効果が起きたり，物理量の値がとびとびの離散値になったりしているのである。そんなに原理がほしければ，非可換性を原理に据えればよいのであって，あとはその副産物にすぎない。「量子力学では物理量が非可換だなんて，そんなことはよく知ってますよ！」という人は，それでよいのであって，それ以上の根本原理を求める必要はないし，原理争いをする必要もないのである。

付録 A　ハイゼンベルクの思考実験

本文の (11.3) 式，$E_1 t_1 \sim h$ の前後で述べたように，ハイゼンベルクはシュテルン-ゲルラッハの装置を用いて原子のエネルギーを測る実験を考察し，1927 年に時間とエネルギー

の不確定性関係を導いた [6, 11, 42, 74, 114]。ハイゼンベルクが考察した思考実験はシュテルン-ゲルラッハ装置だけではないが，いろいろな思考実験のうち，これが数式も多く書かれていて数学的に再現しやすい論考なので，ここに再現しておく。ただし，ハイゼンベルクの論文よりも状況設定を詳しくし，数式の書き方を変更してある。なるべくハイゼンベルクの意味したことを変えないように書こうと心がけたが，現代の観点から見るとハイゼンベルクの文章だけでは意味を確定できない部分があり，私としては，文献 [74, 114] などを参考にして，意味が通るようにハイゼンベルクの推論を再構成したつもりである。

状況設定を説明する。電気的に中性で磁気モーメントを持つ原子を考える。多数の同種の原子が束になって x 方向に平行に走るビームをなす。原子ビームをシングルスリットに通し，スリット壁の後方の磁場を通過させる（図 2）。入射する原子は運動量 p_x を持っている。スリットは y 方向に幅 d だけ開いている。原子は，2 通りのスピン状態をとり，磁場中ではスピン状態と磁場の強さに応じて $E_\uparrow$ または $E_\downarrow$ のエネルギーを持つ。磁場の強さは y 方向に関して非一様であり，y 座標の値に応じて $E_\uparrow, E_\downarrow$ の値は変化し，原子は y 方向の力 $F = -\dfrac{\partial E}{\partial y}$ を受けて運動量が変化する。この力によってビームの進行方向は曲がり，2 つのビームに分かれる。2 つに分かれたビームの間の角を α とする。各原子が磁場を通過するのに要する時間を t とする。図では α は大きく見えるように描いてあるが，これは本当は微小角である。そうすると，ビームの分裂角 α は

$$\alpha = \frac{1}{p_x}\left(\frac{\partial E_\uparrow}{\partial y} - \frac{\partial E_\downarrow}{\partial y}\right) t \tag{A.1}$$

で与えられる。また，シングルスリットを通過した直後の原子の y 方向の位置は幅 d 程度の不確定性を持つ。このとき，位置と運動量の不確定性関係より，スリット通過後の原子は

$$\Delta p_y \sim \frac{h}{d} \tag{A.2}$$

の程度の y 方向の運動量の不確定性を持つ。この不確定性のため，分裂後のビームは

$$\theta = \frac{\Delta p_y}{p_x} \sim \frac{1}{p_x} \cdot \frac{h}{d} \tag{A.3}$$

の程度広がる。波動光学のアナロジーでこの θ を回折角と呼ぶことにする。図では θ は大きく見えるように描いてあるが，これも本当は微小角である。

2 つのビームは回折角の分だけ広がってぼやけるが，2 つのビームが見分けられるためには，分裂角は回折角よりも大きくなければならない。すなわち，

$$\alpha > \theta \tag{A.4}$$

という条件が要請される。この式

$$\frac{1}{p_x}\left(\frac{\partial E_\uparrow}{\partial y} - \frac{\partial E_\downarrow}{\partial y}\right) t = \alpha > \theta \sim \frac{1}{p_x} \cdot \frac{h}{d} \tag{A.5}$$

から

$$d \cdot \frac{\partial}{\partial y}(E_\uparrow - E_\downarrow) \cdot t > h \tag{A.6}$$

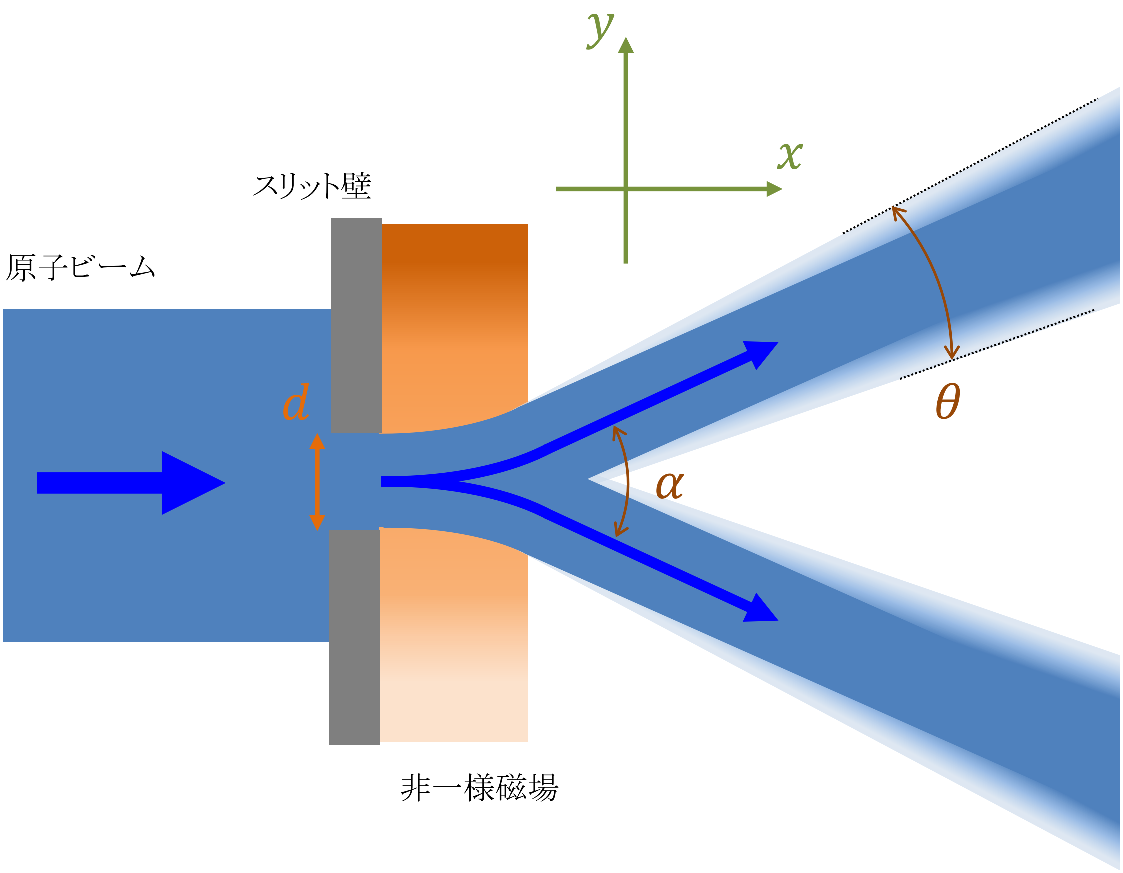

図2: シュテルン-ゲルラッハ装置を用いたハイゼンベルクの思考実験。
運動量p_xを持つ原子の平行ビームが幅dのスリットを通過し，スリット壁の後方にある非一様磁場で進行方向を曲げられる。原子のスピン状態に応じて屈折方向が決まり，ビームは角度αで開いた2つのビームに分裂する。また，スリットを通過したビームは回折角θで広がる。2通りのスピン状態が見分けられるためには，分裂角αが回折角θよりも大きくなければならない。

を得る。さらに

$$\Delta E := d \cdot \frac{\partial}{\partial y}(E_{\uparrow} - E_{\downarrow}) \tag{A.7}$$

という量を定義すれば，関係式

$$\Delta E \cdot t > h \tag{A.8}$$

が導かれる。これがハイゼンベルク流の思考実験を通して得られた時間とエネルギーの不確定性関係である。ハイゼンベルクのオリジナルの式 (11.3) とは記法も異なるし，式 (11.3) は不等式にすらなっていないが，意味が通るように私が論理を再構成すると，上のような推論になる。

時間 t の物理的意味は明らかだと思うが，t は原子が非一様磁場を通過するのに要する時間であり，これ自体は量子力学的不確定性を伴わない。その意味では，関係式 (A.8) は「エネルギーの不確定性と時間の関係」と呼ぶ方がよい。ただし，実際の実験装置で，原子が磁場に入った時刻と磁場から抜け出す時刻を正確に決められるか，あるいは，原子が磁場中に滞在している時間を正確に決められるかと問うと，そのような時刻や時間をシャープに決めることは難しく，t 自体に測定誤差が含まれることは考えられる。また，この実験自体が，「原子が磁場中にいた時刻」と「磁場中にある原子のエネルギー（差）」の両方を決めたい実験だとすれば，時間幅 t の分だけ測定時刻の不確定性があると解釈できる。どうもハイゼンベルク自身はこの解釈を採用していたようである [6, 42]。

ハイゼンベルクのエネルギー不確定性 (A.7) の物理的意味は何だろうか？ ハイゼンベルクは，定常状態のエネルギーの確定が可能であるような定常状態間のエネルギー差，と呼び，エネルギー測定の精度，とも呼んでいる [6, 42]。

私が (A.7) 式を解釈するなら以下のようになる：スピンの向きに関するエネルギー差 $E_{\uparrow} - E_{\downarrow}$ の値は原子のスリット通過位置によって異なっている。スリット幅 d のどこかを通る原子を考えると，おおよそ $\Delta E = d \cdot \frac{\partial}{\partial y}(E_{\uparrow} - E_{\downarrow})$ の分だけエネルギー差の変動があると見積もられる。従って，このシュテルン-ゲルラッハ装置を通過する原子のエネルギー差 $E_{\uparrow} - E_{\downarrow}$ を測るなら，ΔE 程度の精度で測れる。つまり，ΔE は $E_{\uparrow} - E_{\downarrow}$ に対する測定誤差の目安だと考えられる。そして関係式 (A.7) は，シュテルン-ゲルラッハ装置を用いて 2 つのスピン状態を識別しようと思ったら，エネルギー差の測定誤差 ΔE を小さくするためには原子が磁場を通過する時間 t を長くしてやらないといけないし，磁場通過時間 t を短くするとエネルギー差の測定誤差 ΔE は大きくなるというトレードオフの関係を表している，と読める。もう少し詳しく言うと，分裂角 (A.1) の式からわかるように，短い通過時間 t で原子のスピン状態を選別しようとすると，エネルギーの空間微分すなわち磁場の勾配を大きくしてやる必要がある，そうすると磁場の不均一性が大きくなるので，原子の通過位置のばらつきに起因してエネルギー差のばらつき ΔE は大きくなる，という関係を式 (A.8) は表している。この思考実験モデルに関しては，ハイゼンベルクが不確定性関係式 (11.3) を導いた推論は定量的には厳密ではないが，定性的には正しいと私は思う。

なお，量子力学の標準的記法でシュテルン-ゲルラッハ装置の磁場を通過する原子に対す

るハミルトニアンを書くと，

$$\hat{H} = \frac{1}{2m}\hat{\boldsymbol{p}}^2 - \mu\hat{\boldsymbol{\sigma}} \cdot \boldsymbol{B}(\hat{\boldsymbol{x}}) = \frac{1}{2m}\hat{\boldsymbol{p}}^2 - \mu\sum_{k=1}^{3}\hat{\sigma}_k B_k(\hat{\boldsymbol{x}}) \tag{A.9}$$

となる。ここで μ は原子の磁気モーメントの大きさであり，$\hat{\boldsymbol{\sigma}} = (\hat{\sigma}_x, \hat{\sigma}_y, \hat{\sigma}_z)$ はスピンを表すパウリ行列であり，$\boldsymbol{B} = (B_x, B_y, B_z)$ は磁場である。ハミルトニアン (A.9) によれば，スピンの向きによるエネルギー差は磁場の大きさに比例する。このハミルトニアンから導かれるハイゼンベルクの運動方程式は

$$\frac{d\hat{p}_j}{dt} = \frac{1}{i\hbar}[\hat{p}_j, \hat{H}] = \mu\sum_{k=1}^{3}\hat{\sigma}_k\frac{\partial B_k}{\partial x_j}(\hat{\boldsymbol{x}}), \tag{A.10}$$

$$\frac{d\hat{x}_j}{dt} = \frac{1}{i\hbar}[\hat{x}_j, \hat{H}] = \frac{1}{m}\hat{p}_j \tag{A.11}$$

となる。つまり，磁場の空間的な勾配（微分）に比例して運動量が変化する。電気的に中性な原子の進行方向を曲げる力は一定の磁場で生じるのではなく，磁場の勾配あるいは不均一性によって生じることに注意してほしい。そして磁場が不均一であれば，スピンの向きに関するエネルギー差は場所場所によって異なることになる。ゆえに，大きな勾配磁場で原子ビームを強く曲げれば，スピンの向きに関する選別はやりやすくなるが，エネルギー差の誤差は大きくなる。

付録B　エネルギースペクトルの質量依存性

本文の (11.12) 式の前後で，任意の系のエネルギー固有値を一斉に $(1+c)$ 倍することは現実的な方法でできるか，という問題を提起したが，ハミルトニアンに現れる代表的なパラメータである質量を調整することによってそのようなエネルギー固有値のスケール倍が可能かどうか，調べてみよう。そこで，ハミルトニアンの固有値が厳密に求められる例を列挙しよう。水素原子のハミルトニアン

$$\hat{H}_1 = \frac{1}{2m}\hat{\boldsymbol{p}}^2 - \frac{\kappa}{\hat{r}} \tag{B.1}$$

（電子の換算質量を m, クーロンポテンシャルの係数を κ とした）の束縛状態のエネルギー固有値は

$$E_n = -\frac{m\kappa^2}{2\hbar^2 n^2} \qquad (n = 1, 2, 3, \cdots) \tag{B.2}$$

である。質量 m, ばね定数 k の 1 自由度の調和振動子のハミルトニアン

$$\hat{H}_2 = \frac{1}{2m}\hat{p}^2 + \frac{1}{2}k\hat{x}^2 \tag{B.3}$$

のエネルギー固有値は

$$E_n = \hbar\Omega\left(n + \frac{1}{2}\right) \quad (n = 0, 1, 2, 3, \cdots), \quad \Omega = \sqrt{\frac{k}{m}} \tag{B.4}$$

で与えられる。2 次元平面上の一様磁場 B 内を運動する質量 m, 電荷 e の粒子のハミルトニアン

$$\hat{H}_3 = \frac{1}{2m}\Big\{(\hat{p}_x - e\hat{A}_x)^2 + (\hat{p}_y - e\hat{A}_y)^2\Big\}, \quad \hat{A}_x = -\frac{1}{2}B\hat{y}, \quad \hat{A}_y = \frac{1}{2}B\hat{x} \tag{B.5}$$

のエネルギー固有値は

$$E_n = \hbar\omega\Big(n + \frac{1}{2}\Big) \quad (n = 0, 1, 2, 3, \cdots), \quad \omega = \frac{|eB|}{m} \tag{B.6}$$

で与えられる。2 次元平面上の調和振動子ポテンシャルと一様磁場の中を運動する荷電粒子のハミルトニアン

$$\hat{H}_4 = \frac{1}{2m}\Big\{(\hat{p}_x - e\hat{A}_x)^2 + (\hat{p}_y - e\hat{A}_y)^2\Big\} + \frac{1}{2}k(\hat{x}^2 + \hat{y}^2), \ \hat{A}_x = -\frac{1}{2}B\hat{y}, \ \hat{A}_y = \frac{1}{2}B\hat{x} \tag{B.7}$$

のエネルギー固有値は

$$E_{n_L, n_R} = \hbar\Omega_L\Big(n_L + \frac{1}{2}\Big) + \hbar\Omega_R\Big(n_R + \frac{1}{2}\Big) \quad (n_L, n_R = 0, 1, 2, 3, \cdots) \tag{B.8}$$

で与えられる。ただし，ここで

$$\Omega_L = \sqrt{\Omega^2 + \frac{1}{4}\omega^2} - \frac{1}{2}\omega, \quad \Omega_R = \sqrt{\Omega^2 + \frac{1}{4}\omega^2} + \frac{1}{2}\omega, \quad \Omega = \sqrt{\frac{k}{m}}, \quad \omega = \frac{|eB|}{m} \tag{B.9}$$

である。

以上で (B.2), (B.4), (B.6), (B.8) という 4 通りのモデルのエネルギー固有値を列挙したが，いずれも質量パラメータ m に対する依存性は異なっている。とくに磁場中調和振動子のエネルギー (B.8) は m を定数倍してもエネルギーは定数倍にならない。実際の系は，いろいろなポテンシャルや不均一な電場や磁場の影響下にあり，多数のパラメータを調節して一斉にエネルギー固有値をスケール倍させることは不可能ではないかもしれないが，複雑な調整を要するだろう。一般に複雑なハミルトニアン $\hat{H}'_1$ を持っている系に対して質量パラメータを変えただけで (11.12) のようにエネルギー固有値の一斉スケール倍変化 $E_n \to (1+c)E_n$ をもたらすことができるか，と問うと，必ずできるとは言い難い。

そうしてみると，そのような一斉スケール倍を任意のハミルトニアン $\hat{H}'_1$ に対してやってのけてしまう Omnès モデル (11.6) の相互作用 $\hat{V} = g(t)\hat{H}'_1\hat{P}_2$ は非常に珍しい相互作用である。しかも Omnès モデルはエネルギーのスケール倍が目的で作られたモデルではなく，(11.7) のようにメーターを動かす相互作用として導入されたものである。このようなメーターシフト作用とエネルギースケール倍作用という二つの性質をあわせ持った相互作用は現実にあるだろうか，という問いが本文で問題にしたことである。

謝辞

量子論の諸問題について真摯な議論を日頃からさせていただいている細谷暁夫氏，筒井泉氏には，本稿に目を通していただいて有益なコメントをいただきました。両氏に感謝します。不確定性関係や量子測定理論の最新の知見をたびたび丁寧に教えてくださった小澤正直

氏に感謝します。渡辺優氏の推定理論にもとづく不確定性関係の詳しい内容は渡辺圭亮氏に教えてもらいました。渡辺圭亮氏に感謝します。弱値を用いた不確定性関係の定式化について最新の研究成果を教えていただいた李宰河氏に感謝します。また，月刊誌の記事であるにも関わらず辛抱強く本稿の完成を待ってくださったパリティ編集スタッフの沼澤修平氏に感謝しています。

世間には，小澤の不確定性不等式に対する肯定的な評価も否定的な評価もありますが，いろいろなことがわかってきて，さまざまな知見を比較検討できるようになった現在の視点からの総評はなされていないと私は感じていました。不確定性関係に関する公平で総括的なレポートを誰か書いてほしい，誰もやらないなら私が書きたい，とかねてから私は思っていました。パリティ誌に小澤の不等式についてのコラムを書く機会をいただいたのを好機と捉え，このノート作成を思い立った次第です。本稿の内容はいろいろな方から教わったことや文献に依存していますが，言うまでもないことですが，私のコラムやノートの間違いは私の責任に属します。

また，堀田昌寛氏と清水明氏にはこのノートの初公開版に対する丁寧なコメントをいただきましたことを感謝しています。いただいたコメントは原稿の修正に役立たさせていただきました。

*　　　*　　　*

修正増補版における主な修正箇所：

（2016 年 3 月 1 日版）pp.23-27 の時間とエネルギーの不確定性関係に関する記述を修正・追記し，参考文献を追加した。pp.38-40 の小澤の不等式以降の展開に関する記述を修正・追記し，参考文献を追加した。さらに，pp.53-58 の付録 A, B を新たに追加した。

（2016 年 3 月 2 日版）付録 A, B の中の数式番号を付け直した。

参考文献

[1] Heisenberg, W., “Über quantentheoretische Umdeutung kinematischer und mechanischer Beziehungen”, Z. Phys. **33**, 879-893 (1925).

[2] Born, M., “Zur Quantenmechanik der Stossvorgänge”, Z. Phys. **37**, 863-867 (1926). 英訳 “On the quantum mechanics of collisions” が論文集 [58] に収められている。論文 p.865 の脚注に「確率は波動関数の展開係数の 2 乗に比例する」という意味のことが書かれている。しかもこの脚注は，論文印刷前の校正の段階で追記されたものである。

[3] Born, M., “Quantenmechanik der Stossvorgänge”, Z. Phys. **38**, 803-827 (1926). この論文で波動関数の確率解釈が明確に示されている。また，散乱問題の近似計算方法（いわゆるボルン近似）が作られ，確率解釈の検証方法が示されている。

[4] Dirac, P. A. M., “The physical interpretation of the quantum dynamics”, Proceedings A **113**, 621-641 (1927).

[5] Jordan, P., “Über eine neue Begründung der Quantenmechanik II”, Z. Phys. **44**, 1-25 (1927).

[6] Heisenberg, W., “Über den anschaulichen Inhalt der quantentheoretischen Kinematik und Mechanik”, Z. Phys. **43**, 172-198 (1927). 英訳 “The physical content of quantum kinematics and mechanics” が論文集 [58] に収められている。日本語訳のハイゼンベルク「量子論的な運動学および力学の直観的内容について」が [42] に収められている。

[7] Kennard, E. H., “Zur Quantenmechanik einfacher Bewegungstypen”, Z. Phys. **44**, 326-352 (1927).

[8] Weyl, H., *Gruppentheorie und Quantenmechanik* (独初版 1929). 英訳 Robertson, H. P., *The Theory of Groups and Quantum Mechanics*, Dover (英訳初版 1931, Dover 出版 1950).

[9] Condon, E. U., “Remarks on uncertainty principles”, Science **69**, 573-574 (1929).

[10] Robertson, H. P., “The uncertainty principle”, Phys. Rev. **34**, 163-164 (1929).

[11] Heisenberg, W. (英訳 Eckart, C. and Hoyl, F.), *The Physical Principles of the Quantum Theory*, Dover (初版 1930, Dover 版 1949).

[12] Schrödinger, E., “Zum Heisenbergschen Unschärfeprinzip”, Sitzungsberichte der Preussischen Akademie der Wissenschaften, Physikalisch-mathematische Klasse **14**, 296-303 (1930).

[13] Dirac, P. A. M., “A theory of electrons and protons”, Proc. Roy. Soc. London A **126**, 360-365 (1930).

[14] von Neumann, J., *Mathematische Grundlagen der Quantenmechanik*, (1932). J. v. ノイマン（広重 徹，井上 健，恒藤敏彦 翻訳）『量子力学の数学的基礎』みすず書房 (1957).

[15] Pauli, W., *Die allgemeinen Prinzipien der Wellenmechanik*, Handbuch der Physik 2nd ed., Vol. 24, Springer (1933). パウリ（川口教男，堀 節子 翻訳）『量子力学の一般原理』講談社 (1975).

[16] Heisenberg, W. K., “The development of quantum mechanics”, Nobel Lecture (1933). URL: http://www.nobelprize.org/nobel_prizes/physics/laureates /1932/heisenberg-lecture.html

[17] Einstein, A., Podolsky, B. and Rosen, N. “Can quantum-mechanical description of physical reality be considered complete?” Phys. Rev. **47**, 777-780 (1935).

[18] Bohr, N., “Can quantum-mechanical description of physical reality be considered complete?” Phys. Rev. **48**, 696-702 (1935).

[19] Popper, K., *Logik der Forschung*, Springer (1935). *The Logic of Scientific Discovery*, Basic Books (1959). カール・R. ポパー（大内義一, 森博 共訳）『科学的発見の論理 上, 下』恒星社厚生閣 (1971, 1972).

[20] 伏見康治「新しい言葉の世界」自然 1947 年 3 月号；「不確定性原理」自然 1947 年 6 月号；「連続の中の不連続」自然 1947 年 10 月号；「不確定算術」自然 1947 年 12 月号. 伏見康治著作集 5『原子の世界』みすず書房 (1987) に再録。

[21] Lüders, G., "Über die Zustandsänderung durch den Messprozess", Ann. Phys. **8**, 322-328 (1951). 原論文はドイツ語. 英訳：Kirkpatrick, K. A., "Concerning the state-change due to the measurement process", Ann. Phys. **15**, 663-670 (2006). arXiv: quant-ph/0403007v2. URL: http://arxiv.org/abs/quant-ph/0403007

[22] 朝永振一郎『量子力学 II』みすず書房 (第 1 版 1952, 第 2 版 1997).

[23] Stinespring, E. F., "Positive functions on C* - algebras", Proc. Am. Math. Soc. **6**, 211 - 216 (1955).

[24] Hirschman, Jr., I. I., "A note on entropy", Am. J. Math. **79**, 152-156 (1957).

[25] Araki, H. and Yanase, M. M., "Measurement of quantum mechanical operators", Phys. Rev. **120**, 622-626 (1960).

[26] Aharonov, Y. and Bohm, D., "Time in the quantum theory and the uncertainty relation for time and energy", Phys. Rev. **122**, 1649 (1961).

[27] Heisenberg, W., Oral History Interviews; Interviewed by T. S. Kuhn; Location: Max Planck Institute, Munich, Germany; Interview date: Friday, 15 February 1963, Session V. https://www.aip.org/history-programs/niels-bohr-library/oral-histories/4661-5

[28] Braginskiĭ, V. B., "On the limits which determine the possibility of measuring gravitational effects", Soviet Phys. JETP **17**, 1050-1053 (1963).

[29] Bell, J. S., "On the Einstein Podolsky Rosen paradox", Physics **1**, 195-200 (1964).

[30] Haag, R. and Kastler, D., "An algebraic approach to quantum field theory", J. Math. Phys. **5**, 848-861 (1964).

[31] Arthurs, E. and Kelly Jr., J. L., "On the simultaneous measurement of a pair of conjugate observables", Bell System Technical Journal **44**, 725-729 (1965).

[32] Feynman, R. P., Leighton, R. B., and Sands, M. L., *The Feynman Lectures on Physics, Volume III, Quantum Mechanics*, Addison Wesley (1965). ファインマン・レイトン・サンズ（砂川重信 訳）『ファインマン物理学 V 量子力学』岩波書店 (1979).

[33] Kochen, S. and Specker, E. P., "The problem of hidden variables in quantum mechanics", J. Math. Mech. **17**, 59-87 (1967).

[34] van der Waerden, B. L., *Sources of Quantum Mechanics*, Dover (first publication 1968, reprint 2007).

[35] Ludwig, G., "Attempt of an axiomatic foundation of quantum mechanics and more general theories. III", Comm. Math. Phys. **9**, 1-12 (1968).

[36] Helstrom, C. W., "Quantum detection and estimation theory", J. Stat. Phys. **1**, 231-252 (1969).

[37] Shull, C. G., "Single-slit diffraction of neutrons", Phys. Rev. **179**, 752-754 (1969).

[38] Lamb, W. E., "An operational interpretation of nonrelativistic quantum mechanics", Phys. Today **22**, 23-28 (1969).

[39] Hellwig, K.-E. and Kraus, K., "Pure operations and measurements", Comm. Math. Phys. **11**, 214-220 (1969).

[40] Hellwig, K.-E. and Kraus, K., "Operations and measurements. II", Comm. Math. Phys. **16**, 142-147 (1970).

[41] Davies, E. B. and Lewis, J. T., "An operational approach to quantum probability", Comm. Math. Phys. **17**, 239-260 (1970).

[42] 湯川秀樹，井上健 編集「現代の科学 II」世界の名著 66 巻，中央公論社 (1970).

[43] アインシュタイン（中村誠太郎, 谷川安孝, 井上健 訳編）『アインシュタイン選集 1：特殊相対性理論・量子論・ブラウン運動』共立出版 (1971).

[44] 湯川秀樹 監修『岩波講座 現代物理学の基礎 5, 量子力学 III』岩波書店 (初版 1972);『岩波講座 現代物理学の基礎〔第 2 版〕4, 量子力学 II』岩波書店 (1978).

[45] サジ・カルノー（広重 徹 訳・解説）『熱機関の研究』みすず書房 (1973).

[46] Jammer, M., *The Philosophy of Quantum Mechanics*, Wiley (1974). マックス・ヤンマー『量子力学の哲学 上巻』紀伊國屋書店 (1983).

[47] Beckner, W., "Inequalities in Fourier analysis", Ann. Math. **102**, 159-182 (1975).

[48] Białynicki-Birula, I. and Mycielski, J., "Uncertainty relations for information entropy in wave mechanics", Commun. Math. Phys. **44**, 129-132 (1975).

[49] Holevo, A., *Quantum Detection and Estimation Theory*, Academic Press (1976).

[50] 江沢洋『だれが原子をみたか』岩波書店 (1976).

[51] Unruh, W. G. and Opat, G. I., "The Bohr-Einstein weigting of energy debate" Am. J. Phys. **47**, 743-744 (1979).

[52] Caves, C. M., Thorne, K. S., Drever, R. W. P., Sandberg, V. D., Zimmermann, M., "On the measurement of a weak classical force coupled to a quantum-mechanical oscillator. I. Issues of principle", Rev. Mod. Phys. **52**, 341-392 (1980).

[53] Machida, S. and Namiki, M., “Theory of measurement in quantum mechanics. I”, Prog. Theor. Phys. **63**, 1457-1473 (1980).

[54] Machida, S. and Namiki, M., “Theory of measurement in quantum mechanics. II”, Prog. Theor. Phys. **63**, 1833-1847 (1980).

[55] Araki, H., “A remark on Machida-Namiki theory of measurement”, Prog. Theor. Phys. **64**, 719-730 (1980).

[56] Zurek, W. H., “Pointer basis of quantum apparatus: Into what mixture does the wave packet collapse?” Phys. Rev. D **24**, 1516-1525 (1981).

[57] Deutsch, D., “Uncertainty in quantum mechanics”, Phys. Rev. Lett. **50**, 631-633 (1983).

[58] Wheeler, J. A. and Zurek, W. H. ed., *Quantum Theory and Measurement*, Princeton University Press (1983). 量子力学の観測問題に関する解説付き論文集。

[59] Yuen, H. P., “Contractive states and the standard quantum limit for monitoring free-mass positions,” Phys. Rev. Lett. **51**, 719-722 (1983). Erratum: Phys. Rev. Lett. **51**, 1603 (1983).

[60] Ozawa, M., “Quantum measuring processes of continuous observables”, J. Math. Phys. **25**, 79-87 (1984).

[61] Caves, C. M., “Defense of the standard quantum limit for free-mass position”, : Phys. Rev. Lett. **54**, 2465-2468 (1985).

[62] Arthurs, E. and Goodman, M. S., “Quantum correlations: A generalized Heisenberg uncertainty relation”, Phys. Rev. Lett. **60**, 2447-2449 (1988).

[63] Ozawa, M., “Measurement breaking the standard quantum limit for free-mass position”, Phys. Rev. Lett. **60**, 385-388 (1988).

[64] Maddox, J., “Beating the quantum limits (cont’d)”, Nature **331**, 559 (1988).

[65] Mermin, N. D., *Boojums All the Way through*, Cambridge University Press (1990). マーミン（町田 茂 訳）『量子のミステリー』丸善 (1994).

[66] Ishikawa, S., “Uncertainty relations in simultaneous measurements for arbitrary observables”, Rep. Math. Phys. **29**, 257-273 (1991).

[67] Ishikawa, S., “Uncertainties and an interpretation of nonrelativistic quantum theory”, Int. J. Theor. Phys. **30**, 401-417 (1991).

[68] 石川史郎「ハイゼンベルクの不確定性関係と量子力学の新しい測定公理について」素粒子論研究 **83**, F58-F79 (1991).

[69] Mermin, N. D., “Hidden variables and the two theorems of John Bell”, Rev. Mod. Phys. **65**, 803-815 (1993).

[70] Omnès, R., *The Interpretation of Quantum Mechanics*, Princeton University Press (1994).

[71] 新井朝雄『ヒルベルト空間と量子力学』共立出版 (1997).

[72] 山本義隆『古典力学の形成—ニュートンからラグランジュへ』日本評論社 (1997).

[73] Hilgevoord, J. "The uncertainty principle for energy and time. II", Am. J. Phys. **66**, 396-402 (1998).

[74] ニールス・ボーア（山本義隆 編集，翻訳）『ニールス・ボーア論文集 1：因果性と相補性』岩波書店 (1999).

[75] Kragh, H., *Quantum Generations—A History of Physics in the Twentieth Century*, Princeton University Press (1999). ヘリガ・カーオ『20 世紀物理学史 上巻』名古屋大学出版会 (2015).

[76] Busch, P., "The time-energy uncertainty relation", in *Time in Quantum Mechanics*, eds. J. G. Muga, R. Sala Mayato, I. L. Egusquiza, Springer-Verlag (2002) pp. 69-98. 2nd rev. ed. (2008) pp. 73-105. arXiv quant-ph/0105049v3.

[77] Hilgevoord, J. and Uffink, J., "The Uncertainty Principle", in Stanford Encyclopedia of Philosophy. First published Oct 8, 2001; substantive revision Jul 3, 2006. URL: http://plato.stanford.edu/entries/qt-uncertainty/

[78] Ozawa, M., "Conservation laws, uncertainty relations, and quantum limits of measurements", Phys. Rev. Lett. **88**, 050402 (4pp) (2002).

[79] Ozawa, M., "Position measuring interactions and the Heisenberg uncertainty principle", Phys. Lett. A **299**, 1-7 (2002).

[80] Ozawa, M., "Universally valid reformulation of the Heisenberg uncertainty principle on noise and disturbance in measurement", Phys. Rev. A **67**, 042105 (6pp) (2003).

[81] Ozawa, M., "Physical content of Heisenberg's uncertainty relation: Limitation and reformulation", Phys. Lett. A **318**, 21-29 (2003).

[82] Ozawa, M., "Uncertainty relations for joint measurements of noncommuting observables", Phys Lett A **320**, 367-374 (2004).

[83] Ozawa, M., "Uncertainty relations for noise and disturbance in generalized quantum measurements," Ann. Phys. **311**, 350-416 (2004).

[84] 小澤正直「不確定性原理・保存法則・量子計算」日本物理学会誌 2004 年 59 巻 3 号 157-165.

[85] 古田彩「物理学の常識に挑む数学者」日経サイエンス 2004 年 9 月号 pp.52-54 (日経サイエンス社). （別冊日経サイエンス No.199「量子の逆説」pp.28-30（2014 年 6 月）に再録）

[86] Werner, R. F., "The uncertainty relation for joint measurement of position and momentum," Quant. Inf. Comput. **4**, 546-562 (2004). arXiv: quant-ph/0405184v1. URL: http://arxiv.org/abs/quant-ph/0405184

[87] 石井茂「ハイゼンベルクの顕微鏡—不確定性原理は超えられるか」日経 BP 社 (2005).

[88] 小澤正直「不確定性原理の新展開」数理科学 43 巻 10 号，5-17 (サイエンス社, 2005 年 10 月).

[89] Koshino, K. and Shimizu, A. "Quantum Zeno effect by general measurements", Phys. Rep. **412**, 191-275 (2005).

[90] Ozawa, M., "Quantum perfect correlations", Ann. Phys. **321**, 744-769 (2006).

[91] Kitano, M., "Is the Heisenberg uncertainty relation really violated?" arXiv: 0803.4377v1 [quant-ph] (2008). URL: http://arxiv.org/abs/0803.4377

[92] 谷村省吾「干渉と識別の相補性—不確定性関係との関わりを巡る論争小史」数理科学 47 巻 2 号, 14-21 (サイエンス社, 2009 年 2 月).

[93] 小澤正直「量子情報の数学的基礎：量子測定理論と量子集合論」数学（日本数学会編）**61**, 2 号, 113-127 (2009).

[94] 小嶋泉「小澤正直氏の業績：量子情報の数学的基礎」数学（日本数学会編）**61**, 2 号, 210-217 (2009).

[95] Wehner, S. and Winter, A., "Entropic uncertainty relations—a survey", New J. Phys. **12**, 025009 (22pp) (2010).

[96] Lund, A. P. and Wiseman, H. M., "Measuring measurement-disturbance relationships with weak values", New. J. Phys. **12**, 093011 (11pp) (2010).

[97] Isobe, T. and Tanimura, S. "A method for systematic construction of Bell-like inequalities and a proposal of a new type of test", Prog. Theor. Phys. **124**, 191-205 (2010).

[98] 筒井 泉『量子力学の反常識と素粒子の自由意志』岩波書店 (2011).

[99] Watanabe, Y., Sagawa, T., and Ueda, M., "Uncertainty relation revisited from quantum estimation theory", Phys. Rev. A **84**, 042121 (7pp) (2011).

[100] Watanabe, Y. and Ueda, M., "Quantum estimation theory of error and disturbance in quantum measurement", arXiv: 1106.2526v1 [quant-ph] (2011). URL: http://arxiv.org/abs/1106.2526

[101] 谷村省吾「ハイゼンベルク方程式を最初に書いた人はハイゼンベルクではない」素粒子論研究 119 巻 4C 号 pp.280-290 (2012 年 2 月号); 電子版 Vol. 10, No. 3 (2011).

[102] Tanimura, S., "Superselection rules from measurement theory", arXiv: 1112.5701 (2011). URL: http://arxiv.org/abs/1112.5701

[103] Erhart, J., Sponar, S., Sulyok, G., Badurek, G., Ozawa, M., and Hasegawa, Y., "Experimental demonstration of a universally valid error-disturbance uncertainty relation in spin measurements", Nature Physics **8**, 185-189 (2012).

[104] Ozawa, M., "Mathematical foundations of quantum information: Measurement and foundations", arXiv: 1201.5334 [quant-ph] (2012). URL: http://arxiv.org/abs/1201.5334

[105] 古田彩「不確定性原理の再出発」日経サイエンス 2012 年 4 月号 pp.34-43 (日経サイエンス社). （別冊日経サイエンス No.199「量子の逆説」pp.18-27（2014 年 6 月）に再録）

[106] 谷村省吾「不確定性原理で『光子の逆説』は解けるか」日経サイエンス 2012 年 4 月号 pp.44-45 (日経サイエンス社). （別冊日経サイエンス No.199「量子の逆説」pp.36-37（2014 年 6 月）に再録）

[107] 古田彩「誤差って何？」日経サイエンス 2012 年 6 月号 pp.16-17 (日経サイエンス社). （別冊日経サイエンス No.199「量子の逆説」pp.33-34（2014 年 6 月）に再録）

[108] 上田正仁「新時代の量子力学教育」数理科学 50 巻 3 号, 64-65 (サイエンス社, 2012 年 3 月).

[109] 江沢洋「粒子性と波動性と不確定性原理」科学 82 巻 7 号, 767-777 (岩波，2012 年 7 月)

[110] 谷村省吾「量子古典対応—量子化の技法，古典系創発の機構」数理科学 50 巻 4 号, 19-25 (サイエンス社, 2012 年 4 月).

[111] 小澤正直「不確定性原理の発見」数理科学 50 巻 9 号, 23-29 (サイエンス社, 2012 年 9 月).

[112] 小澤正直「量子測定理論入門」物性研究 **97**, 1031-1057 (2012).

[113] Rozema, L. A., Darabi, A., Mahler, D. H., Hayat, A., Soudagar, Y. and Steinberg, A. M., "Violation of Heisenberg 's measurement-disturbance relationship by weak measurements", Phys. Rev. Lett. **109**, 100404 (5pp) (2012). Erratum: Phys. Rev. Lett. **109**, 189902 (2012).

[114] 白井仁人，東 克明，森田邦久，渡部鉄兵『量子という謎—量子力学の哲学入門』勁草書房 (2012). 第 9 章 時間とエネルギーの不確定性関係.

[115] 谷村省吾「ハイゼンベルクの不確定性関係と小澤の不等式の検証実験」パリティ：特集「物理科学，この 1 年」（丸善出版）2013 年 1 月号 pp. 37-38.

[116] 谷村省吾「揺らぐ境界—非実在が動かす実在」日経サイエンス 2013 年 7 月号 pp.36-45 (日経サイエンス社). （別冊日経サイエンス No.199「量子の逆説」pp.66-75（2014 年 6 月）に再録）

[117] 谷村省吾「波動関数は実在するか—物質的存在ではない．二つの世界をつなぐ窓口である」数理科学 51 巻 12 号, 14-21 (サイエンス社, 2013 年 12 月).

[118] 谷村省吾「測定理論から見た超選択則」素粒子論研究 電子版 Vol. 14, No. 5 (2013).

[119] マンジット・クマール（青木 薫 翻訳）『量子革命—アインシュタインとボーア，偉大なる頭脳の激突』新潮社 (2013).

[120] Branciard, C., "Error-tradeoff and error-disturbance relations for incompatible quantum measurements", PNAS **110**, 6742-6747 (2013). +Supporting Information.

[121] Baek, S.-Y., Kaneda, F., Ozawa, M. and Edamatsu, K., "Experimental violation and reformulation of the Heisenberg 's error-disturbance uncertainty relation", Sci. Rep. **3**, 2221 (5pp) (2013). +Supplementary Information.

[122] Busch, P., Lahti, P., Werner, R. F., "Proof of Heisenberg 's error-disturbance relation", Phys. Rev. Lett. **111**, 160405 (5pp) (2013).

[123] Ozawa, M. "Disproving Heisenberg's error-disturbance relation", arXiv: 1308.3540 [quant-ph] (2013). URL: http://arxiv.org/abs/1308.3540

[124] 谷村省吾「時間とエネルギーの不確定性関係—腑に落ちない関係」素粒子論研究 電子版 Vol. 16, No. 3 (2014).

[125] 堀田昌寛「素粒子論研究 Vol. 16『時間とエネルギーの不確定性関係—腑に落ちない関係』に対するコメント」素粒子論研究 電子版 Vol. 16, No. 5 (2014).

[126] 谷村省吾「時間とエネルギーの不確定性関係 II.—非可換性の視点から」素粒子論研究 電子版 Vol. 17, No. 2 (2014).

[127] 堀田昌寛「素粒子論研究 Vol. 17『時間とエネルギーの不確定性関係 II. —非可換性の視点から』に対するコメント」素粒子論研究 電子版 Vol. 17, No. 3 (2014).

[128] Kaneda, F., Baek, S.-Y., Ozawa, M. and Edamatsu, K., "Experimental test of error-disturbance uncertainty relations by weak measurement", Phys. Rev. Lett. **112**, 020402 (5pp) (2014).

[129] 古田彩「進化する不確定性原理」日経サイエンス 2014 年 3 月号 pp.15-17 (日経サイエンス社).（別冊日経サイエンス No.199「量子の逆説」pp.31-33（2014 年 6 月）に再録）

[130] Watanabe, Y., *Formulation of Uncertainty Relation Between Error and Disturbance in Quantum Measurement by Using Quantum Estimation Theory*, Springer (2014).

[131] 松田卓也『間違いだらけの物理学』学研教育出版 (2014).

[132] Dressel, J. and Nori, F., "Certainty in Heisenberg's uncertainty principle: Revisiting definitions for estimation errors and disturbance", Phys. Rev. A **89**, 022106 (14pp) (2014).

[133] Buscemi, F., Hall, M. J. W., Ozawa, M. and Wilde, M. M., “Noise and disturbance in quantum measurements: An information-theoretic approach”, Phys. Rev. Lett. **112**, 050401 (5pp) (2014).

[134] Busch, P., Lahti, P. and Werner, R. F., “Comment on Noise and disturbance in quantum measurements: An information-theoretic approach”, arXiv:1403.0368 [quant-ph] (2014). URL: http://arxiv.org/abs/1403.0368

[135] Ozawa, M., “Error-disturbance relations in mixed states”, arXiv: 1404.3388 [quant-ph] (2014). URL: http://arxiv.org/abs/1404.3388

[136] Sulyok, G., Sponar, S., Demirel, B., Buscemi, F., Hall, M. J. W., Ozawa, M. and Hasegawa, Y., “Experimental test of entropic noise-disturbance uncertainty relations for spin-1/2 measurements”, Phys. Rev. Lett. **115**, 030401 (5pp) (2015).

[137] Ozawa, M., “Heisenberg’s original derivation of the uncertainty principle and its universally valid reformulations”, Current Science **109**, 2006-2016 (2015). URL: http://i-scholar.in/index.php/CURS/article/view/80400/70544

[138] 谷村省吾「角度と軌道角運動量の不確定性関係とその一般化」数理解析研究所講究録 1953 号 26-39 (2015).

[139] Tanimura, S., “Uncertainty relation between angle and orbital angular momentum: interference effect in electron vortex beams”, Nanosystems **6**, 205-212 (2015).

[140] Tanimura, S., “Complementarity and the nature of uncertainty relations in Einstein-Bohr recoiling slit experiment”, Quanta **4**, No. 1 (9pp) (2015).

[141] 枝松圭一，小澤正直，長谷川祐司「量子測定に関する新しい理論と実証実験への道」数学セミナー 2015 年 6 月号 50-57（日本評論社）.

[142] Lee, J. and Tsutsui, I., “Uncertainty relations for approximation and estimation”, arXiv:1511.08052. URL: http://arxiv.org/abs/1511.08052

[143] 谷村省吾「メイドインジャパン物理用語 量子物理編：小澤の不等式」パリティ（丸善出版）2016 年 2 月号 p.41.